

TD4. Formule de Cauchy et conséquences.

Exercice 1. Calculer les intégrales :

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \text{et} \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

- (a) Soit f une fonction continue sur Ω , holomorphe sur $\Omega \setminus \mathbb{R}$. Montrer que f est holomorphe sur Ω .
- (b) On suppose maintenant que Ω est symétrique par rapport à l'axe des réels et on note $\Omega_+ = \{z \in \Omega / \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Soit une fonction f continue sur $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$, holomorphe sur Ω_+ , réelle sur $\Omega \cap \mathbb{R}$. Montrer que f admet une unique extension holomorphe à Ω .

Exercice 4. On note Log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On définit une fonction f sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z)}{1 - z} \text{ si } z \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = -1.$$

- (a) Montrer que f est holomorphe.
- (b) Pour $\epsilon \in]0, 1[$, on note $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| \leq 1, |z| \geq \epsilon\}$. Soit γ_ϵ un paramétrage de ∂D_ϵ , dans le sens direct. Calculer $\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz$.
- (c) En déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta$.

Exercice 5. Soit f une fonction entière.

- (a) On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z + 1) = f(z + i) = f(z)$. Montrer que f est constante.
- (b) On suppose que la partie réelle de f est bornée. Montrer que f est constante.
- (c) On suppose qu'il existe une constante C et un entier positif p telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^p$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus p .

Exercice 6.

- (a) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$, non constante, continue sur $\overline{D(0, 1)}$ et qui est de module constant sur $\partial D(0, 1)$. Montrer que f s'annule sur $D(0, 1)$.
- (b) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$, continue sur $\overline{D(0, 1)}$ et dont la partie réelle est constante sur $\partial D(0, 1)$. Montrer que f est constante.

Exercice 7. On travaille sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$, continue et bornée sur l'adhérence $\overline{\mathbb{H}}$ de $\mathbb{H}$. On note M le supremum de $|f|$ sur $\partial\mathbb{H}$. On veut montrer que f est bornée par M sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

- (a) Montrer que si f tend vers 0 à l'infini, alors f est bornée par M sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.
- (b) Dans le cas général, considérer la fonction $g : z \mapsto \frac{f^n(z)}{i + z}$, $n \in \mathbb{N}$, et montrer que f est toujours bornée par M sur $\mathbb{H}$.

Exercice 8. Une fonction $E : \overline{D(0,1)} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite unitaire si elle est holomorphe sur $D(0,1)$, continue sur $\overline{D(0,1)}$ et de module 1 sur $\partial D(0,1)$.

- (a) Soit E une fonction unitaire non constante. Prouver que E a un nombre fini non nul de zéros et que $|E| < 1$ sur $D(0,1)$.
- (b) Prouver que si $a \in D(0,1)$, $E_a : z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ est unitaire.
- (c) Prouver que les fonctions unitaires sont, à une constante multiplicative près, les produits finis de fonctions de type E_a , $a \in D(0,1)$.