Eléments de correction pour l'examen d'analyse complexe de mai 2016 (3M266).

Exercice 1. Cours.

Exercice 2.

- (a) La fonction f est holomorphe sur D donc continue sur le cercle $C(0, r)$. Ainsi, dans l'expression de $l(r)$, l'intégrande est continu donc intégrable : $l(r)$ est bien défini. L'intégrande se développe pour donner

$$|f(re^{it})|^2 = \overline{f(re^{it})}f(re^{it}) = \sum_{m,n} \overline{a_m}a_n r^{m+n} e^{i(n-m)t}.$$

Dans cette somme, les termes avec $n - m$ non nul ont une intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$. En intégrant les autres termes, on trouve immédiatement la formule. (Les amateurs de séries de Fourier invoqueront plutôt la formule de Parseval.)

- (b) L'hypothèse $|f| < 1$ donne $l(r) \leq 2\pi$. Ainsi, étant donné un entier N fixé, la formule du (a) implique $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \leq 1$. On peut faire tendre r vers 1 dans

cette somme finie : $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq 1$. Ceci étant vrai pour tout choix de N , on

peut passer au sup et trouver $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1$.

- (c) $|f'(0)| = |a_1| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1$.

- (d) Si $|f'(0)| = 1$, on trouve $1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1$, donc il y a égalité. Et comme

$|a_1| = 1$, les coefficients a_n sont nuls dès que $n \neq 0$. Donc pour $z \in D$, $f(z) = a_1 z$. Et comme $|a_1| = 1$, il existe un réel β tel que $a_1 = e^{i\beta}$. La réciproque est un calcul immédiat.

- (e) Traité dans le cours sur les automorphismes du disque.

- (f) Soit $u \in D$. Pour $z \in D$, on pose $\varphi(z) = \frac{z+u}{\bar{u}z+1}$ et $\psi(z) = \frac{z-f(u)}{-\overline{f(u)}z+1}$.

Comme $f(D)$ est inclus dans D , ces formules définissent des automorphismes de D . Alors $g = \psi \circ f \circ \varphi$ est holomorphe sur D et envoie D dans D . Par (c), on a donc $|g'(0)| \leq 1$. Un calcul élémentaire donne

$$g'(0) = \psi'(f(u))f'(u)\varphi'(0) = \frac{1}{1-|f(u)|^2}f'(u)(1-|u|^2)$$

et le résultat suit.

Exercice 3. On s'intéresse à : $F(z) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$

(a) **Domaine de définition.**

- (i) Posons $z = x + iy$, avec x et y réels. Le module de l'intégrande est la fonction $t \mapsto t^{-\frac{3}{4}} e^{-xt}$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable en 0 (car équivalente à $t^{-\frac{3}{4}}$). Pour $x > 0$ (resp. < 0), elle décroît (croît) exponentiellement ; pour $x = 0$, elle n'est pas intégrable près de $+\infty$. Donc l'intégrale est absolument convergente ssi $\operatorname{Re}(z) = x > 0$.
- (ii) Le (i) dit déjà que si $\operatorname{Re}(z) = x > 0$, la limite existe (la convergence absolue implique la convergence).

Traitons le cas $\operatorname{Re}(z) = 0$. Comme ci-dessus, $\int_0^1 \dots$ existe pour tout z donc il suffit de considérer l'intégrale à partir de 1. Si $z = 0$, l'intégrande est une fonction puissance et son intégrale est divergente. Si $z \neq 0$, on effectue une intégration par parties :

$$(1) \quad \int_1^R t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} \left(R^{-\frac{3}{4}} e^{-zR} - e^{-z} + \frac{3}{4} \int_1^R t^{-\frac{7}{4}} e^{-zt} dt \right).$$

Quand $R \rightarrow +\infty$, le premier terme tend vers 0 (comme $\operatorname{Re}(z) = 0$, son module est $R^{-\frac{3}{4}}$). Le deuxième est constant. Le troisième admet une limite finie puisque la fonction $t \mapsto t^{-\frac{7}{4}} e^{-zt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (son module est $t^{-\frac{7}{4}}$). Ainsi, la limite existe quand $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $z \neq 0$.

Reste le cas où $\operatorname{Re}(z) < 0$. On écrit $z = -a + iy$, avec $a > 0$ et y réel. Si la limite existait, l'intégrale $\int_{R_n^-}^{R_n^+} t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt} dt$ tendrait vers 0

quand $R_n^- < R_n^+$ tendent vers $+\infty$. Donc sa partie réelle aussi. Ainsi, $\int_{R_n^-}^{R_n^+} t^{-\frac{3}{4}} e^{at} \cos(yt) dt$ devrait tendre vers 0. Si $y = 0$, c'est faux puisque l'intégrande croît exponentiellement. Si $y \neq 0$, on choisit les paramètres pour que le cosinus soit minoré par une constante strictement positive : avec $R_n^\pm = \frac{2n\pi}{|y|} \pm \frac{\pi}{4|y|}$, on trouve

$$\int_{R_n^-}^{R_n^+} t^{-\frac{3}{4}} e^{at} \cos(yt) dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{R_n^-}^{R_n^+} t^{-\frac{3}{4}} e^{at} dt \rightarrow +\infty.$$

Finalement, la limite existe exactement quand $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ et $z \neq 0$.

