

TD d'analyse 5 : exercices d'intégration

Exercice 1. Vrai ou faux ?

On note $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré quelconque. On munira toujours $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

- (a) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, alors $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$.
- (b) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- (c) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et intégrable. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (d) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telle que (f_n) tend vers 0 presque partout. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0$.
- (e) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers une fonction f et telle que la suite $(\|f_n\|_{L^p})$ est bornée pour un certain $p \geq 1$. Alors f définit un élément de L^p .

Exercice 2. Soient $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables. On considère l'espace produit $(E, \mathcal{B})$ avec $E = E_1 \times E_2$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. On pose

$$\mathcal{B}'_1 = \{B \times E_2 \mid B \in \mathcal{B}_1\}.$$

- (a) Montrer que $\mathcal{B}'_1$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}$.
- (b) Soit $F : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{B}$ -mesurable. Montrer que la fonction F est $\mathcal{B}'_1$ -mesurable si et seulement s'il existe une fonction mesurable $f : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x_1, x_2) = f(x_1)$.

Exercice 3. On se place sur $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne, et on considère deux mesures sur cette tribu : la mesure de Lebesgue λ et une mesure de probabilité μ .

Pour tout réel t , on note $\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(x)$.

- (a) Montrer que $\hat{\mu}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que, pour tout réel $T > 0$, on a $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{\mu}(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(Tx) d\mu(x)$,
où $\sigma(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\sigma(0) = 1$.
- (c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{\mu}(t) d\lambda(t)$.
- (d) Vérifier le résultat en traitant le cas où μ est la mesure de Dirac en 0.

Exercice 4. On se place dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, muni de sa mesure de Lebesgue λ_n , et on se propose de calculer le volume V_n de la boule unité.

- (a) Démontrer la formule $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.
- (b) Montrer que si f est une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > t\}) dt.$$

- (c) En déduire : $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = V_n \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}} dt$.
- (d) Montrer que $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$.

Exercice 5. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A est une matrice symétrique définie positive, alors $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$.

Exercice 6.

- (a) On suppose que f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que la convolution $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, vérifiant

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

et tendant vers 0 à l'infini.

Indication : $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

- (b) On suppose que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est bien défini comme élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- (c) On suppose que f est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est bien défini comme élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$

Indication : écrire $|f| = |f|^{\frac{1}{2}} |f|^{\frac{1}{2}}$ et se ramener au cas précédent.

Exercice 7. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit le noyau de la chaleur : $K_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$.

Etant donnée une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on considère la convolution $u(t, x) = (K_t * f)(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

- (a) Montrer que u vérifie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_{xx} u$.
- (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x)$ tend vers $f(x)$ quand t tend vers 0.
- (c) Montrer que la convergence est uniforme sur les compacts.