Examen d'analyse complexe (3M266)
Mai 2017.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.
Durée : 2 heures.

Exercice 1. (Questions de cours)

(a) Enoncer la formule de Cauchy pour une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(b) Enoncer le principe des zéros isolés.

(c) Enoncer le principe du maximum et calculer $\sup_{z\in K}\left|\frac{2z-i}{iz+2}\right|$, où on note $K=\{z\in\mathbb{C}/|z|\leq 1\}$.

Exercice 2. Soit $\Omega=\{z\in\mathbb{C}/z\neq 0 \text{ et } z\neq 1\}$. Pour $z\in\Omega\backslash\mathbb{R}_-$, on pose

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{Log}(z)+2in\pi)^2},$$

où Log désigne la détermination principale du logarithme.

A. (i) Rappeler comment le logarithme principal Log s'exprime en fonction du logarithme népérien (réel) et de l'argument principal (à valeurs dans $]-\pi,\pi[$).

(ii) Montrer que F est une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\mathbb{R}_-$.

(iii) Expliquer pourquoi il existe une unique détermination holomorphe L du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ telle que $L(-1)=i\pi$.

(iv) Pour $z\in\Omega\backslash\mathbb{R}$, exprimer F en fonction de L et montrer que F s'étend en une unique fonction holomorphe sur Ω, que l'on notera toujours F.

B. (i) Montrer que $|F(z)|$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$.

(ii) Démontrer la relation

$$\forall z\in\Omega,\quad F(1/z)=F(z).$$

(iii) Montrer que F n'admet qu'une singularité apparente en 0.

C. (i) Rappeler le développement en série entière de Log au voisinage de 1. Quel est son rayon de convergence ?

(ii) Considérons la fonction $\phi : z \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{Log}\, z)^2}$, au voisinage du point 1. Montrer qu'elle admet un pôle d'ordre deux en 1 et calculer les deux premiers termes du développement en série de Laurent correspondant.

(iii) Montrer que la fonction $G : z \mapsto F(z) - \dfrac{1}{(z-1)^2} - \dfrac{1}{(z-1)}$ s'étend en une fonction entière.

(iv) Exprimer F comme une fraction rationnelle.

Exercice 3.

A. Cotangente. Notons $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = i\, \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$.

(i) Vérifier que cot est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$.

(ii) Sans calcul, expliquer pourquoi cot est bornée sur

$K = \{z \in \mathbb{C} / |\mathrm{R}e(z)| \leq \pi/2, |\mathrm{I}m(z)| \leq 10, |z| \geq \pi/4\}$.

(iii) Montrer que cot est bornée sur $L = \{z \in \mathbb{C} / |\mathrm{I}m(z)| \geq 10\}$.

(iv) En déduire que cot est bornée sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \forall n \in \mathbb{Z},\ |z - n\pi| \geq \pi/4\}$.

B. Une formule. Fixons $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$ et posons : $f_\alpha(z) = \dfrac{\cot(z)}{(z-\alpha)^2}$.

(i) Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère le lacet défini par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \gamma_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi e^{it}.$$

Exprimer l'intégrale

$$I_n = \int_{\gamma_n} f_\alpha(z) dz$$

en fonction de résidus de f_α.

(ii) Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(iii) En déduire :

$$\cot'(\alpha) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n\pi)^2}.$$

(iv) Démontrer la formule

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2\pi^2}.$$