

## Feuille 1

### Eléments de logique - Suites Numériques

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

**Corrigé Exercice 1** (Logique et théorie des ensembles).

$\text{Non}^{(*)}$  : Il existe une prison dans laquelle il y a au moins un détenu qui aime bien au moins un gardien.

$\text{Non}^{(**)}$  : Il existe un entier naturel  $x$ , tel que pour tout entier naturel  $y$ , il existe un entier naturel  $z$  tel que la relation  $z \geq x + y$  est vérifiée.

L'assertion  $\text{Non}^{(**)}$  est vraie : une fois choisis  $x$  et  $y$ , il suffit de prendre  $z := x + y$ . On en déduit que  $(**)$  est fausse.

**Corrigé Exercice 2** (Logique et théorie des ensembles).

On raisonne par l'absurde. Supposons que  $f$  n'est pas strictement croissante. Il existe alors  $c, d \in [a, b]$  tels que  $c < d$  et  $f(c) \geq f(d)$ . En particulier, la quantité  $k = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$  est négative. Or, d'après le théorème de accroissements finis, il existe  $x \in ]c, d[$  tel que  $f'(x) = k \leq 0$ , ce qui contredit le fait que la dérivée de  $f$  soit strictement positive.

**Corrigé Exercice 3** (Logique et théorie des ensembles).

– (sens direct) Si  $F = G$ , alors  $F \cup G = F \cup F = F = F \cap F = F \cap G$

(Réciproque) On a :

$$F \cap G \subset F \subset F \cup G \quad \text{et} \quad F \cap G \subset G \subset F \cup G$$

Ainsi, si  $F \cup G = F \cap G$ , on a :

$$F \cap G = F = F \cup G \quad \text{et} \quad F \cap G = G = F \cup G$$

D'où  $F = G$

– Mettons qu'on veuille construire un sous-ensemble  $A$  de  $E$ . Pour chaque élément  $a \in E$ , on peut faire le choix  $a \in A$  ou  $a \notin A$ . On a donc  $2^{\text{card}(E)} = 2^4 = 16$  possibilités. Il peut être aussi intéressant de tous les écrire : l'ensemble vide, les 4 ensembles à 1 élément, les 6 à 2 éléments, les 4 à 3 éléments, et  $A$  tout entier.

**Corrigé Exercice 4** (Logique et théorie des ensembles).

- La borne supérieure de  $A$  est facile à trouver, c'est  $\frac{3}{2}$ . En effet, elle est atteinte (c'est donc un maximum) pour  $p = 1$  et  $q = 2$ . Montrons que pour tout  $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q$ , si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{3}{2}$ , alors  $\{p; q\} = \{1; 2\}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $p < q$ . Si  $p \geq 2$ , alors  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$  : on a donc nécessairement  $p = 1$ . On obtient ainsi  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$  puis  $q \leq 2$  puis enfin  $q = 2$  (car  $q \neq p$ ). Ainsi, si  $a \in A$  est supérieure à  $\frac{3}{2}$ ,  $a = \frac{3}{2}$  ce qui achève de montrer que  $\frac{3}{2}$  est le maximum (donc la borne supérieure) de  $A$ .

La borne inférieure de  $A$  est 0. Déjà, 0 est bien minorant car tous les éléments de  $A$  sont positifs. Ensuite, soit  $\epsilon$  un réel strictement positif et montrons qu'il ne peut pas être minorant de  $A$  : Soit  $N$  un entier strictement supérieur à  $\frac{1}{\epsilon}$ . Pour  $p = 2N$  et  $q = 2N + 1$ , on a :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1} < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} < \epsilon$$

D'où  $\epsilon$  n'est pas un minorant. Ainsi, 0 est le plus petit des minorants i.e 0 est la borne inférieure de  $A$ .

2. La borne supérieure  $\frac{3}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$  appartient bien à  $A$ ; comme tous les éléments de  $A$  sont strictement positifs,  $0 \notin A$ .

