

Feuille de TD 2 : suites

Exercice 1. Etudier la convergence des suites définies par les formules suivantes.

(a) $a_n = 1 + \frac{e^{in^2}}{n+3}$.

(b) $b_n = (1+i)^n$.

(c) $c_n = \frac{3n-3}{2n+3}$.

(d) $d_n = \frac{n + \sqrt{n^2+1}}{n - \sqrt{n^2+1}}$.

(e) $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite complexe. Ecrire les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs.

(a) (u_n) admet une limite réelle.

(b) (u_n) n'est pas bornée.

(c) (u_n) n'est pas convergente.

(d) (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}^*$.

(a) Prouver qu'il existe $m > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \geq m$.

(b) Prouver que $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite convergente de nombres entiers. Démontrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Démontrer les estimations suivantes, quand $n \rightarrow +\infty$.

(a) $4(n+1)^3 - 2n^2 + n \cos n = O(n^3)$.

(b) $\frac{7n^2 - 15n}{n-3} \sim 7n$.

(c) $\sin(1/n) \sim 1/n$.

(d) $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} = O(1/n^2)$.

(e) $n^a = o(r^n)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $r > 1$.

(f) $z^n = o(n!)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(g) $n! = o(n^n)$.

Exercice 6. (Somme télescopique) Pour tout $n > 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

- (a) Vérifier que (S_n) est croissante.
- (b) Exploiter l'identité $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour montrer que (T_n) est convergente.
- (c) En déduire que (S_n) est convergente.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

- (a) Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- (b) En déduire qu'elles convergent vers une même limite $e \in]2, 3[$.
- (c) Prouver que e est un nombre irrationnel.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

- (a) Extraire de (u_n) une sous-suite tendant vers $+\infty$.
- (b) Extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Exercice 9.

- (a) Montrer que la suite $(\sin n)$ est divergente.
Indication : $\sin(n \pm 1)$.
- (b) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers a_n telle que la suite $(\sin a_n)$ converge.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite complexe. Prouver que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ .

Exercice 11. Soit (u_n) une suite complexe bornée et divergente.

- (a) Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ .
- (b) Prouver qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\phi(n)} - \ell| \geq \epsilon.$$

- (c) Prouver que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ' différent de ℓ .

Exercice 12. (Moyenne de Cesaro) Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la suite (μ_n) obtenue en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout indice $n > N$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - \ell| \leq \epsilon.$$

(b) Prouver qu'il existe un entier $N' \geq N$ tel que pour tout indice $n > N'$:

$$|\mu_n - \ell| \leq 2\epsilon.$$

(c) Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 13. On dit qu'une suite complexe (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

- (a) Prouver que toute suite convergente est de Cauchy.
- (b) Prouver que toute suite de Cauchy est bornée.
- (c) Prouver que toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente.
- (d) Prouver que toute suite de Cauchy est convergente.

Exercice 14. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note

$$s_N = \sup\{u_k \mid k \geq N\} \quad \text{et} \quad i_N = \inf\{u_k \mid k \geq N\}.$$

(a) Vérifier que (s_N) et (i_N) sont des suites monotones, puis convergentes.

On peut donc définir :

$$\limsup(u_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} s_N \quad \text{et} \quad \liminf(u_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} i_N.$$

(b) Calculer $\limsup \left((-1)^n e^{1/n} \right)$ et $\liminf \left((-1)^n e^{1/n} \right)$.

(c) Prouver que la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = \ell.$$