

Corrigé de la seconde session d'analyse complexe (3M266) Juin 2018.

Exercice 1. On veut calculer $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{2 + \sin \theta} d\theta$.

- (a) La fonction $2 + \sin$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$, l'intégrande est continu sur le compact $[0, 2\pi]$, donc I est un nombre réel bien défini. Il vaut :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}{2 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta} - 1}{(e^{2i\theta} + 4ie^{i\theta} - 1)e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 4iz - 1)z} dz, \end{aligned}$$

en paramétrant C par $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- (b) La fraction rationnelle $f : z \mapsto \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 4iz - 1)z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de ses pôles, qui sont 0 et les racines complexes du trinôme $X^2 + 4iX - 1$, à savoir $\alpha_{\pm} = -2i \pm i\sqrt{3}$ (puisque le discriminant est $-12 = (2i\sqrt{3})^2$). On applique la formule des résidus sur l'ouvert simplement connexe $\mathbb{C}$. Avec $|\alpha_{\pm}| = 2 \pm \sqrt{3}$, on vérifie que α_- est en dehors du disque unité fermé, donc d'indice 0 par rapport à C , tandis que α_+ et 0 sont dans le disque unité ouvert, donc d'indice 1. Ainsi :

$$I = \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \alpha_+).$$

Pour calculer ces résidus, on observe que le dénominateur de f n'a que des racines simples, de sorte que f n'a que des pôles simples. On trouve alors

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

puis, en écrivant le dénominateur de $f(z)$ sous la forme $(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)z$ et en se rappelant que $\alpha_+^2 - 1 + 4i\alpha_+ = 0$,

$$\text{Res}(f, \alpha_+) = \lim_{z \rightarrow \alpha_+} (z - \alpha_+)f(z) = \frac{\alpha_+^2 - 1}{(\alpha_+ - \alpha_-)\alpha_+} = \frac{-4i}{\alpha_+ - \alpha_-} = \frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit : $I = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 2.

- (a) A z fixé, la fonction $t \mapsto f(t)e^{izt}$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}$. A t fixé, $z \mapsto f(t)e^{izt}$ est entière. Fixons $a \in]0, A[$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et z complexe tel que $|\operatorname{Im} z| < a$,

$$|f(t)e^{izt}| = |f(t)|e^{\operatorname{Re}(izt)} = |f(t)|e^{-t\operatorname{Im} z} \leq e^{-A|t|}e^{a|t|}.$$

La fonction $t \mapsto e^{(a-A)|t|}$ est intégrable parce que $a < A$ (continue, positive, d'intégrale $2/(A-a) < +\infty$ par parité). Le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale permet alors d'affirmer que F est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point z tel que $|\operatorname{Im} z| < a$, pour tout $a < A$: F est holomorphe sur Ω .

- (b) Le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale permet de dériver sous le signe intégrale à tout ordre : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \Omega$,

$$F^{(k)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(it)^k e^{izt} dt.$$

- (c) L'hypothèse et (b) donnent pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $F^{(k)}(0) = 0$. Cela assure la nullité de F sur l'ouvert connexe Ω (vu en cours, en préliminaire du principe des zéros isolés ; si on l'a oublié, on peut aussi dire que les coefficients du développement en série entière de la fonction holomorphe F en 0 sont alors tous nuls, de sorte que F est nulle sur un voisinage de 0, donc sur l'ouvert connexe Ω ... par principe des zéros isolés).

Exercice 3.

- (a) La fonction f est holomorphe sur l'ouvert borné D , continue sur $\overline{D}$: le principe du maximum dit que le maximum de $|f|$ est atteint sur son bord C , donc vaut 1. Comme f ne s'annule pas, on peut tenir le même raisonnement avec la fonction $1/f$: le maximum de $1/|f|$ est 1. Donc le minimum de $|f|$ est $1/1 = 1$.

Par conséquent, la fonction $|f|$ est constante à 1. En particulier, elle atteint son maximum en n'importe quel point de l'ouvert connexe D : par principe du maximum, f est constante.

- (b) On peut appliquer la question (a) à $f = e^g$: f est continue sur $\overline{D}$ (resp. holomorphe sur D) comme composée de fonctions continues sur $\overline{D}$ (resp. holomorphes sur D), f ne s'annule pas parce que l'exponentielle ne s'annule pas, $|f| = e^{\operatorname{Re}(g)} = e^0 = 1$ sur C . Donc e^g est constante, à une valeur $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Par surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, on écrit $\alpha = e^c$, $c \in \mathbb{C}$. Ainsi, e^{g-c} est constante à 1.

Donc $g - c$ est une fonction continue du connexe $\overline{D}$ dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Son image est alors une partie connexe de $2i\pi\mathbb{Z}$, donc un point : $g - c$ est constante sur $\overline{D}$. Donc g aussi.

Exercice 4.

(a) Dans cette question, on suppose que f a une singularité essentielle en 0.

