

TD 5. Courbures.

Exercice 1. La courbure des espaces modèles.

1. On se place sur la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique induite. Etant donné un point p de $\mathbb{S}^n$ et un vecteur unitaire v de $T_p\mathbb{S}^n$, on a vu que la géodésique émanant de p à vitesse v est donnée par la formule $\gamma(t) = \exp_p(tv) = \cos t p + \sin t v$.

a. Soit w un vecteur unitaire de $T_p\mathbb{S}^n$, orthogonal à v . Ecrire le champ de Jacobi $J(t)$ associé à la variation géodésique de γ définie par

$$\gamma_s(t) = \cos t p + \sin t (\cos s v + \sin s w)$$

et calculer $J'' = \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} J$.

b. A l'aide de l'équation de Jacobi, en déduire que la courbure sectionnelle de la sphère est constante à 1.

2. Montrer de même que l'espace euclidien est de courbure sectionnelle constante à 0 et que l'espace hyperbolique est de courbure sectionnelle constante à -1 .

Exercice 2. La courbure d'une métrique bi-invariante.

1. Soit (G, g) un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne bi-invariante.

a. Montrer que la courbure sectionnelle de (G, g) vérifie

$$\text{Sect}(X \wedge Y) = \frac{1}{4} |[X, Y]|_g^2,$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs invariants à gauche, unitaires et orthogonaux entre eux.

b. Calculer la courbure de Ricci.

2. En déduire que $SL(n, \mathbb{R})$ ne porte pas de métrique riemannienne bi-invariante.

Exercice 3. Seconde forme fondamentale.

Soit (M^{n+1}, g_M) une variété riemannienne et N^n une sous-variété, qu'on munit de la métrique induite g_N . On notera ∇^M et ∇^N les connexions de Levi-Civita en jeu. Supposons enfin qu'il existe un champ de vecteur unitaire normal ν le long de N : pour tout point x de N , ν_x est un vecteur unitaire de $T_x M$ qui est orthogonal à $T_x N$. La seconde forme fondamentale de N est définie, pour tous vecteurs u, v de $T_x N$ par la formule :

$$\mathbb{I}(u, v) = -g_M(\nabla_u^M \nu, v).$$

a. Montrer que si X et Y sont des champs de vecteurs sur M qui sont tangents à N le long de N , alors

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y + \mathbb{I}(X, Y)\nu$$

le long de N .

b. Montrer que la seconde forme fondamentale de N est un champ de formes bilinéaire symétriques sur TN .

c. Montrer que la seconde forme fondamentale de N est nulle si et seulement si toute géodésique tangente en un point à N est incluse dans N . Une telle sous-variété est dite totalement géodésique.

d. Montrer que l'application définie par

$$\psi(t, x) = \exp_x(t\nu)$$

établit un difféomorphisme entre un voisinage de $\{0\} \times N$ dans $\mathbb{R} \times N$ et un voisinage de N dans M . Vérifier qu'on obtient une famille de métriques riemanniennes g_t sur tout compact de N en posant $\psi_t = \psi(t, \cdot)$ et $g_t = \psi_t^* g$, pour t petit. Montrer que $\mathbb{I} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$.

e. A l'aide du d, interpréter géométriquement la courbure moyenne de N , définie par $H = \text{Tr}_{g_N} \mathbb{I}$.

f. Montrer que les courbures sectionnelles de M et N sont reliées par la formule

$$\text{Sect}_{g_M}(X \wedge Y) = \text{Sect}_{g_N}(X \wedge Y) + \mathbb{I}(X, Y)^2 - \mathbb{I}(X, X)\mathbb{I}(Y, Y),$$

où X et Y sont des vecteurs unitaires tangents à N et perpendiculaires entre eux.

g. Expliciter tout ça sur la sphère standard $\mathbb{S}^n$, vue dans $\mathbb{R}^{n+1}$.