

TD7. Résidus.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. On suppose que la partie réelle de f est positive en tout point. Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$.

Exercice 2. Montrer que $f : z \mapsto \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ admet des développements en série de Laurent dans les anneaux $A(0; 0, 1)$, $A(0; 1, 2)$ et $A(0; 2, +\infty)$. Les calculer.

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier les singularités et calculer les résidus.

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}.$

(b) $g(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}.$

(c) $h(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}.$

Exercice 4.

(a) Montrer que $\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4} = 0$ (on pourra déformer le cercle vers l'infini).

(b) Calculer de même $\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz.$

Exercice 5.

(a) Etudier les singularités de $z \mapsto \frac{1}{z^n(e^z-1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer $I_n = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z-1)}$ pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 6. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$. Méthode : exprimer $\sin t$ en fonction de e^{it} afin de faire apparaître l'intégrale d'une fraction rationnelle sur un cercle.

Exercice 7.

- (a) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R = \{z \in D(0, R) / \operatorname{Im}(z) > 0\}$. On paramètre positivement son bord $\partial\Omega_R$. Calculer $\int_{\partial\Omega_R} \frac{e^{iz} dz}{1+z^2}$.
- (b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Exercice 8.

- (a) Montrer que $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ définit une fonction entière.
- (b) On paramètre la moitié inférieure du cercle unité par $\sigma(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq 0$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\sigma} \frac{\sin z}{z} dz.$$

- (c) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R^+ = \{z \in D(0, R) / \operatorname{Im}(z) > 0\} \cup D(0, 1)$. On paramètre positivement son bord $\partial\Omega_R^+$. Calculer $\int_{\partial\Omega_R^+} \frac{e^{iz} dz}{z}$.
- (d) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R^- = D(0, R) \setminus \overline{\Omega_R^+}$. On paramètre négativement son bord $\partial\Omega_R^-$. Calculer $\int_{\partial\Omega_R^-} \frac{e^{-iz} dz}{z}$.
- (e) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $e^z = 3z^n$ admet exactement n solutions dans $D(0, 1)$.

Exercice 10. On rappelle que la fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, on dispose d'une formule :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Le prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ repose sur l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

- (a) Montrer que Γ admet un pôle simple en chaque entier négatif et calculer le résidu correspondant.
- (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\Gamma(1/k)\Gamma(1-1/k) = k \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^k}.$$

- (c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^k} = \frac{\pi}{k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}.$$

Indication : on pourra utiliser le chemin bordant $\Omega_R = \{z \in D(0, R) / 0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi/k\}$.

- (d) En déduire la formule des compléments :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$