Eléments de solutions pour le rattrapage d'analyse complexe de juin 2017 (3M266).

Exercice 1.

(a) Cours.

(b) Le DL de sinus montre que f se prolonge par continuité en 0, par $f(0) = 1$. Donc c'est une singularité apparente.

(c) Singularité essentielle : le polycopié de cours contient trois preuves (exclusion des autres types de singularités ; image d'un voisinage épointé de 0 ; série de Laurent).

(d) Comme h est bornée, le théorème de Riemann montre que cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$: c'est donc une fonction entière bornée. Par le théorème de Liouville, h est constante.

Exercice 2.

(a) (i) La différentielle de φ en z est la multiplication complexe par $\varphi'(z)$. C'est donc la composée de l'homothétie de rapport $|\varphi'(z)|$ et de la rotation d'angle un argument de $\varphi'(z)$.

(ii) Le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, celui d'une rotation est 1, celui d'une homothétie de rapport λ dans $\mathbb{R}^2$ est λ^2. La description de $D\varphi(z)$ ci-dessus montre ainsi que son déterminant est $|\varphi'(z)|^2$.

(b) Cours sur les automorphismes du disque.

(c) On utilise la formule de changement de variables avec le difféomorphisme φ proposé à la question (b), en calculant le jacobien comme en (a) :

$$\int_{\varphi(D(0,1))} dudv = \int_{D(0,1)} |\varphi'(x+iy)|^2 dxdy.$$

Puisque $\varphi(D(0,1)) = D(0,1)$ par (b), le membre de gauche est l'aire du disque unité, π. Un calcul rapide de φ' montre que le membre de droite est $9I$. Donc $I = \pi/9$.

Exercice 3.

(a) Théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres. D'abord, il faut remarquer que l'intégrande $\dfrac{(\ln t)^2}{t^2+z}$ est holomorphe en $z \in \Omega$ pour tout $t > 0$ et continu donc mesurable en $t > 0$ pour tout $z \in \Omega$. Ensuite, il s'agit de dominer l'intégrande.

Soit $\epsilon > 0$. Pour $t > 0$ et $\mathrm{Re}(z) > \epsilon$, on a $|t^2 + z| \geq \mathrm{Re}(t^2 + z) \geq t^2 + \epsilon$, donc

$$\left|\frac{(\ln t)^2}{t^2 + z}\right| \leq \frac{(\ln t)^2}{t^2 + \epsilon}.$$

Or le membre de droite est continu sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est un $O((\ln t)^2)$ en 0 et un $O((\ln t)^2/t^2)$ en $+\infty$: il est intégrable. Ceci permet d'affirmer que F définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) > \epsilon\}$, pour tout $\epsilon > 0$. Donc F est holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) > 0\}$

Pour attraper tout Ω, on se fixe $\epsilon > 0$ et $R > 0$ et on observe que si $|\mathrm{I}m(z)| > \epsilon$ et $|\mathrm{Re}(z)| < R$, alors $\left|\frac{(\ln t)^2}{t^2 + z}\right|$ est majoré par $\frac{(\ln t)^2}{t^2 - R}$ si $t > \sqrt{2R}$ et par $\frac{(\ln t)^2}{\epsilon}$ si $0 < t \leq \sqrt{2R}$. Ceci fournit une domination par une fonction intégrable (continue par morceaux et avec des comportements intégrables aux bornes) et montre que F est holomorphe pour ces valeurs de z. Comme on peut prendre ϵ arbitrairement petit et R arbitrairement grand, cela montre que F est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Au final, on a bien montré que F est holomorphe sur Ω.

(b) L'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est un $O(\ln t)$ en 0 et un $O((\ln t)/t^2)$ en $+\infty$: l'intégrale est bien définie. Le changement de variable $s = 1/t$ montre qu'elle est égale à son opposée. Donc elle est nulle.

(c) On effectue le changement de variable $t = s\,\sqrt{p}$, puis on écrit $(\ln(s\sqrt{p}))^2 = (\ln s + \frac{1}{2}\ln p)^2$, on développe ce carré pour trouver trois termes dont le second est nul par (b). Après calcul, il reste :

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(F(1) + \frac{\pi}{8}(\ln p)^2\right).$$

(d) La fonction ϕ est un quotient de fonctions holomorphes sur Ω', donc une fonction méromorphe sur Ω'. Le dénominateur s'annule uniquement en $\pm i$ et $\phi(\pm i + h)$ est équivalent à $\frac{(\log \pm i)^3}{\pm 2i\,h}$ quand h tend vers 0. Donc les pôles de ϕ sont $\pm i$ et ils sont simples. Le résidu de ϕ en i est $\frac{(\log i)^3}{2i} = \frac{(i\pi/2)^3}{2i} = -\frac{\pi^3}{16}$. Le résidu de ϕ en $-i$ est $\frac{(\log(-i))^3}{-2i} = \frac{(i3\pi/2)^3}{-2i} = \frac{27\pi^3}{16}$.

