

## TD d'analyse 7 : analyse fonctionnelle

**Exercice 1.** On munit  $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme uniforme et on pose, pour  $f \in X$  :

$$L(f) = \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- (a) Montrer que  $L$  et les  $L_n$  sont des formes linéaires continues sur  $X$  et calculer leurs normes.
- (b) Montrer que, pour tout  $f \in X$ ,  $L_n(f)$  tend vers  $L(f)$ , alors que  $\|L_n - L\| = 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 2.** Soit une fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle.

**Exercice 3.** Soit  $X$  l'espace de Banach  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme du sup. Soit  $K$  une application continue de  $[0, 1]^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que la formule

$$\forall f \in X, \quad \forall x \in [0, 1], \quad u_K(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

définit un opérateur compact  $u_K$  de  $X$  dans  $X$ .

**Exercice 4.** Prouver que  $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx = 36$ .

**Exercice 5.** (Opérateurs compacts) Soit  $H$  un espace de Hilbert. L'espace  $\mathcal{L}(H)$  des applications linéaires continues de  $H$  dans  $H$  (= opérateurs) est muni de la norme d'opérateur usuelle. On note  $\mathcal{K}(H)$  le sous-espace des opérateurs compacts et  $\mathcal{L}_0(H)$  celui des opérateurs dont l'image est de dimension finie.

- (a) Montrer que  $u$  est dans  $\mathcal{K}(H)$  ssi il existe une suite d'éléments  $u_n$  de  $\mathcal{L}_0(H)$  qui converge vers  $u$  dans  $\mathcal{L}(H)$ .
- (b) Montrer que, si  $u$  est dans  $\mathcal{K}(H)$ , alors  $u^*$  aussi.
- (c) Montrer que, si  $u$  est dans  $\mathcal{K}(H)$ , alors  $\text{Ker}(\text{id} + u)$  et  $\text{Im}(\text{id} + u)^\perp$  sont de dimension finie.
- (d) Montrer que, si  $u$  est dans  $\mathcal{K}(H)$ , alors  $\text{Im}(\text{id} + u)$  est fermé.

**Exercice 6.** (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que  $H$  est muni d'une base hilbertienne  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour

$u \in \mathcal{L}(H)$ , on pose :  $\|u\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|u(e_i)\|^2}$ . On dit que  $u$  est de Hilbert-Schmidt si  $\|u\|_{HS}$  est fini. On note  $\mathcal{HS}(H)$  l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

- (a) Soient  $u \in \mathcal{L}(H)$  et  $(f_j)$  une (autre) base hilbertienne de  $H$ . Vérifier la formule : 
$$\sum_{i,j} \langle u(e_i), f_j \rangle^2 = \|u\|_{HS}^2.$$
- (b) En déduire que, pour  $u \in \mathcal{L}(H)$ ,
- $\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}$  ;
  - $\|u\|_{HS}$  ne dépend pas de la base hilbertienne  $(e_i)$  choisie.
- (c) Montrer que  $\mathcal{HS}(H)$  est un idéal bilatère de l'algèbre  $\mathcal{L}(H)$ .
- (d) Montrer que tout  $u \in \mathcal{HS}(H)$  vérifie  $\|u\| \leq \|u\|_{HS}$ .
- (e) Montrer que  $(\mathcal{HS}(H), \|\cdot\|_{HS})$  est un espace de Banach.
- (f) Montrer que  $\mathcal{L}_0(H)$  est un sous-espace dense de cet espace de Banach.
- (g) En déduire que les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts.

**Exercice 7.** (Opérateurs à noyau  $L^2$ )

- (a) Soit  $A$  l'ensemble des fonctions du type  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ , où  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $L^2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Vect } A$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .
- (b) En déduire que, si  $(e_i)$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors les fonctions  $e_{ij} : (x, y) \mapsto e_i(x)e_j(y)$  fournissent une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .
- (c) Soit  $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Montrer que la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y)f(y)dy$$

définit un opérateur de Hilbert-Schmidt  $u_K$  sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{R})$ , avec  $\|u_K\|_{HS} = \|K\|_2$ .

- (d) Montrer que tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $L^2(\mathbb{R})$  s'écrivent ainsi.

**Exercice 8.** (Espace de Bergman) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On note  $H(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont holomorphes et de module au carré intégrable :

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2} < +\infty.$$

- (a) Montrer que, si le disque  $D(z, r)$  est inclus dans  $\Omega$ ,  $|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z, r)} |f|^2$ .
- (b) En déduire que, si  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ , il existe une constante  $c_K$  telle que : 
$$\sup_K |f| \leq c_K \|f\|_2.$$
- (c) Montrer que  $(H(\Omega), \|\cdot\|_2)$  est un espace de Hilbert.
- (d) Décrire  $H(\mathbb{C})$ .
- (e) Maintenant, on s'intéresse au cas du disque unité :  $\Omega = D$ . Montrer que les fonctions  $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forment une base hilbertienne de  $H(D)$ .
- (f) Démontrer la formule :

$$\forall f \in H(D), \quad \forall z \in D, \quad f(z) = \int_D \frac{f(w)}{\pi(1-\bar{w}z)^2} d\lambda(w),$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .

*Indication : étudier la forme linéaire  $f \mapsto f(z)$ .*