**Corrigé Exercice 5** (Récurrence).

(On utilisera l'abréviation suivante : HR signifie « Hypothèse de Récurrence »)

- 1. Soit  $P(n) : \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$ .  
(Initialisation) On a :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1 \quad \text{et} \quad \frac{((-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) - 1)}{4} = \frac{-4}{4} = 1.$$

Donc  $P(1)$  est vraie.

(Hérédité) Supposons  $P(n)$  vrai. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) \\ &= \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1) \quad (\text{HR}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (-2n-1) - 1}{4} + \frac{(-1)^{n+1} (4n+4)}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2n+3) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1) + 1) - 1}{4} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité, puis le résultat.

2. Soit  $Q(n) : 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ .

(Initialisation) On a  $2^0 = 1! = 1^1 = 1$  d'où  $Q(1)$  est vraie.

(Hérédité) Supposons  $Q(n)$  vraie. On a :

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \leq_{(\text{HR})} n! \cdot 2 \leq n! \cdot (n+1) \leq_{(\text{HR})} n^n \cdot (n+1) \leq (n+1)^n \cdot (n+1)$$

D'où :

$$2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{(n+1)}$$

D'où l'hérédité et le résultat.

- Soit  $P(n) : 2^n > n^2$ .

- $P(0)$  est l'énoncé  $1 > 0$  : il est vrai.  $P(1)$  est l'énoncé  $2 > 1$  : il est vrai.  $P(2)$  est l'énoncé  $4 > 4$  : il est faux.  $P(3)$  est l'énoncé  $8 > 9$  : il est faux.  $P(4)$  est l'énoncé  $16 > 16$  : il est faux.  $P(5)$  est l'énoncé  $32 > 25$  : il est vrai.
- L'initialisation à 5 a été faite à la question précédente. Soit  $n \geq 5$  tel que  $P(n)$  soit vraie. Comme  $n \geq 3$ , on a  $n^2 \geq 2n+1$  (en effet, le trinôme  $X^2 - 2X - 1$  a pour racines  $1 - \sqrt{2}$  et  $1 + \sqrt{2}$ , et est donc positif sur  $[1 + \sqrt{2}, +\infty[$ ; on conclut avec le fait que  $3 \geq 1 + \sqrt{2}$ ). On a donc :

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n >_{(\text{HR})} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

D'où l'hérédité et le résultat.

**Corrigé Exercice 6** (Contraposée).

- Si  $n$  est pair, on peut écrire  $n = 2k$  puis  $n^2 = 2 \cdot (2k^2)$  d'où  $n^2$  est pair. On en déduit le résultat par contraposée.
- Une fonction  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$  si :  $\exists M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ .
  1.  $f$  n'est pas majorée si pour tout réel  $M$  positif, il existe un réel  $x$  tel que  $f(x) > M$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > M$$

2. Une fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  si :  $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists A \in \mathbb{R}^+$  tel que  $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$ .

$f$  ne tend pas vers l'infini s'il existe un réel positif  $M$  tel que pour tout réel positif  $A$ , il existe un réel  $x \geq A$  tel que  $f(x) < M$  :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall A \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq A \text{ et } f(x) < M$$

3. Non. La fonction  $f(x) = x \sin(x)$  n'est pas bornée mais ne tend pas vers l'infini puisque  $f(n\pi) = 0$  pour tout entier  $n$ .

**Corrigé Exercice 7** ((C) Limites : révisions du premier semestre).

1. On a  $u_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$ . On sait que  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$  quand  $x \rightarrow 0$ . Ainsi, quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a :

$$u_n = \frac{1 + 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{1 - (1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = \frac{2 + o(1)}{-\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})} \rightarrow -\infty$$

2. On a  $v_n = \exp(2n \log(1 + \frac{1}{n}))$ . On sait que  $\log(1+x) = x + o(x)$  quand  $x \rightarrow 0$ . Ainsi, quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a :

$$v_n = \exp\left(2n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2 + o(1))$$

ce qui tend vers  $e^2$  par continuité de l'exponentielle.

