U P M C - Paris 6 **Master 2 de Mathématiques fondamentales**
Mathématiques **27 octobre 2010**

Examen de Géométrie différentielle

Durée : trois heures. Les documents de cours sont autorisés.

Brèves.

1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Γ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Peut-on munir l'espace topologique Γ d'une structure de variété différentielle ?

2. Notons x, y et z les coordonnées de $\mathbb{R}^3$.

a) Existe-t-il un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi^* dy = dz + \cos y\, dx$?

b) On considère les distributions de plans

$$D_1 = \mathrm{Ker}(dz - ydx) \quad \text{et} \quad D_2 = \mathrm{Vect}\,(e^z \partial_x, \partial_y + x\partial_x)\,.$$

Existe-t-il un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ échangeant D_1 et D_2 (i.e. $v \in D_1 \Leftrightarrow d\phi(v) \in D_2$) ?

3. Pourquoi une fonction harmonique sur une variété riemannienne compacte connexe est-elle nécessairement constante ?

4. Pourquoi les isométries de $\mathbb{R}^n$, muni de sa métrique riemannienne usuelle, sont-elles des transformations affines ?

5. Sur la variété $S^2 \times S^1$, existe-t-il une métrique riemannienne complète à courbure sectionnelle partout nulle ? Partout strictement positive ? Partout strictement négative ?

6. Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Soit π la projection $TM \to M$. Etant donné v dans TM, on note X_v l'unique élément de $T_v(TM)$ qui appartient à la distribution horizontale de ∇ et tel que $d_v\pi(X_v) = v$. Décrire le flot de ce champ de vecteurs X sur TM.

Exercice 1.

On se place sur le plan $\mathbb{R}^2$*, muni de ses coordonnées polaires* (r, θ)*, et on considère une métrique riemannienne* g *s'écrivant en coordonnées polaires sous la forme*

$$g = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2,$$

où f *désigne une fonction lisse strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$*, avec* $f(r) = r + O(r^2)$ *quand* $r \to 0$.

1. Exprimer la courbure sectionnelle en fonction de f.

2. Tester votre formule sur les exemples du plan euclidien et du plan hyperbolique.

3. Exprimer le volume $\operatorname{vol} B_R$ d'une boule $B_R = \{r \leq R\}$ en fonction de f.

4. Déduire de 2. et 4. que si la courbure de $(\mathbb{R}^2, g)$ est positive, alors pour tout $R \geq 0$, on a

$$\operatorname{vol} B_R \leq \pi R^2.$$

Exercice 2.

On considère une variété connexe et simplement connexe M*, munie d'une métrique riemannienne* g*, complète et de courbure négative. Etant donné un point* p *de* M*, on note* $d_p(x) = d(p, x)$ *la distance riemannienne de* p *à un point* x.

1. Expliquer pourquoi la fonction d_p est lisse sur $M \backslash \{p\}$. Géométriquement, qu'est-ce que son gradient ? Son hessien ?

2. Montrer que la fonction $\rho_p : x \mapsto \dfrac{d(p,x)^2}{2}$ est lisse sur M et que son hessien vérifie $\operatorname{Hess} \rho_p \geq id$.

3. Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est une géodésique unitaire, alors pour tout temps t,

$$(\rho_p \circ \gamma)''(t) \geq 1.$$

En géométrie euclidienne, les longueurs a*,* b*,* c *des côtés d'un triangle vérifient la formule d'Al-Kashi*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

où α *est l'angle opposé au côté de longueur* a*. On va montrer que cette égalité devient une inégalité en courbure négative.*

4. Pourquoi y a-t-il une unique géodésique unitaire γ_{AB} reliant un point A de M à un autre point B ?

Etant donnés trois points distincts A*,* B*,* C*, on considère le triangle formé des géodésiques* γ_{AB}*,* γ_{BC} *et* γ_{CA}*. On note* $a = d(B, C)$*,* $b = d(C, A)$*,* $c = d(A, B)$ *et* α *l'angle formé par les vecteurs* $\dot{\gamma}_{AB}$ *et* $\dot{\gamma}_{AC}$ *au point* a.

5. Démontrer l'inégalité

$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Exercice 3.

Soit θ un nombre réel. On considère la variété riemannienne (M_θ, g_θ) obtenue comme quotient de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par l'action suivante de $\mathbb{Z}$: $n \cdot (t, x) = (t+n, e^{in\theta}x)$ pour tous $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$. On note π_θ la projection $\mathbb{R}^3 \to M_\theta$.

1. Pourquoi le quotient M_θ hérite-t-il d'une structure de variété ? Pourquoi hérite-t-il d'une métrique g_θ ? Quelle est la courbure de g_θ ?

2. Montrer que M_θ est toujours difféomorphe à $M_0 = S^1 \times \mathbb{R}^2$.

3. Quand les variétés riemanniennes (M_θ, g_θ) et $(M_{\theta'}, g_{\theta'})$ sont-elles isométriques ? (Indication : holonomie !)

4. Montrer que le rayon d'injectivité en un point $\pi_\theta(t, x)$ de (M_θ, g_θ) est donné par la formule

$$\mathrm{inj}(\pi_\theta(t, x)) = \frac{1}{2} \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \sqrt{k^2 + 4|x|^2 \sin^2(k\theta/2)}.$$

5. Montrer que le rayon d'injectivité de (M_θ, g_θ) est borné si et seulement si θ/π est rationnel.

6. Montrer que si θ/π est rationnel, alors il existe une constante C telle que pour tout point p dans M_θ, pour tout $r \geq 1$, le volume de la boule $B_{g_\theta}(p, r)$ vérifie

$$\mathrm{vol}\, B_{g_\theta}(p, r) \leq Cr^2.$$

7. Montrer que si θ/π est irrationnel, alors pour tout réel C, il existe un point p dans M_θ et un rayon $r \geq 1$ tel que

$$\mathrm{vol}\, B_{g_\theta}(p, r) \geq Cr^2.$$