(e) On utilise la majoration grossière $\left|\int_{\sigma_r}\phi(z)dz\right| \leq 2\pi r \sup_{\sigma_r^*}|\phi|$. Pour $0 < t < 2\pi$, on écrit

$$|\phi(re^{it})| = \left|\frac{(\ln r + it)^3}{r^2e^{2it} + 1}\right| \leq \frac{(|\ln r| + 2\pi)^3}{|r^2 - 1|}.$$

On trouve ainsi $\int_{\sigma_r}\phi(z)dz = O(r|\ln r|^3)$ (resp. $|\ln r|^3/r$) quand r tend vers 0 (resp. $+\infty$). Par croissance comparée, l'intégrale tend vers 0 dans les deux cas.

(f) Attention à la définition du logarithme : on travaille avec un argument dans $]0, 2\pi[$. Ainsi, pour $t > 0$, $\log(t + iy)$ tend vers $\ln t + i0$ quand $y \to 0^+$, mais vers $\ln t + i2\pi$ quand $y \to 0^-$. On en déduit que, pour $\epsilon \to 0$, $\phi \circ \gamma_+(t)$ tend vers $\frac{(\ln t)^3}{t^2 + 1}$ tandis que $\phi \circ \gamma_-(t)$ tend vers $\frac{(\ln t + 2i\pi)^3}{t^2 + 1}$.

(g) On utilise le théorème de convergence dominée sur l'intégrale

$$\int_0^\infty (\phi \circ \gamma_+(t) - \phi \circ \gamma_-(t)) 1_{t \leq T} dt,$$

en remarquant que l'intégrande est dominé par $2\frac{(|\ln t| + 2\pi)^3}{t^2 + 3/4}$, pour $\epsilon \leq 1/2$.

Avec le f, on trouve comme limite :

$$\int_0^\infty \frac{(\ln t)^3 - (\ln t + 2i\pi)^3}{t^2+1} dt = -6i\pi F(1) + 4i\pi^4.$$

Ce résultat est obtenu en développant le cube dans le second terme, l'un des morceaux s'annulant par (b).

(h) On considère un lacet λ en forme de Pacman, dépendant de paramètres strictement positifs ϵ et T : on suit γ_+, puis le grand arc de cercle joignant dans le sens positif $T + i\epsilon$ à $T - i\epsilon$, puis l'opposé de γ_-, puis le petit arc de cercle dans le sens négatif joignant $-i\epsilon$ à $i\epsilon$. Ce lacet est tracé dans l'ouvert étoilé (donc simplement connexe) Ω', où la fonction ϕ est méromorphe. On choisit ϵ petit et T grand : λ ne touche pas les pôles $\pm i$. Le théorème des résidus donne alors

$$\int_\lambda \phi(z) dz = 2i\pi(Res(\phi, i) + Res(\phi, -i)).$$

Quand $\epsilon \to 0$ et $T \to +\infty$, avec (d), (g) et le raisonnement du (e), on arrive à

$$-6i\pi F(1) + 4i\pi^4 = 2i\pi\left(-\frac{\pi^3}{16} + \frac{27\pi^3}{16}\right),$$

qui donne $F(1) = \frac{\pi^3}{8}$. Avec (c), on en déduit :

$$\forall p > 0, \quad F(p) = \frac{\pi}{8\sqrt{p}}(\pi^2 + (\ln p)^2).$$

(i) Le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres (cf (a)) permet aussi de dériver sous le signe intégrale :

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = -\int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{(t^2+z)^2} dt$$

Donc $\int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{(t^2+1)^2} dt = -F'(1) = \frac{\pi^3}{16}$, cette valeur numérique étant obtenue en dérivant l'expression trouvée en (h).

(j) On a trouvé une formule pour F le long de $\mathbb{R}_+^*$. L'expression de F sur tout Ω s'obtient par prolongement analytique. L'unique prolongement analytique de ln à Ω est le logarithme principal Log. Ce logarithme principal permet de prolonger analytiquement $\sqrt{.}$ en $R \in \mathcal{O}(\Omega)$: $R(z) = \exp(\mathrm{Log}(z)/2)$ pour $z \in \Omega$. Alors

$$\forall z \in \Omega, \quad F(z) = \frac{\pi}{8R(z)}(\pi^2 + (\mathrm{Log} z)^2)$$

En particulier,

$$F(i) = \frac{\pi}{8R(i)}(\pi^2 + (\mathrm{Log} i)^2) = \frac{\pi}{8e^{i\pi/4}}(\pi^2 + (i\pi/2)^2) = \frac{3\pi^3}{32} e^{-i\pi/4}.$$