Examen d'analyse complexe (3M266)
Mai 2016.

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.
Durée : 2 heures.

Exercice 1. Enoncer précisément

(a) la définition d'une fonction holomorphe,

(b) le principe des zéros isolés,

(c) le théorème de Liouville.

Exercice 2. On se place sur le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Soit f une fonction holomorphe sur D, telle que : $f(D) \subset D$. Elle est donnée par son développement en série entière : $\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(a) Pour $0 \leq r < 1$, on note $l(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$. Après avoir justifié son existence, montrer que $l(r)$ vérifie la formule :

$$l(r) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(b) Prouver l'inégalité : $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1$.

(c) En déduire que $|f'(0)| \leq 1$.

(d) Montrer que $|f'(0)| = 1$ si et seulement s'il existe un réel β tel que

$$\forall z \in D, \quad f(z) = e^{i\beta} z.$$

(e) Soit $u \in D$. Montrer que l'application $h : z \mapsto \dfrac{z+u}{\bar{u}z+1}$ est un automorphisme de D.

(f) Prouver l'inégalité :

$$\forall u \in D, \quad |f'(u)| \leq \frac{1 - |f(u)|^2}{1 - |u|^2}.$$

Indication : si φ et ψ sont des automorphismes de D tels que $\varphi(0) = u$ et $\psi(f(u)) = 0$, considérer l'application $g = \psi \circ f \circ \varphi$.

Exercice 3. On s'intéresse à : $F(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$

(a) **Domaine de définition.**

(i) Pour quelles valeurs du nombre complexe z l'intégrale $F(z)$ est-elle absolument convergente ?

(ii) Pour quelles valeurs de z, la limite, quand $R \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^R t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt$ existe-t-elle ? *Indication : transformer l'intégrale* $\displaystyle\int_1^R t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt$ *à l'aide d'une intégration par parties.*

(iii) Que peut-on en déduire concernant le domaine de définition de F ?

(b) **Régularité**

(i) Montrer que F est holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{R}e(z) > 0\}$ et exprimer sa dérivée F' sous la forme d'une intégrale.

(ii) Montrer que F définit une fonction continue sur $\overline{\Omega} \backslash \{0\}$. *Indication : comme à la question (a) (ii).*

(c) **Calcul et prolongement.**

(i) Montrer que :

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = -\frac{F(z)}{4z}.$$

(ii) Calculer $F(x)$ pour $x > 0$. On pourra utiliser la valeur en un point convenable de la fonction Γ, définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-s} ds.$$

(iii) Soit $V = \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$. Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction G, holomorphe sur V, telle que

$$\forall x > 0, \quad G(x) = x^{-\frac{1}{4}}.$$

On explicitera G avec précision.

(iv) Calculer $F(z)$, pour $z \in \Omega$.

(v) Prouver que F se prolonge en une fonction holomorphe sur V. Ce prolongement est-il unique ? Peut-on prolonger F en une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant strictement V ?

(vi) Evaluer les intégrales $C = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}} \cos(t) dt$ et $S = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}} \sin(t) dt$.