

Eléments de correction pour l'examen d'analyse complexe de mai 2017 (3M266)

Exercice 1. (a) et (b) Cours. (c) Le principe du maximum montre que le sup est atteint au bord de K , donc sur le cercle unité. Or si $|z| = 1$, $z\bar{z} = 1$ et

$$\left| \frac{2z - i}{iz + 2} \right| = \left| \frac{z(2 - i\bar{z})}{2 + iz} \right| = |z| \frac{|2 - i\bar{z}|}{|2 + iz|} = 1.$$

Donc le sup vaut 1.

Exercice 2.

A. (i) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\text{Log} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$.

(ii) Remarquons d'abord que $\text{Log}(z) + 2in\pi$ définit une fonction holomorphe de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ pour tout entier n . En outre, avec (i), on voit que cette quantité est non nulle, sauf si $|z| = 1$ et $\text{Arg} z = -2n\pi$, i.e. $z = 1$ et $n = 0$ (puisque $|\text{Arg}| < \pi$). Donc $z \mapsto 1/(\text{Log} z)^2$ est holomorphe sur Ω et les autres termes de la série sont même holomorphes sur tout $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Pour conclure à l'aide du théorème d'holomorphie des séries à paramètre, on cherche une domination, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:

$$|\text{Log}(z) + 2in\pi| \geq |\text{Im}(\text{Log}(z) + 2in\pi)| = |\text{Arg} z + 2n\pi| \geq (2|n| - 1)\pi.$$

Ceci permet de dominer chaque terme par $1/((2|n| - 1)\pi)^2$, terme général d'une série convergente. Ceci montre que F est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathbb{R}_-$.

(iii) Cours. Deux logarithmes sur un ouvert connexe diffèrent d'une constante ; en imposant $L(-1) = i\pi$, on obtient l'unicité. La simple connexité de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ donne l'existence ; on peut aussi observer que la fonction définie par $L(z) = \ln |z| + iA(z)$, avec A l'argument choisi dans $]0, 2\pi[$, convient.

(iv) Notons $\Omega_{\pm} = \{z \in \Omega / \pm \text{Re}(z) > 0\}$. Pour $z \in \Omega_+$, $\text{Arg}(z) = A(z)$, donc $\text{Log}(z) = L(z)$. Pour $z \in \Omega_-$, $\text{Arg}(z) = A(z) - 2\pi$, donc $\text{Log}(z) = L(z) - 2i\pi$. Via un décalage d'indice sur Ω_- , on obtient donc

$$\forall z \in \Omega \setminus \mathbb{R}, \quad F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(L(z) + 2in\pi)^2}$$

Or on montre comme en A.(ii) que cette formule définit une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \mathbb{R}_+$. On obtient ainsi un prolongement analytique de F à tout Ω .

B. (i) Convergence dominée. Chaque terme tend vers 0, par la formule du A.(i) ou du A.(iii). On peut utiliser la même domination qu'en A.(ii).

(ii) Pour $z \in \Omega \setminus \mathbb{R}_-$, avec A.(i), on trouve $\text{Log}(1/z) = -\text{Log}(z)$. Via un changement d'indice $m = -n$ dans la somme, on en tire $F(1/z) = F(z)$. C'est vrai pour $z \in \Omega$ par prolongement analytique.

- (iii) Quand z tend vers 0, $|1/z|$ tend vers l'infini. Donc (i) et (ii) montrent que $F(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0. En particulier, F reste bornée près de 0, donc n'y admet qu'une singularité apparente.

C. (i) Cours.

- (ii) DL. Quand $h \rightarrow 0$, on a

$$\phi(1+h) = \frac{1}{(h - h^2/2 + O(h^3))^2} = \frac{1}{h^2}(1 + h + O(h^2)).$$

Donc ϕ admet un pôle d'ordre deux en 1 et sa série de Laurent commence par $\phi(1+h) = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} + \dots$ (et $\dots$ est une série entière).

- (iii) Avec A.(iv) et B.(iii), on voit que G est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par C.(ii), $\frac{1}{(\text{Log} z)^2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)}$ est holomorphe au voisinage de 1. Il reste à examiner

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(\text{Log}(z) + 2in\pi)^2}$$

au voisinage de 1. Mais l'argument du A.(ii) montre que cette partie de la série est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, donc au voisinage de 1. Donc G s'étend en une fonction entière.

- (iv) G est une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini par B. (i), donc est bornée. Par le théorème de Liouville, G est constante, et même nulle, vu sa limite à l'infini. Donc $F(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$ pour tout $z \neq 1$.

