U P M C - Paris 6 **Master 2 de Mathématiques fondamentales**
Mathématiques **27 octobre 2011**

Examen de Géométrie différentielle

Durée : trois heures. Les documents de cours sont autorisés.

Problème 1.

1. *On se place dans l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *des matrices réelles à* 3 *lignes et* 3 *colonnes et on s'intéresse à*

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

a. Montrer que $\mathcal{H}$ est une sous-variété de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Soit I la matrice identité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en I est donné par

$$T_I\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c. Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ l'exponentielle matricielle de A. Montrer que si $V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $T_I\mathcal{H}$, alors

$$e^V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_3 + \frac{v_1 v_2}{2} \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, c'est un élément de $\mathcal{H}$.

2. *On peut identifier $\mathcal{H}$ à $\mathbb{R}^3$ par la carte $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^3$ qui à* $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ *associe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On notera ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, ∂_{x_3} les champs de vecteurs associés à ces coordonnées. On introduit aussi les champs de vecteurs suivants sur $\mathcal{H}$:*

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}, \quad X_3 = \partial_{x_3}.$$

a. Montrer que (X_1, X_2, X_3) fournit une trivialisation globale du fibré tangent $T\mathcal{H}$.

b. Montrer que les crochets de Lie de ces champs de vecteurs vérifient :

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = [X_3, X_1] = 0.$$

c. Soit g la métrique riemannienne sur $\mathcal{H}$ telle que (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée en tout point de $\mathcal{H}$ et soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée. Montrer que :
– $\nabla_{X_i} X_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$;
– $\nabla_{X_1} X_2 = -\nabla_{X_2} X_1 = \dfrac{X_3}{2}$;
– $\nabla_{X_2} X_3 = \nabla_{X_3} X_2 = \dfrac{X_1}{2}$;
– $\nabla_{X_3} X_1 = \nabla_{X_1} X_3 = -\dfrac{X_2}{2}$.

d. Montrer qu'une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ est une géodésique si et seulement si $\phi \circ c = (c_1, c_2, c_3)$ vérifie le système

$$\begin{cases} c_1'' + c_2'(c_3' - c_1 c_2') = 0 \\ c_2'' - c_1'(c_3' - c_1 c_2') = 0 \\ (c_3' - c_1 c_2')' = 0 \end{cases}$$

e. Etant donné $V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_I\mathcal{H}$, on s'intéresse à la géodésique $c : t \mapsto \exp_I(tV)$, partant de I avec vecteur vitesse V.
– Montrer que si $v_3 = 0$, alors $c(t) = e^{tV}$.
– Montrer que si $v_3 \neq 0$, alors $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ décrit un cercle dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Problème 2.

1. *Préliminaires. On se place sur une variété M munie d'une métrique riemannienne $g = <,>$ et de la connexion de Levi-Civita associée ∇. On définit l'énergie d'une courbe lisse $c : [0,1] \to M$ par :*

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 < \dot{c}(t), \dot{c}(t) > dt.$$

On notera aussi $L(c) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{< \dot{c}(t), \dot{c}(t) >} dt$ la longueur de c.

a. Montrer que pour toute courbe $c : [0,1] \to M$, on a

$$\frac{1}{2} L(c)^2 \leq E(c).$$

Vérifier qu'il y a égalité si c est paramétrée à vitesse constante.

b. On se donne maintenant une famille lisse de courbes $c : [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ et on pose $c_s(t) := c(s,t)$ pour $t \in [0,1]$ et $s \in \mathbb{R}$. Prouver la formule :

$$\frac{d}{ds} E(c_s) = \int_0^1 < \nabla_{\partial_t c} \partial_s c, \partial_t c > dt.$$

c. Notons maintenant $T = \partial_t c$ et $N = \partial_s c$. Prouver la formule :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} E(c_s) &= \int_0^1 (< \nabla_T N, \nabla_T N > - < \nabla_N N, \nabla_T T > + < \mathrm{Rm}(N,T)N, T >) \, dt \\ &\quad + < \nabla_N N, T > |_{t=1} - < \nabla_N N, T > |_{t=0}. \end{aligned}$$

2. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension n paire, orientée et de courbure sectionnelle strictement positive. On notera d la distance riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita. Soit φ une isométrie de (M,g) qui préserve l'orientation. On va démontrer que φ possède un point fixe.*

a. Soit $F : M \to M$ l'application qui à un point p de M associe $F(p) = d(p, \varphi(p))$. Montrer que F atteint un minimum en un point p_0 de M.

b. Montrer qu'il existe une géodésique minimisante $c_0 : [0,1] \to M$ reliant p_0 à $\varphi(p_0)$.

c. Soit m_0 le milieu de c_0 : $m_0 = c_0(\frac{1}{2})$. Montrer que le chemin obtenu en suivant c_0 de m_0 à $c_0(1) = \varphi(p_0)$, puis $\varphi \circ c_0$ de $\varphi(p_0)$ à $\varphi(m_0)$ est minimisant. En déduire que $d_{p_0}\varphi(\dot{c}_0(0)) = \dot{c}_0(1)$.

d. Soit $P : T_{p_0}M \to T_{\varphi(p_0)}M$ le transport parallèle le long de c_0. On considère l'endomorphisme $A = P^{-1} \circ d_{p_0}\varphi$ de $T_{p_0}M$. Montrer qu'il existe un élément v de $T_{p_0}M$ tel que $Av = v$ et $g_{p_0}(v, \dot{c}_0(0)) = 0$.

e. On étend v par transport parallèle en un champ de vecteurs X le long de c_0 : pour t dans $[0, 1]$, $X(t) \in T_{c_0(t)}M$ et $\nabla_{\dot{c}_0}X = 0$. On définit alors pour $t \in [0, 1]$ et s réel :

$$c_s(t) = c(s, t) = \exp_{c_0(t)} sX(t).$$

Montrer que, si $\varphi(p_0) \neq p_0$, alors

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} E(c_s) < 0.$$

f. En déduire que φ admet un point fixe.

3. *Application.* Démontrer le théorème de Synge : une variété compacte, orientable, de dimension paire et portant une métrique à courbure sectionnelle strictement positive est nécessairement simplement connexe. Indication : passer au revêtement universel.