TD d'analyse 6 : calcul différentiel

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ désigne l'espace euclidien usuel.

Exercice 1. Interprétations géométriques.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable et de gradient non nul en 0. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dérivable en 0, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0)$ de norme 1. Comment doit-on choisir γ pour que la pente $(f \circ \gamma)'(0)$ soit maximale ?

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, avec $f(0) = 0$ et un déterminant jacobien vérifiant $J_f(0) \neq 0$. En notant B_r la boule de rayon r centrée en 0 et vol la mesure de Lebesgue, montrer que le quotient $\dfrac{\mathrm{vol} f(B_r)}{\mathrm{vol} B_r}$ tend vers $|J_f(0)|$ quand $r \to 0$.

Exercice 2. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$. Exprimer $\gamma''(0)$ en fonctions des dérivées partielles de f.

Exercice 3. Quelle est la valeur maximale de $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$, pour $x, y \geq 0$?

Exercice 4. Vérifier que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application différentiable et calculer sa différentielle au point I_n, puis sur $GL_n(\mathbb{R})$, puis partout.

Exercice 5. On considère une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq k|f(x)|.$$

Montrer que f est nulle.
Indication : montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert.

Exercice 6. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $D^2 f_x(h,h) \leq M\|h\|^2$.

(a) Montrer que M est nécessairement positif.

(b) Prouver l'inégalité $\|Df_0\| \leq \sqrt{2Mf(0)}$.

Exercice 7. On considère une application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(a) Montrer que ϕ est k-lipschitzienne si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|D\phi_x\| \leq k$.

(b) On suppose que ϕ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que l'application $\mathrm{Id} + \phi$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Df_x(h), h\rangle \geq \delta \|h\|^2$.

(a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(y) - f(x), y - x\rangle \geq \delta \|y - x\|^2$.

(b) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9.

(a) Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant une racine simple $x_0 \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe une application ϕ de classe C^∞ définie sur un voisinge U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall P \in U, \quad \forall x \in V, \qquad P(x) = 0 \quad \iff \quad x = \phi(P).$$

(b) En déduire que l'ensemble des polynômes réels scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 10. Etant donné un endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^n$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$f(x) = \langle u(x), x\rangle.$$

(a) Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.

(b) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in S$ tel que $f(x_0) = \max\limits_S f$.

(c) Montrer que x_0 est un vecteur propre de u.

(d) En déduire le théorème spectral : u est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 11.

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Montrer que l'application $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = {}^tMAM$ est différentiable et que sa différentielle au point I_n est surjective.

(b) En déduire que, si $n = p + q$, l'ensemble des matrices symétriques inversibles de signature (p, q) est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Prouver que le groupe orthogonal O_n est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.