Examen d'analyse complexe (3M266)
Mai 2018.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.
Durée : 2 heures.

Exercice 1. Les questions suivantes sont indépendantes.

(a) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D(0,1)$. Démontrer que si la fonction $|f|$ est constante, f est aussi constante.

(b) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ s'annulant une infinité de fois dans le disque unité. Prouver que f est nulle.

(c) Soit f une fonction entière telle que $f(z)$ tend vers 2 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Démontrer que f est constante.

Exercice 2.

(a) Exprimer les solutions complexes de l'équation $z^2+z+1=0$ en fonction de $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier $n \geq 2$.

(b) Prouver que l'ensemble des solutions complexes de l'équation $z^{2n}+z^n+1=0$ est
$$A=\{\alpha,\alpha\omega,\dots,\alpha\omega^{n-1},\beta,\beta\omega,\dots,\beta\omega^{n-1}\},$$
où $\alpha=e^{\frac{2i\pi}{3n}}$, $\beta=e^{\frac{4i\pi}{3n}}$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Quels sont les arguments des éléments de A, pris dans $[0,2\pi[$?

(c) Soit g une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, telle que $g(z_0)=0$ et $g'(z_0)\neq 0$. Démontrer que le résidu de $1/g$ en z_0 est $1/g'(z_0)$.

(d) On pose $f(z)=1/(z^{2n}+z^n+1)$, pour $z\in\mathbb{C}\backslash A$. Vérifier que le résidu de f en un point a de A vaut
$$\mathrm{Res}(f,a)=-\frac{a}{n(2+a^n)}.$$

(e) *Soit $R>1$. Pour $t\in[0,2\pi/n]$, on pose $\gamma_R(t)=Re^{it}$. Et on considère le lacet σ_R obtenu en concaténant le segment orienté $[0,R]$, le chemin γ_R, puis le segment orienté $[R\omega,0]$.*

Représenter sur un même schéma, quand $n=4$ (seulement dans cette question), les points de l'ensemble A et le lacet σ_R.

(f) *Le but de cette question est de calculer* $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

(i) Vérifier que l'intégrale I est bien définie et finie.

(ii) Prouver que l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

(iii) Démontrer que l'intégrale $\int_{\sigma_R} f(z)dz$ s'exprime comme une fraction rationnelle en certains éléments de A.

(iv) Exprimer I en fonction de α, β, ω et n (avec les notations du (b)).

(v) Prouver que $I = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3n}\right)$.
(Indication : on pourra vérifier que $j + 2 = \sqrt{3}e^{i\pi/6}$*.)*

Exercice 3. Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, injective et ne s'annulant pas.

(a) Soient $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 2\}$. Démontrer que $g(U)$ et $g(V)$ sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que le développement en série de Laurent de g en 0 est de la forme $g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $h(z) = g(1/z)$. Prouver que le développement en série de Laurent de h en 0 est de la forme $h(z) = \sum_{n=q}^{+\infty} b_n z^n$, avec $q \in \mathbb{Z}$.

(d) En comparant les développements trouvés en (b) et (c), démontrer qu'il existe un entier naturel m et un polynôme P tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g(z) = \frac{P(z)}{z^m}.$$

(e) Vérifier qu'un nombre complexe z qui vérifie $P(z) = 0$ est forcément nul.

(f) Démontrer qu'il existe un nombre complexe non nul α tel que $g(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ ou $g(z) = \alpha/z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.