Rattrapage d'analyse complexe (3M266) Juin 2016.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.

Durée : 2 heures.

Exercice 1.

- (a) (i) Donner la définition d'une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$.
(ii) Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle en π .
- (b) Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.
- (i) Que vaut $\int_{\gamma} (\cos z)^5 dz$?
- (ii) Que vaut $\int_{\gamma} \frac{(\cos z)^5}{z} dz$?
- (iii) Que vaut $\int_{\gamma} \frac{(\cos z)^5}{z^2} dz$?
- (c) (i) Énoncer les inégalités de Cauchy.
(ii) Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $c \geq 0$ tels que
- $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq c(1 + |z|^k).$$
- Montrer que f est un polynôme.
- (d) (i) Énoncer le principe du maximum.
(ii) Calculer le maximum de $\left| \frac{2z + i}{2 - iz} \right|$ sur le disque $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$.
- (e) (i) Énoncer le théorème de Rouché.
(ii) Montrer que les racines complexes du polynôme $5z^5 - 2z^2 + z + 1$ sont toutes de module inférieur à 1.

Exercice 2. On s'intéresse à l'intégrale

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tz)}{\sinh(t)} dt,$$

où z est un paramètre complexe et où on utilise les formules usuelles :

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i}.$$

A. Sur la droite réelle.

- (a) Justifier l'existence de $F(a)$, pour tout a dans $\mathbb{R}$.

(b) Fixons des réels ε et R tels que $0 < \varepsilon < R$ et $\varepsilon < \pi$. Afin d'étudier l'intégrale ci-dessus, on introduit les huit chemins suivants :

- $\gamma_1(t) = t$, pour t décrivant l'intervalle $[-R, -\varepsilon]$,
- $\tilde{\gamma}_1(t) = t$, pour t décrivant l'intervalle $[\varepsilon, R]$,
- $\gamma_2(t) = 2i\pi + t$, pour t décrivant l'intervalle $[-R, -\varepsilon]$,
- $\tilde{\gamma}_2(t) = 2i\pi + t$, pour t décrivant l'intervalle $[\varepsilon, R]$,
- $\gamma_3(t) = \varepsilon e^{it}$, pour t décrivant l'intervalle $[0, \pi]$,
- $\tilde{\gamma}_3(t) = 2i\pi + \varepsilon e^{it}$, pour t décrivant l'intervalle $[-\pi, 0]$,
- $\gamma_4(t) = R + it$, pour t décrivant l'intervalle $[0, 2\pi]$,
- $\tilde{\gamma}_4(t) = -R + it$, pour t décrivant l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Sur le même dessin, représenter graphiquement l'image de ces huit chemins, en précisant le sens de parcours de chacun d'eux.

(c) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on introduit la fonction $f_a : z \mapsto \frac{e^{iaz}}{\sinh(z)}$, ainsi que

$$I_k = \int_{\gamma_k} f_a(z) dz, \quad \tilde{I}_k = \int_{\tilde{\gamma}_k} f_a(z) dz, \quad \text{pour } k = 1, \dots, 4.$$

Exprimer, en fonction de $F(a)$, les limites, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, de $I_1 + \tilde{I}_1$ et $I_2 + \tilde{I}_2$.

(d) (i) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{z}{\sinh(z)}$ définit une fonction holomorphe bornée sur le disque $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

(ii) En déduire que, si $-\pi \leq T_1 < T_2 \leq \pi$, $\int_{T_1}^{T_2} f_a(re^{it})re^{it} dt$ converge, quand $r \rightarrow 0$, vers $T_2 - T_1$.

(iii) Déterminer les limites, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, de I_3 et $\tilde{I}_3$.

(e) Montrer que I_4 et $\tilde{I}_4$ tendent vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

(f) Calculer le résidu de f_a au point $i\pi$.

(g) Montrer que, pour tout réel a , $F(a) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi a} - 1}{e^{\pi a} + 1}$.

B. Ailleurs.

(a) Montrer que la formule $F(z) = \int_0^\infty \frac{\sin(tz)}{\sinh(t)} dt$ définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$.

(b) Exprimer la dérivée de F sous la forme d'une intégrale.

(c) En déduire la valeur de $J = \int_0^\infty \frac{t}{\sinh(t)} dt$.

(d) Montrer que F se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)i/k \in \mathbb{Z}\}$. On donnera une formule explicite pour ce prolongement.

(e) Calculer la valeur de $K = \int_0^\infty \frac{dt}{\cosh(t)}$, où $\cosh$ désigne la fonction cosinus hyperbolique. *Indication : on pourra observer que $\sinh(t) = 2 \sinh(t/2) \cosh(t/2)$.*