

TD3. Logarithme. Intégrales sur des chemins.

On notera ici Log et $\sqrt{\cdot}$ les déterminations principales du logarithme et de la racine carrée.

Exercice 1. Soient $j = e^{2i\pi/3}$ et $T = \{tj^k/t \in]-\infty, 1], k = 0, 1, 2\}$.

- (a) Montrer que la formule $f(z) = \text{Log}(\sqrt{z^3 - 1})$ définit bien une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus T)$.
- (b) Calculer $f(i)$.

Exercice 2.

- (a) A-t-on $\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $ab \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$?
- (b) A-t-on $\text{Log}(1/z) = -\text{Log}(z)$ pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$?
- (c) Etant donné un nombre réel α , on note D_α la demi-droite $\{re^{i(\pi-\alpha)}/r \geq 0\}$ et $L_\alpha : z \mapsto \text{Log}(e^{i\alpha}z) - i\alpha$. Montrer que c'est une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$.
- (d) Exprimer les déterminations continues du logarithme sur le disque $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}^*$ sous forme de séries entières (en $z - z_0$).

Exercice 3. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |\text{Re}(z)| < 1\}$. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions $f \in \mathcal{O}(U)$ telles que, pour tout $z \in U$, $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer, sans calcul, que $\ln|f|$ est une fonction harmonique sur l'ouvert $\Omega' = \{z \in \Omega / f(z) \neq 0\}$.

Exercice 5.

- (a) Montrer que la fonction $\tan = \sin / \cos$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus A$, où $A = \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$.
- (b) Soient $B = \{it/t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$ et $U = \mathbb{C} \setminus B$. Montrer que la formule

$$\varphi(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

définit un biholomorphisme φ entre U et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Calculer sa réciproque.

- (c) Montrer que la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

vérifie $\tan \circ f = id_U$. En déduire que f est une extension holomorphe de la fonction arctangente usuellement définie sur $\mathbb{R}$.

- (d) Expliquer le rayon de convergence de la série de Taylor de la fonction arctangente en 0.

Exercice 6. Soit γ le chemin $t \mapsto e^{it}$, où t décrit $[0, \pi/2]$. Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

Exercice 7. On considère une fonction continue $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$. Montrer que si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en 0, alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\partial D(0, r)} f(z) dz = 0.$$

Exercice 8. Pour tout réel strictement positif A , on note γ_A le bord (orienté positivement) du triangle défini par les points 0, A , $A(1 + i)$.

(a) Calculer $\int_{\gamma_A} e^{-z^2} dz$.

(b) En faisant tendre A vers $+\infty$, en déduire l'existence et la valeur des intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière bornée (on va prouver que f est forcément constante : c'est le théorème de Liouville).

(a) On se donne deux nombres complexes distincts a et b et on choisit un réel $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer $I(R) = \int_{\partial D(0, R)} \frac{f(z) dz}{(z - a)(z - b)}$ (*indication : éléments simples*).

(b) En faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que f est constante.