

TD d'analyse 7 : Fourier, distributions

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π -périodique définie par $f(x) = \pi - x$ pour $x \in [0, \pi]$.

(a) Calculer la série de Fourier de f .

(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, de classe C^1 et telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Démontrer l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 3. Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Prouver qu'il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- u est C^∞ et vérifie l'équation de la chaleur $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$;
- pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot)$ est 2π -périodique ;
- $u(t, \cdot)$ converge vers u_0 quand $t \rightarrow 0$, dans $L^2([0, 2\pi])$.

Exercice 4.

(a) Etant donné un nombre $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f_a(t) = \cos(at).$$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cotan(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

(c) Démontrer la formule :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Exercice 5.

(a) Calculer la transformée de Fourier de l'indicatrice de $[-1, 1]$.

(b) Que vaut $\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx$?

Exercice 6. Dans cet exercice, on note $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

- (a) Etant donné $R > 0$, soit γ_R un lacet paramétrant naturellement le bord de $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| < R \text{ et } 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$, dans le sens direct. Pour tout réel t , calculer l'intégrale $\int_{\gamma_R} \frac{e^{-itz} dz}{(\operatorname{ch} z)^2}$.
- (b) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto 1/(\operatorname{ch} x)^2$.

Exercice 7. (Polynômes de Hermite)

On va travailler dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ associé à la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$h_n(x) = e^{x^2} g^{(n)}(x), \quad \text{où} \quad g(x) = e^{-x^2}.$$

- (a) Montrer que les fonctions h_n sont polynômiales. Déterminer leurs degrés et coefficients dominants.
- (b) Montrer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale de H et calculer la norme λ_n de chaque élément h_n .
- (c) On veut montrer que la famille $(\lambda_n^{-1} h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H .
- (i) Pour $f \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- (ii) Pour toute $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n -ième $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0)$. En déduire que si f est orthogonale à tous les polynômes, alors f est nulle.
- (iii) Conclure.

Exercice 8. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{y}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}$.
- (b) Prouver que y vérifie l'équation $-y'' + y = f$ au sens des distributions.

Exercice 9. Vérifier que les formules suivantes définissent des distributions sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée :

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{x}{|x|}, \quad h(x) = \ln(|x|).$$

Exercice 10. On s'intéresse à la distribution $vp(1/x)$ obtenue en prenant la valeur principale de $1/x$.

- (a) Prouver la formule suivante au sens des distributions :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{inx} vp(1/x) = i\pi \delta_0(x).$$

- (b) Calculer la transformée de Fourier de $vp(1/x)$, après avoir justifié son existence.
- (c) En déduire une autre preuve de la formule du (a).