- (iii) F est bien définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et } z \neq 0\}$.

(b) **Régularité**

- (i) Il s'agit de vérifier les trois hypothèses du théorème d'holomorphicité des intégrales à paramètre. Pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt}$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $z \mapsto t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc sur Ω . Pour obtenir une domination, on est amené à se placer $\Omega_a = \{z, \operatorname{Re}(z) > a\}$, où $a > 0$ est fixé. Pour $t > 0$ et $z \in \Omega_a$, on a

$$|t^{-\frac{3}{4}} e^{-zt}| = t^{-\frac{3}{4}} e^{-t\operatorname{Re}(z)} \leq t^{-\frac{3}{4}} e^{-at}.$$

Et le membre de droite est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. (a)). Ceci prouve que F est holomorphe sur Ω_a . Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, F est holomorphe sur Ω et on peut dériver sous le signe intégrale :

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = \int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}}(-t)e^{-zt} dt = - \int_0^\infty t^{\frac{1}{4}}e^{-zt} dt.$$

- (ii) Soit $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$: $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ et $z \neq 0$. L'intégration par partie du (a,ii), avec $R \rightarrow \infty$ dans l'équation (1), donne la formule suivante :

$$F(z) = \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}e^{-zt} dt + \frac{e^{-z}}{z} - \frac{3}{4z} \int_1^\infty t^{-\frac{7}{4}}e^{-zt} dt.$$

Le deuxième terme est bien sûr holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Pour les intégrales des premier et troisième termes, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Chacun des intégrandes, $t^{-\frac{3}{4}}e^{-zt}$ et $t^{-\frac{7}{4}}e^{-zt}$, est continu en t et en z ; en outre, avec $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, on peut les dominer respectivement par $t^{-\frac{3}{4}}$ (intégrable sur $]0, 1[$) et $t^{-\frac{7}{4}}$ (intégrable sur $]1, +\infty[$). Ceci montre que F est continue sur $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$.

(c) **Calcul et prolongement.**

- (i) On fait une intégration par parties sur la formule du (b,i) donnant $F'(z)$:

$$F'(z) = - \int_0^\infty t^{\frac{1}{4}}e^{-zt} dt = - \frac{1}{z} [t^{\frac{1}{4}}e^{-zt}]_0^\infty + \frac{1}{4z} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}}e^{-zt} dt = 0 + \frac{1}{4z} F(z).$$

- (ii) Cette formule pour $z = x > 0$ est une équation différentielle d'ordre 1 qui se résout en $F(x) = C e^{\frac{\ln(x)}{4}} = C x^{\frac{1}{4}}$, où C est une constante déterminée par $F(1)$: $C = F(1) = \Gamma(1/4)$. (On peut aussi faire un changement de variable pour trouver cette formule.)

- (iii) Si on note Log le logarithme principal, alors la formule $G(z) = e^{\frac{\operatorname{Log}(z)}{4}}$ fournit une solution. Unicité : si deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe V sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$, alors le principe des zéros isolés assure qu'elles sont égales sur V .

- (iv) Pour $z \in \Omega$, $F(z) = \Gamma(1/4) e^{\frac{\operatorname{Log}(z)}{4}}$. En effet, cette formule est valide sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme les membres de gauche et droite sont holomorphes sur l'ouvert connexe Ω , qui contient $\mathbb{R}_+^*$, le principe des zéros isolés assure que l'égalité est vraie sur tout Ω .

- (v) Le membre de droite de la formule ci-dessus est holomorphe sur tout V donc il définit un prolongement holomorphe de F à V . Il y a unicité du prolongement, toujours par le principe des zéros isolés. Si on pouvait prolonger à un ouvert plus grand, il contiendrait un réel négatif $-a$, $a > 0$. Donc G se prolongerait continûment en $-a$. Or quand $\epsilon > 0$ tend vers 0,

$$G(-a \pm i\epsilon) = e^{\frac{1}{4}\operatorname{Log}(-a \pm i\epsilon)} \rightarrow e^{\frac{1}{4}(\ln a \pm i\pi)} = a^{\frac{1}{4}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}}.$$

Donc G admet deux limites différentes en $-a$. Il n'y a pas de prolongement à un ouvert plus grand que V .

- (vi) Avec ce qui précède, on peut écrire que C et S sont les parties réelle et imaginaire de $F(-i) = \Gamma(1/4)e^{\frac{1}{4}\operatorname{Log}(-i)} = \Gamma(1/4)e^{-\frac{i\pi}{8}}$. On en tire $C = \Gamma(1/4) \cos(\pi/8)$ et $S = -\Gamma(1/4) \sin(\pi/8)$.