TD d'analyse 9 : équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

(a) $y'(t) = t^2 y(t) + t^2$, avec $y(0) = 1$.

(b) $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(c) $y'(t) = A\, y(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) $y'(t) + e^{t-y(t)} = 0$, avec $y(0) = 0$.

Exercice 2. Soit une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation $y'(t) = F(t, y(t))$ pour $t \in]-1, 1[$. Montrer que, si $y_1(0) < y_2(0)$, alors $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout $t \in]-1, 1[$.

Exercice 3.

(a) Lemme de Grönwall. Soit $C \in \mathbb{R}_+$. Soient y et ϕ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $\quad y(t) \leq C + \int_a^t \phi(s) y(s) ds$. Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \phi(s) ds\right).$$

(b) Soit une fonction continue $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = F(t, y(t))$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit une fonction continue $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. On note $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle $y'(t) = A(t) y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice de $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Calculer le wronskien $W(t) = \det M(t)$.

(b) On suppose maintenant que $\|A(.)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que toute solution y admet une limite en $+\infty$. On peut donc définir l'application θ qui à $y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe la limite en $+\infty$ de la solution y telle que $y(0) = y_0$. Montrer que θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.