TD d'analyse 8 : analyse fonctionnelle

Exercice 1.

(a) Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $O_n = \{x \in X \ / \ \exists \delta > 0, \forall y, z \in B(x,\delta), d(f(y), f(z)) < 1/n\}$. Vérifier que les O_n sont des ouverts et que l'ensemble des points de continuité de f est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$.

(b) Utiliser le théorème de Baire pour en déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

(a) Montrer que $\int_0^{2\pi} |D_N|$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.
Indication : la fonction sinus cardinal n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit X l'espace des fonctions continues et 2π-pérodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme. Soit $N \in \mathbb{N}$. Prouver que la formule

$$\forall f \in X, \quad T_N(f) = \int_0^{2\pi} D_N(x) f(-x) dx$$

définit une forme linéaire continue T_N sur X et calculer sa norme.

(c) Utiliser le théorème de Banach-Steinhaus pour en déduire qu'il existe une fonction f de X dont la série de Fourier diverge en au moins un point.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert possédant une base hilbertienne $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On considère une autre famille orthonormée $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|e_i - f_i\|^2 < +\infty$.

(a) Montrer que la formule

$$T_N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e_i + \sum_{i=N}^{+\infty} x_i f_i$$

définit un isomorphisme $T_N : H \to H$ si on choisit N assez grand.

(b) Prouver que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
Indication : que dire du sous-espace V orthogonal à $\overline{\mathrm{Vect}(f_i)_{i \geq N}}$?

Exercice 4. (Opérateurs compacts) Soit H un espace de Hilbert. L'espace $\mathcal{L}(H)$ des applications linéaires continues de H dans H (= opérateurs) est muni de la norme d'opérateur usuelle. On note $\mathcal{K}(H)$ le sous-espace des opérateurs compacts (i.e. tels que l'image de la boule unité est d'adhérence compacte) et $\mathcal{L}_0(H)$ celui des opérateurs dont l'image est de dimension finie.

(a) Montrer que u est dans $\mathcal{K}(H)$ ssi il existe une suite d'éléments u_n de $\mathcal{L}_0(H)$ qui converge vers u dans $\mathcal{L}(H)$.

(b) Montrer que, si u est dans $\mathcal{K}(H)$, alors u^* aussi.

(c) Montrer que, si u est dans $\mathcal{K}(H)$, alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+u)$ et $\mathrm{I}m(\mathrm{id}+u)^\perp$ sont de dimension finie.

(d) Montrer que, si u est dans $\mathcal{K}(H)$, alors $\mathrm{I}m(\mathrm{id}+u)$ est fermé.

Exercice 5. (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que H est muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour $u \in \mathcal{L}(H)$, on pose : $\|u\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|u(e_i)\|^2}$. On dit que u est de Hilbert-Schmidt si $\|u\|_{HS}$ est fini. On note $\mathcal{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

(a) Soient $u \in \mathcal{L}(H)$ et (f_j) une (autre) base hilbertienne de H. Vérifier la formule : $\sum_{i,j} \langle u(e_i), f_j\rangle^2 = \|u\|_{HS}^2$.

(b) En déduire que, pour $u \in \mathcal{L}(H)$,
- $\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}$;
- $\|u\|_{HS}$ ne dépend pas de la base hilbertienne (e_i) choisie.

(c) Montrer que $\mathcal{HS}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$.

(d) Montrer que tout $u \in \mathcal{HS}(H)$ vérifie $\|u\| \leq \|u\|_{HS}$.

(e) Montrer que $(\mathcal{HS}(H), \|.\|_{HS})$ est un espace de Banach.

(f) Montrer que $\mathcal{L}_0(H)$ est un sous-espace dense de cet espace de Banach.

(g) En déduire que les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts.

Exercice 6. (Espace de Bergman) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont holomorphes et de module au carré intégrable.

(a) Montrer que, si le disque $D(z,r)$ est inclus dans Ω, $|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} |f|^2$.

(b) En déduire que, si K est un compact inclus dans Ω, il existe une constante c_K telle que : $\sup_K |f| \leq c_K \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

(c) Montrer que $(H(\Omega), \|.\|_{L^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

(d) Décrire $H(\mathbb{C})$.

(e) Maintenant, on s'intéresse au cas du disque unité : $\Omega = D$. Montrer que les fonctions $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base hilbertienne de $H(D)$.

(f) Démontrer la formule :

$$\forall f \in H(D), \quad \forall z \in D, \quad f(z) = \int_D \frac{f(w)}{\pi(1-\bar{w}z)^2} d\lambda(w),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.