TD6. Homotopies. Biholomorphismes.

Exercice 1. On se propose de donner une preuve topologique du théorème de D'Alembert-Gauss. Supposons donc qu'il existe un polynôme complexe P de degré $n \geq 1$ et ne s'annulant pas. Quitte à diviser P par une constante, on suppose même que le coefficient dominant de P est 1.

(a) Pour $R > 0$, on paramètre le cercle de centre R par $\gamma_R(t) = R e^{2i\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$. Montrer que le lacet $P \circ \gamma_R$ est homotope au lacet constant à $P(0)$ dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Montrer que, pour R assez grand, $P \circ \gamma_R$ est homotope au lacet γ_R^n dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(c) En déduire deux calculs contradictoires de l'indice de $P \circ \gamma_R$ par rapport à 0.

Exercice 2. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ un lacet.

(a) Montrer que γ est homotope à $\sigma = \gamma/|\gamma|$ dans $\mathbb{C}^*$.

(b) Montrer qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ de $[0,1]$ telle que pour $0 \leq k \leq N-1$, on a $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset D(\sigma(t_k), 1)$.

(c) Montrer que, pour $0 \leq k \leq N-1$, il existe des fonctions continues $\theta_k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ telles que
– $\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \sigma(t) = e^{i\theta_k(t)}$,
– $\theta_{k+1}(t_{k+1}) = \theta_k(t_{k+1})$.

(d) En déduire qu'il existe un entier n et une fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ tels que pour $0 \leq t \leq 1$, $\sigma(t) = e^{i\theta(t)}$ et $\theta(1) = \theta(0) + 2n\pi$.

(e) Soit $\gamma_n(t) = e^{2i\pi nt}$, $0 \leq t \leq 1$, un paramétrage du cercle parcouru n fois. Déduire de ce qui précède que γ est homotope à γ_n dans $\mathbb{C}^*$.

(f) Montrer que deux lacets de $\mathbb{C}^*$ sont homotopes si et seulement si ils ont même indice par rapport à 0.

Exercice 3.

(a) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$.
   (i) Montrer que $g : z \mapsto f(z)/z$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$.
   (ii) Montrer que, pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|$.
   (iii) Montrer que $|f'(0)| \leq 1$.
   (iv) Montrer que si $|f'(0)| = 1$, il existe un nombre λ de module 1 tel que, pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = \lambda z$.

(b) Montrer que les fonctions $\phi_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $|a| < 1$, sont des biholomorphismes de $D(0,1)$, de réciproque ϕ_{-a}.

(c) En déduire que tout biholomorphisme du disque unité est de la forme $\lambda\phi_a$, où λ est une constante de module 1 et $|a| < 1$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biholomorphisme tel que $f(0) = 0$.

(a) Montrer que $g : z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, avec un pôle en 0 (*on montrera que les autres types de singularités contredisent les hypothèses*).

(b) En déduire qu'il existe une constante c et un entier naturel m tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq c\,(1 + |z|)^m$.

(c) Montrer que f est un polynôme.

(d) Quels sont les polynômes complexes bijectifs ?

(e) En déduire que les biholomorphismes de $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe injective sur un ouvert contenant le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

(a) Calculer le déterminant jacobien de f (vue comme fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$) en fonction de f'.

(b) Montrer que l'aire de $f(D(0,1))$ est au moins $\pi |f'(0)|^2$ et caractériser l'égalité.