

Rattrapage d'analyse complexe (3M266) Juin 2017.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.

Durée : 2 heures.

Exercice 1.

- (a) Décrire les trois types de singularités isolées.
- (b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Quelle est la nature de la singularité de f en 0 ?
- (c) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $g(z) = \exp(1/z)$. Quelle est la nature de la singularité de g en 0 ?
- (d) Soit h une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}^*$. On suppose que h est bornée. Montrer que h est constante.

Exercice 2.

- (a) Soit φ une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On identifie la variable complexe $z = x + iy$ au couple de variables réelles (x, y) , de sorte que φ peut être vue comme une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
 - (i) Expliquer pourquoi la différentielle de φ en un point est la composée d'une rotation et d'une homothétie.
 - (ii) En déduire que le déterminant jacobien de l'application φ au point z vaut $|\varphi'(z)|^2$.
- (b) Vérifier que la formule

$$\varphi(z) = \frac{2z - i}{iz + 2}$$

définit un automorphisme du disque $D(0, 1)$.

- (c) En déduire la valeur de l'intégrale double

$$I = \int \int_{D(0,1)} \frac{dx dy}{(x^2 + (y - 2)^2)^2}.$$

Indication : on calculera l'aire du disque de deux façons, via un changement de variables adéquat.

Exercice 3. On s'intéresse à l'intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{t^2 + z} dt,$$

où z est un paramètre complexe pris dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

- (a) Montrer que F est holomorphe sur l'ouvert Ω .

Indication : étant donné des réels $R > 0$ et $\epsilon > 0$, on pourra successivement montrer que F est holomorphe sur les ouverts $U = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > \epsilon\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im}(z)| > \epsilon, |\operatorname{Re}(z)| < R\}$.

- (b) Prouver que $\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt = 0$.

- (c) Soit un réel $p > 0$. En utilisant le changement de variable $t = s\sqrt{p}$, exprimer $F(p)$ en fonction de $F(1)$ et p .

- (d) Soit $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. On note $\log$ la détermination continue du logarithme sur Ω' dont la partie imaginaire est donnée par l'argument pris dans $]0, 2\pi[$. Et on considère

$$\phi(z) = \frac{(\log z)^3}{z^2 + 1}.$$

Montrer que ϕ est méromorphe sur Ω' ; déterminer ses pôles et les résidus correspondants.

- (e) Etant donné $r > 0$, on considère le chemin $\sigma_r :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$ paramétré par $\sigma_r(t) = re^{it}$. Calculer la limite de $\int_{\sigma_r} \phi(z) dz$ quand r tend vers 0, puis quand r tend vers $+\infty$.
- (f) Etant donné $\epsilon > 0$ et $T > 0$, on considère les chemins $\gamma_\pm : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ définis par $\gamma_\pm(t) = t \pm i\epsilon$. Si on fixe $t \in]0, T]$, quelle est la limite de $\phi \circ \gamma_\pm(t)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$?
- (g) Evaluer, en fonction de $F(1)$, la limite, quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $T \rightarrow +\infty$, de

$$\int_{\gamma_+} \phi(z) dz - \int_{\gamma_-} \phi(z) dz.$$

- (h) En déduire $F(1)$, puis $F(p)$ pour $p > 0$.

- (i) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{(t^2 + 1)^2} dt$.

- (j) Calculer $F(z)$ pour tout $z \in \Omega$. Combien vaut $F(i)$?