TD d'analyse 4 : topologie

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie non vide de X. Pour tout $x \in X$, on pose

$$d_A(x) = \inf\{d(a, x)/a \in A\}.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $A_n = \{x \in X/d_A(x) < 1/n\}$ est un ouvert de X.

(b) Qu'est-ce que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$?

Exercice 2. (Topologie et matrices)

(a) Montrer que $\mathcal{F} = \{A \in M_n(\mathbb{C})/A^2 = 0\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.

(c) Montrer que $\mathcal{D} = \{A \in M_n(\mathbb{C})/A \text{ est diagonalisable}\}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Est-ce un ouvert, un fermé de $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3. (Connexité dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

(a) Soit B une boule fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \backslash B$ est connexe.

(b) Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \backslash A$ est connexe par arcs.

Exercice 4. On s'intéresse au sous-ensemble $G = \{(x, \sin(1/x)) / x > 0\}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(a) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de G.

(b) Montrer que $\overline{G}$ est connexe.

(c) Montrer que $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5. Soit X un espace métrique compact. On se donne une suite de fermés non vides $F_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'elle est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{n+1} est inclus dans F_n.

(a) Montrer que $F = \bigcap_n F_n$ est un compact non vide.

(b) Soit W un ouvert contenant F. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, F_n est inclus dans W.

(c) Soient A et B deux compacts disjoints de X. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints A' et B' de X tels que A est inclus dans A' et B est inclus dans B'.

(d) Montrer que si les F_n sont connexes, alors F est connexe.

Exercice 6. Soit ℓ_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$, on pose

$$\|x\| = \sup_{k\geq 0} |x(k)|.$$

(a) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $x_n \in \ell_\infty$ par $x_n(k) = \dfrac{1}{k}$ si $1 \leq k \leq n$ et $x_n(k) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

(b) Montrer que ℓ_∞ est complet.

(c) Soit c_0 le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ_∞, puis que c_0 est complet.

(d) Soit c_{00} le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Exercice 7. Soient X un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application telle que l'une des composées f^k soit contractante ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 8. (Théorème de Volterra) Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $K(s,t) = 0$ si $0 \leq t < s \leq 1$. Etant donné un élément g de l'espace $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'application $T : X \to X$ définie par $T\,f = g - \displaystyle\int_0^1 K(s,.)f(s)ds$.

(a) Démontrer l'inégalité

$$|(T^k f_1)(x) - (T^k f_2)(x)| \leq \frac{M^k}{k!} x^k \|f_1 - f_2\|_\infty,$$

où $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_1, f_2 \in X$ et $M = \sup |K|$.

(b) En déduire que l'équation intégrale de *Volterra*

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t) + \int_0^1 K(s,t)f(s)ds = g(t),$$

admet une unique solution $f \in X$.

Exercice 9.

(a) Vérifier que l'on définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| = \sup_{[0,1]} |P|.$$

(b) Pour quels réels a la forme linéaire $\delta_a : P \mapsto P(a)$ est-elle continue pour cette norme ?

(c) Et si on remplace $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_d[X]$ pour un certain $d \in \mathbb{N}$?

Exercice 10.

(a) Soient X un espace vectoriel normé de dimension finie, A un fermé non vide de X et $x \in X$. Prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = d(x, a)$.

(b) On munit l'espace $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme définie par

$$\forall f \in X, \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \int_0^1 |f|.$$

Calculer $d_F(1)$, la distance entre le fermé $F = \{f \in X / f(0) = 0\}$ et la fonction constante à 1. Est-elle atteinte ?

Exercice 11. On munit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme et on pose, pour $f \in X$:

$$L(f) = \int_0^1 f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(a) Montrer que L et les L_n sont des formes linéaires continues sur X et calculer leurs normes.

(b) Montrer que, pour tout $f \in X$, $L_n(f)$ tend vers $L(f)$, alors que $\|L_n - L\| = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12. Soit une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 13. Soit X l'espace de Banach $C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme du sup. Soit K une application continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Vérifier que la formule

$$\forall f \in X, \quad \forall x \in [0,1], \quad u_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

définit une application linéaire continue u_K de X dans X.

(b) Notons B la boule unité fermée de X. Prouver que $\overline{u_K(B)}$ est un compact de X.