Exercice 3.

- A.** (i) C'est un quotient de fonctions entières et le dénominateur $\sin z$ est nul ssi $e^{iz} = e^{-iz}$, i.e. $e^{2iz} = 1$, soit $2z \in 2\pi\mathbb{Z}$.

- (ii) $\cot$ est continue sur le compact K .

- (iii) Soit $z \in L$. Par inégalités triangulaires, en notant $y = \text{Im} z$, on a

$$|\cot z| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{iz}|}{||e^{-iz}| - |e^{-iz}||} = \frac{e^{-y} + e^y}{|e^{-y} - e^y|} = \frac{1}{\tanh(|y|)},$$

où l'on a utilisé l'impairité de la fonction tangente hyperbolique. Par croissance de cette fonction, tout ceci est majoré par $1/\tanh(10)$.

- (iv) On vérifie vite que $\cot$ est π -périodique. Si note M une borne pour $\cot$ sur K , on en déduit que $\cot$ est toujours bornée par M sur les translatés de K par π . Ainsi, $\cot$ est bornée par M sur $\Omega \cap L^c$. Comme $\cot$ est aussi bornée sur L , $\cot$ est bornée sur Ω .

- B.** (i) Théorème des résidus. Vu la suite, on va supposer $|\alpha| < (n+1/2)\pi$. On note que f_α est holomorphe sur $D(0, (n+1)\pi)$ privé de α et des $k\pi$, pour k entier entre $-n$ et n , où le lacet est tracé. Ce dernier est contractile dans $D(0, (n+1)\pi)$, qui est convexe donc simplement connexe. Et son

indice par rapport aux points α ou $k\pi$, $-n \leq k \leq n$, vaut 1 d'après le cours. Donc :

$$2i\pi I_n = \text{Res}(f_\alpha, \alpha) + \sum_{k=-n}^n \text{Res}(f_\alpha, k\pi).$$

- (ii) On borne $|I_n|$ par $|I_n| \leq L(\gamma_n) \sup_{\gamma_n^*} |f_\alpha|$. Les lacets γ_n sont tous dans Ω , où $\cot$ est bornée, par C . On en déduit que pour $z \in \gamma_n^*$, $|f_\alpha(z)|$ est majoré par $C((n+1/2)\pi - |\alpha|)^{-2} = O(n^{-2})$. Comme les cercles γ_n sont de longueur $(2n+1)\pi^2$, on trouve que $I_n = O(n^{-1})$ tend vers 0.
- (iii) Avec (i) et (ii), on trouve

$$0 = \text{Res}(f_\alpha, \alpha) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}(f_\alpha, k\pi).$$

Calculons les résidus dans la somme. Pour k entier, on veut un DL de $f_\alpha(k\pi + h)$ quand h tend vers 0. On calcule : $\cos(k\pi + h) \rightarrow (-1)^k$, $(k\pi + h - \alpha)^2 \rightarrow (k\pi - \alpha)^2$ et $\sin(k\pi + h) = (-1)^k \sin(h) \sim (-1)^k h$, donc $f_\alpha(k\pi + h) \sim \frac{1}{h}(k\pi - \alpha)^{-2}$. Ceci donne $\text{Res}(f_\alpha, k\pi) = (k\pi - \alpha)^{-2}$.

Pour le résidu en α , on écrit

$$f_\alpha(\alpha + h) = \frac{\cot(\alpha + h)}{h^2} = \frac{\cot(\alpha)}{h^2} + \frac{\cot'(\alpha)}{h} + O(1)$$

à l'aide du développement de Taylor de $\cot$. Ainsi, $\text{Res}(f_\alpha, \alpha) = \cot'(\alpha)$. On en tire la formule voulue.

- (iv) Notons $g(\alpha)$ la série dans le membre de droite. On peut lui appliquer le théorème d'holomorphic sous le signe somme. En effet, si α est dans $D(0, R) \setminus \pi\mathbb{Z}$, le terme général de la série se domine (pour n grand) par $\frac{2R}{n^2\pi^2 - R^2}$, qui est sommable. Ceci permet de dériver sous le signe somme et après calcul et usage de la question précédente, on trouve $g'(\alpha) = \cot'(\alpha) + 1/\alpha^2$. Donc $g(\alpha) = \cot(\alpha) - 1/\alpha + c$, où c est une constante. Par DL, $\cot(\alpha) = 1/\alpha + O(\alpha)$. Ainsi, $c = g(0) = 0$. D'où le résultat.