

TD2. Fonctions analytiques.

Exercice 1. Montrer que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^{\alpha}} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 2. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

(a) Montrer que $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

(b) En déduire que si $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = L$.

Exercice 3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ quand :

- $a_n = \log n$;
- $a_n = \log(1 + \sin(1/n))$;
- $a_{2p} = \alpha^{2p}$ et $a_{2p+1} = \beta^{2p+1}$, $0 < \alpha < \beta$;
- $a_n = \frac{n!}{n^n}$;
- $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{(-1)^p p!}{(p + \sin p)^p}$.

Exercice 4. Montrer que si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^{\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 5.

(a) (Transformation d'Abel) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.

Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \sum_{i=m}^n v_i$. Montrer que, pour $n > m$, on a

$$\sum_{i=m}^n u_i v_i = \sum_{i=m}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n.$$

(b) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge si $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$ (*indication: utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critère de Cauchy*).

Exercice 6. Donner le développement en série entière des fonctions analytiques suivantes au point demandé et donner le rayon de convergence de la série obtenue :

- $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ en 0;
- $g(z) = \frac{1}{3 - 2z}$ en 3;
- $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 7. Montrer que l'expression $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ définit une fonction f vérifiant l'équation $e^{f(z)} = z$ sur le disque $D(1, 1)$.

Exercice 8.

(a) Déterminer les parties discrètes de $\mathbb{C}$ dans la liste suivante:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad A = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \overline{A}, \quad A \cup \mathbb{N}^*.$$

(b) Déterminer les composantes connexes d'une partie discrète de $\mathbb{C}$.

(c) Montrer qu'un sous-ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ intersecte chaque compact de $\mathbb{C}$ en un nombre fini de points. En déduire qu'un tel sous-ensemble est de cardinal (au plus) dénombrable.

Exercice 9.

(a) Déterminer les fonctions analytiques f sur $D(0, 1)$ qui vérifient $f(1/n) = 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit f une fonction analytique sur $D(0, 1)$. On suppose qu'il existe une suite de réels distincts a_n dans $[-1/2, 1/2]$ tels que $f(a_n) \in \mathbb{R}$ pour tout n . Montrer que pour tout $z \in D(0, 1)$, $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$.

(c) On suppose de plus que (a_n) est décroissante, converge vers 0 et vérifie $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$ pour tout p . Montrer qu'alors f est constante (*on pourra raisonner sur la dérivée de f*).

Exercice 10. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(z)$. On se fixe un réel strictement positif $r < R$.

(a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq \max_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que s'il y a égalité pour un entier n , alors $f(z) = a_n z^n$ pour tout $|z| < R$.

(c) Montrer que si $|f|$ est maximal en 0, alors f est constante.