- (i) Soit $z \in \overline{A}$. Il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers z . La suite $(\exp(a_n))$ reste dans $\exp(A)$ et, par continuité de l'exponentielle, elle tend vers $\exp(z)$. Donc $\exp(z)$ est dans $\overline{\exp(A)}$. Ceci montre que $\exp(\overline{A})$ est inclus dans $\overline{\exp(A)}$.
- (ii) Soit un disque épointé $D' = D'(0, r) \subset \Omega^*$. Comme f admet une singularité essentielle en 0, $f(D')$ est dense dans $\mathbb{C}$, i.e. $\overline{f(D')} = \mathbb{C}$. Avec (i), on en déduit :

$$\overline{F(D')} = \overline{\exp(f(D'))} \supset \exp(\overline{f(D')}) = \exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Il s'en suit que $F(D')$ est dense dans $\mathbb{C}^*$, donc dans $\mathbb{C}$. Cela prouve que F admet une singularité essentielle en 0.

(b) Dans cette question, on suppose que f a un pôle en 0.

- (i) Par définition d'un pôle, on peut écrire :

$$(1) \quad \forall z \in \Omega^*, \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^k},$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et g une fonction holomorphe sur Ω telle que $g(0) \neq 0$. On en tire $f(z) \sim \frac{g(0)}{z^k}$ quand $z \rightarrow 0$. Le nombre complexe $g(0)$ admet une racine k -ième $\alpha \in \mathbb{C}$, qui n'est pas nulle puisque $g(0)$ ne l'est pas. D'où $f(z) \sim \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k$ quand $z \rightarrow 0$.

- (ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose simplement $z_n = \alpha/n$ et $w_n = e^{\frac{i\pi}{k}} \alpha/n$, qui conviennent par (i).
- (iii) Par (ii), la suite (z_n) tend vers 0 et $\operatorname{Re}(f(z_n)) \sim n^k \rightarrow +\infty$, donc $|F(z_n)| = e^{\operatorname{Re}(f(z_n))} \rightarrow +\infty$: en particulier, F ne se prolonge pas continûment en 0, donc n'y admet pas qu'une singularité apparente. De même, la suite (w_n) tend vers 0 et $\operatorname{Re}(f(w_n)) \sim -n^k \rightarrow -\infty$, donc $|F(z_n)| = e^{\operatorname{Re}(f(z_n))} \rightarrow 0$: en particulier, $|F(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $z \rightarrow 0$, donc ne présente pas un pôle en 0.

Ne reste qu'une possibilité : F admet une singularité essentielle en 0.

(c) Dans cette question, on suppose à nouveau que f a un pôle en 0 et on veut obtenir la nature de la singularité de F par un argument *différent*.

- (i) On repart de l'écriture (1). Comme $g(0) \neq 0$, par continuité, on peut trouver $r > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $D(0, r)$. On dispose donc d'une fonction holomorphe g ne s'annulant pas sur l'ouvert $D(0, r)$, qui est simplement simplement connexe (car convexe) : un résultat de cours¹ assure l'existence d'une fonction holomorphe h sur $D(0, r)$ telle que $g = e^h$. Et donc :

$$\forall z \in D'(0, r), \quad z^k f(z) = g(z) = e^{h(z)}.$$

1. qui se retrouve vite : g'/g est une fonction holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $D(0, r)$, donc admet une primitive h ; un calcul rapide assure que ge^{-h} est de dérivée nulle donc constante sur l'ouvert connexe $D(0, r)$; quitte à ajouter une constante à h , $ge^{-h} = 1$.

- (ii) La fonction ϕ est holomorphe, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = e^{-\frac{h(0)}{k}} + 0$ n'est pas nul. Le théorème d'inversion locale prouve que, pour s assez petit, ϕ est un difféomorphisme de $D(0, s)$ sur $\phi(D(0, s))$. Son inverse ϕ^{-1} est alors automatiquement holomorphe, puisque, pour $z \in D(0, s)$, $D(\phi^{-1})_{\phi(z)} = (D\phi_z)^{-1}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire, comme réciproque d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire. Ceci prouve le résultat.

- (iii) Pour $z \in \mathbb{C}$, la série entière de l'exponentielle donne $p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-kn}}{n!}$.

C'est l'écriture de p comme série de Laurent en 0. Comme elle contient une infinité de puissances négatives de z , la singularité en 0 est essentielle.

Avec (i) et (ii), on peut écrire $f = 1/\phi^k$ et $F = \exp(1/\phi^k) = p \circ \phi$ sur $D(0, r)$. Si $D' = D'(0, t)$ est un disque épointé inclus dans $D(0, s)$, $\phi(D(0, t))$ est un ouvert contenant 0 (puisque $\phi(0) = 0$ et ϕ est un biholomorphisme donc un homéomorphisme sur $D(0, s)$), donc $\phi(D')$ contient un disque épointé centré en 0. Comme 0 est une singularité essentielle de p , on en déduit que $F(D') = p(\phi(D'))$ est dense dans $\mathbb{C}$. Cela prouve que F admet une singularité essentielle en 0.