

TD d'analyse 6 : calcul différentiel

Dans toute cette feuille, \mathbb{R}^n désigne l'espace euclidien usuel.

Exercice 1. Soit $p \in [1, +\infty]$. En quels points de \mathbb{R}^2 l'application $\|\cdot\|_p$ est-elle différentiable ?

Exercice 2. Interprétations géométriques.

- (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et de gradient non nul en 0. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable en 0, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0)$ de norme 1. Comment doit-on choisir γ pour que la pente $(f \circ \gamma)'(0)$ soit maximale ?
- (b) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , avec $f(0) = 0$ et un déterminant jacobien vérifiant $J_f(0) \neq 0$. En notant B_r la boule de rayon r centrée en 0 et vol la mesure de Lebesgue, montrer que le quotient $\frac{\text{vol}f(B_r)}{\text{vol}B_r}$ tend vers $|J_f(0)|$ quand $r \rightarrow 0$.

Exercice 3. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$. Exprimer $\gamma''(0)$ en fonctions des dérivées partielles de f .

Exercice 4. Quelle est la valeur maximale de $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$, pour $x, y \geq 0$?

Exercice 5. Vérifier que $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable et calculer sa différentielle au point I_n , puis partout.

Exercice 6. On considère une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq k|f(x)|.$$

Montrer que f est nulle.

Indication : montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert.

Exercice 7. On considère une application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

- (a) Montrer que ϕ est k -lipschitzienne si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|D\phi_x\| \leq k$.
- (b) On suppose que ϕ est k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que l'application $\text{Id} + \phi$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 . On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Df_x(h), h \rangle \geq \delta \|h\|^2$.

- (a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq \delta \|y - x\|^2$.
- (b) Montrer que f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Exercice 9. Etant donné un endomorphisme symétrique u de \mathbb{R}^n , on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

- (a) Démontrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.
- (b) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in S$ tel que $f(x_0) = \max_S f$.
- (c) Montrer que x_0 est un vecteur propre de u .
- (d) En déduire le théorème spectral : u est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 10.

- (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Montrer que l'application $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = {}^t M A M$ est différentiable, de différentielle surjective.
- (b) En déduire que, si $n = p + q$, l'ensemble des matrices symétriques inversibles de signature (p, q) est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , telle que $f(0) = 0$ et $Df_0 = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j g_{ij}(x).$$

Exercice 12. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^2 . On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $D^2 f_x(h, h) \leq M \|h\|^2$.

- (a) Montrer que M est positif.
- (b) Prouver l'inégalité $\|Df_0\| \leq \sqrt{2Mf(0)}$.