3. On a  $w_n = \exp\left(\frac{1}{n} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ . On sait que  $\sin(x) = x(1 + \varepsilon(x))$  où  $\varepsilon(x)$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ . Ainsi, quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a :  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \log \frac{1}{n} + \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\log(n) + \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

La suite  $\log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. De plus, on a vu en cours que la suite  $\frac{1}{n} \log(n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Au final la suite

$$w_n = \exp\left(\frac{1}{n} \log \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{n} \log(n) + \frac{1}{n} \log \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

qui tend vers  $e^0 = 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$  par continuité de l'exponentielle.

**Corrigé Exercice 8** ((C) Sommes de suites géométriques).  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1.  $S_1(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$  ( $e^{i\theta}$  est différent de 1 car  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ )

2.  $S_2(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{2ik\theta} = \sum_{k=-n}^n (e^{2i\theta})^k = e^{-2in\theta} \frac{1 - e^{2i(2n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$  ( $e^{2i\theta}$  est différent de 1 car  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ )
- $$= e^{-2in\theta} \frac{e^{-i\theta} - e^{(4n+1)i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{e^{-(2n+1)i\theta} - e^{(2n+1)i\theta}}{-2i \sin(\theta)} = \frac{-2i \sin((2n+1)\theta)}{-2i \sin(\theta)} = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$
3.  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$
4.  $\sum_{k=0}^3 3i^k = 3 \sum_{k=0}^3 i^k = 3 \frac{1 - i^4}{1 - i} = 3 \frac{0}{1 - i} = 0$

**Corrigé Exercice 9** (Somme d'entiers, de carrés, de cubes).

1. - Montrons par récurrence :  $R_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Déjà, on a  $R_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$  d'où l'initialisation. Supposons le résultat vrai au rang  $n$ . On a

$$R_{n+1} = R_n + (n+1) \stackrel{(\text{HR})}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

d'où le résultat.

- Montrons :  $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Déjà,  $S_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$  d'où l'initialisation. Supposons que le résultat soit vrai au rang  $n$ . On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \stackrel{(\text{HR})}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- Montrons :  $T_n = (R_n)^2$ . Déjà,  $T_0 = 0 = (R_0)^2$  d'où l'initialisation. Supposons le résultat vrai au rang  $n$ . On a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + (n+1)^3 \stackrel{(\text{HR})}{=} (R_n)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On joue au puzzle de la façon suivante : on considère deux jeux de  $n$  dominos, de dimensions  $1 \times 1$ ,  $2 \times 1$ ,  $\dots$ ,  $n \times 1$ , disons un jeu rouge et un jeu bleu. L'aire totale des deux jeux de dominos est  $2R_n$  par définition. Mais si on met à la suite le domino bleu de taille  $k \times 1$  et le domino rouge de taille  $(n+1-k) \times n$  pour  $1 \leq k \leq n$  on obtient  $n$  rectangles de taille  $(n+1) \times 1$ . En les mettant côte à côte, on pave avec nos deux jeux de dominos un rectangle d'aire  $n(n+1)$ . D'où  $2R_n = n(n+1)$
3. Le côté du grand carré mesure  $R_n$ , donc le grand carré a pour aire  $R_n^2$ . Calculons cette même aire en calculant les aires des bandes entre le  $k$ -ième carré dessiné et le  $(k+1)$ -ième. On peut découper cette bande en trois morceaux, en prolongeant les côtes du carré de côté  $R_k$  : on obtient un carré de côté  $R_{k+1} - R_k$  et deux rectangles de côtés  $R_k$  et  $R_{k+1} - R_k$ . Or  $R_k = \frac{k(k+1)}{2}$  et  $R_{k+1} - R_k = k+1$ . L'aire de la  $k$ -ième bande est alors égale à  $(R_{k+1} - R_k)^2 + 2R_k(R_{k+1} - R_k) = (k+1)^2 + k(k+1)^2 = k^3$ . L'aire totale du carré vaut alors  $\sum_{k=1}^n k^3 = T_n$ . On a donc  $R_n^2 = T_n$ .