Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 1

Généralités

Exercice 1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément unité e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer qu'alors tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 2 Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3 Soient G un groupe et H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G. Montrer que H est un sous-groupe de G. Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 4 Montrer que si G est un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5, alors G est commutatif. Qu'en est-il pour un groupe de cardinal 6 ?

Exercice 5 Soit G un groupe fini.

1. Montrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels (2) a une réponse positive. Un exemple non abélien?

Exercice 6 Prouver que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Prouver que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Exercice 8 Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Prouver que G est abélien.

Exercice 9 Soit G un groupe de cardinal p premier.

1. Vérifier que G est cyclique.

2. Déterminer l'ensemble des sous-groupes du groupe $\mathbb{F}^2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer notamment qu'il y en a exactement $p+3$.

3. En déduire qu'il existe dans $\mathbb{F}^2$ des groupes qui ne sont pas de la forme $G_1 \times H_1$ avec G_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et H_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 10 Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 11 Soient G un groupe abélien et $H \subset K \subset G$ des sous-groupes. Prouver que G/K est isomorphe au quotient du groupe G/H par le groupe K/H.

Exercice 12 Soit G un groupe de type fini.

1. Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ?

2. Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 13

1. On note H_8 le groupe de quaternions défini par

$$\mathrm{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}, \quad \text{avec} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ \text{ et } \ ijk = -1.$$

Vérifier que H_8 n'est pas commutatif mais que tous ses sous-groupes sont distingués.

2. On dit qu'un groupe G est d'exposant r si r est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels exposants r un groupe d'exposant r est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 14 Soit G un groupe fini.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathscr{A}_n$.

3. Étant donné un corps k, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, k)$.

4. Si G est d'ordre n, montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n-1, \mathbb{R})$.