Seconde session d'analyse complexe (3M266)
Juin 2018.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.
Durée : 2 heures.

Exercice 1. On veut calculer $I = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2+\sin\theta}d\theta$.

(a) Vérifier que le nombre I est bien défini et vaut $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_C \frac{z^2-1}{(z^2+4iz-1)z}dz$, où C désigne le cercle unité paramétré dans le sens direct.

(b) En déduire que $I = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 2. Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour un certain $A > 0$ l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \le e^{-A|t|}.$$

(a) Démontrer que la formule $F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{izt}dt$ définit une fonction holomorphe F sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mathbin{/} |\mathrm{Im}(z)| < A\}$.

(b) Donner, en la justifiant, une formule pour les dérivées $F^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) On suppose de plus que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que F est nulle sur Ω.

Exercice 3. On note D le disque unité ouvert et C le cercle unité.

(a) Soit une fonction continue $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, holomorphe et ne s'annulant pas sur D, de module constant égal à 1 sur C. Déterminer le maximum et le minimum de $|f|$ sur $\overline{D}$, puis prouver que f est constante.

(b) Soit une fonction continue $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur D, de partie réelle nulle sur C. Démontrer que g est constante en utilisant la première question.

Exercice 4. Notons Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et $\Omega^* = \Omega \backslash \{0\}$. On considère une fonction holomorphe $f : \Omega^* \to \mathbb{C}$ et on pose $F = e^f$.

(a) Dans cette question, on suppose que f a une singularité essentielle en 0.

  (i) Soit A une partie quelconque de $\mathbb{C}$. Prouver que l'adhérence $\overline{A}$ de A vérifie : $\exp(\overline{A}) \subset \overline{\exp(A)}$.

  (ii) En déduire que F admet une singularité essentielle en 0.

(b) Dans cette question, on suppose que f a un pôle en 0.

  (i) Prouver l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et d'un nombre $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) \sim \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k$ quand $z \to 0$.

  (ii) Trouver des suites complexes (z_n) et (w_n) qui tendent vers 0 et vérifient $f(z_n) \sim n^k$ et $f(w_n) \sim -n^k$ quand n tend vers $+\infty$.

  (iii) En déduire que F admet une singularité essentielle en 0.

(c) Dans cette question, on suppose à nouveau que f a un pôle en 0 et on veut obtenir la nature de la singularité de F par un argument *différent*.

  (i) Prouver l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$, d'un réel $r > 0$ et d'une fonction h holomorphe sur $D(0,r)$ tels que
$$\forall z \in D(0,r)\backslash\{0\}, \quad z^k f(z) = e^{h(z)}.$$

  (ii) Pour $z \in D(0,r)$, on pose $\phi(z) = ze^{-\frac{h(z)}{k}}$. Démontrer que, pour s assez petit, ϕ est un biholomorphisme de $D(0,s)$ sur $\phi(D(0,s))$.

  (iii) Après avoir vérifié que la fonction $p : z \mapsto e^{\frac{1}{z^k}}$ admet une singularité essentielle en 0, déduire de (i) et (ii) que F admet une singularité essentielle en 0.