

Examen de Géométrie différentielle

Durée : trois heures. Les documents de cours sont autorisés.

Questions.

1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Γ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Peut-on munir Γ d'une structure de variété différentielle?
2. Pouvez-vous donner un exemple de variété différentielle M telle que toute métrique riemannienne g sur M est complète?
3. Pouvez-vous donner un exemple de variété différentielle M qui possède une métrique riemannienne complète g_1 à courbure sectionnelle inférieure à -1 et aussi une métrique riemannienne complète g_2 à courbure sectionnelle nulle?
4. Pouvez-vous donner un exemple de variété différentielle M qui possède une métrique riemannienne complète g_1 à courbure sectionnelle inférieure à -1 et aussi une métrique riemannienne complète g_2 à courbure sectionnelle supérieure à $+27$?
5. Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension 1. Montrer que (M, g) est isométrique à $\mathbb{R}$ ou à un cercle de $\mathbb{R}^2$. (*indication : considérer une géodésique unitaire*)
6. Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. A toute géodésique c de (M, g) , on peut associer la courbe $\dot{c}$ dans TM , formée des vecteurs vitesse de c . Déterminer le champ de vecteur X sur TM dont ces courbes constituent le flot. On exprimera X en fonction de la projection $\pi : TM \rightarrow M$ et de la distribution horizontale H^∇ .

Exercice.

On s'intéresse à la sphère unité $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{R}^4$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, avec ses coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 peut s'identifier à $\mathbb{C}^2$, muni de ses coordonnées complexes $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. On considère les champs de vecteurs suivants, définis sur $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} iz_1 \\ iz_2 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_2 &= \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ X_3 &= \begin{pmatrix} -i\bar{z}_2 \\ i\bar{z}_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

e) Soit $p \in \mathbb{C}P^1$. Calculer la longueur du cercle $\pi^{-1}(\{p\})$ pour la métrique g_λ .

3. Soit ∇^λ la connexion de Levi-Civita de g_λ .

a) Soient i, j, k des éléments de $\{1, 2, 3\}$. Expliquer pourquoi on a la relation

$$g_\lambda(\nabla_{X_i}^\lambda X_j, X_k) = -g_\lambda(\nabla_{X_i}^\lambda X_k, X_j)$$

et pourquoi $g_\lambda(\nabla_{X_i}^\lambda X_j, X_k) = 0$ si deux des indices i, j et k sont égaux.

b) En utilisant ces remarques, calculer $\nabla^\lambda X_1$, $\nabla^\lambda X_2$ et $\nabla^\lambda X_3$.

c) En déduire que les flots de X_1 , X_2 et X_3 sont constitués de géodésiques. Vers quoi tend le rayon d'injectivité de $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$ quand λ tend vers zéro ?

d) Calculer, en tout point de $\mathbb{S}^3$, la courbure sectionnelle du plan $\text{Vect}(X_1, X_2)$ engendré par X_1 et X_2 , relativement à la métrique g_λ , puis celle du plan $\text{Vect}(X_2, X_3)$. En déduire les valeurs prises par toutes les courbures sectionnelles de $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$.

4. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Etant donné un nombre strictement positif ϵ , on dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est une ϵ -approximation si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $d_Y(f(x), y) \leq \epsilon$;
- pour tous $x, x' \in X$, $|d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| \leq \epsilon$.

Noter qu'on ne demande même pas à f d'être continue.

On définit la distance de Gromov-Hausdorff $d_{GH}(X, Y)$ entre X et Y comme l'infimum des $\epsilon > 0$ tels qu'il existe une ϵ -approximation $f_1 : X \rightarrow Y$ et une ϵ -approximation $f_2 : Y \rightarrow X$.

a) Soit (M, g) une variété riemannienne connexe compacte de diamètre inférieur à D ; c'est en particulier un espace métrique compact, pour la distance riemannienne. Soit P l'espace métrique constitué d'un seul point. Montrer que

$$d_{GH}((M, g), P) \leq D.$$

On veut maintenant évaluer la distance de Gromov-Hausdorff entre une sphère de Berger et l'espace projectif $\mathbb{CP}^1$.

b) Soit $x \in \mathbb{S}^3$. Soit $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{CP}^1$ une courbe lisse telle que $\gamma(0) = \pi(x)$. Montrer qu'il existe une unique courbe $\hat{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{S}^3$ telle que $\hat{\gamma}(0) = x$, $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ et, pour tout $t \in [0, L]$, $\frac{d\hat{\gamma}(t)}{dt} \in H_{\hat{\gamma}(t)}$ (la distribution H est définie en 1.c). Exprimer la longueur de $\hat{\gamma}$ par rapport à la métrique g_λ en fonction de la longueur de γ .

c) Montrer que $\pi : (\mathbb{S}^3, g_\lambda) \rightarrow (\mathbb{CP}^1, g_{\mathbb{CP}^1})$ est une $\pi\lambda$ -approximation.

d) Montrer que $d_{GH}((\mathbb{S}^3, g_\lambda), (\mathbb{CP}^1, g_{\mathbb{CP}^1}))$ tend vers zéro quand λ tend vers zéro.

Autrement dit, les sphères $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$ convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers $\mathbb{CP}^1$, qui n'est autre que la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ de rayon $1/2$. Comme la limite, $\mathbb{CP}^1$, est de dimension strictement plus petite que $\mathbb{S}^3$, on dit que les sphères de Berger s'effondrent sur l'espace projectif $\mathbb{CP}^1$.