

Eléments de correction du rattrapage d'analyse complexe (3M266, juin 2016)

Exercice 1.

(a) (i) Cours.

$$(ii) e^z = e^\pi e^{z-\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^\pi}{n!} (z - \pi)^n.$$

(b) (i) La fonction $z \mapsto (\cos z)^5$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui est convexe (donc simplement connexe) : le théorème de Cauchy assure que son intégrale le long de tout lacet est nulle. La réponse est 0.

(ii) L'intégrande admet cette fois une singularité, donc on pense aux résidus... mais on reconnaît la formule de Cauchy pour la fonction holomorphe $z \mapsto (\cos z)^5$ en $z = 0$. La réponse est donc $2i\pi (\cos 0)^5 = 2i\pi$.

(iii) On applique le théorème des résidus à $z \mapsto (\cos z)^5/z^2$, holomorphe hors 0. Par DL de cos, on trouve en 0 :

$$\frac{(\cos z)^5}{z^2} = \frac{1 + O(z^2)}{z^2} = \frac{1}{z^2} + O(1),$$

donc la singularité en 0 est (un pôle d'ordre deux) de résidu 0. La réponse est donc 0.

(c) (i) Cours.

(ii) On peut écrire sur tout $\mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, avec des coefficients donnés

par $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. L'inégalité de Cauchy à l'ordre $n > k$ donne pour tout $R > 0$:

$$|a_n| \leq R^{-n} \sup_{C(0,R)} |f| \leq c R^{-n} (1 + R^k).$$

On peut faire tendre R vers $+\infty$ dans le membre de droite pour trouver $a_n = 0$ pour $n > k$. Ainsi, f est un polynôme de degré au plus k .

(d) (i) Cours.

(ii) Le principe du maximum montre que le sup est atteint au bord du disque, donc sur le cercle unité. Or si $|z| = 1$, $z\bar{z} = 1$ et

$$\left| \frac{2z+i}{2-iz} \right| = \left| \frac{z(2+i\bar{z})}{2-iz} \right| = |z| \frac{|2-i\bar{z}|}{|2-iz|} = 1.$$

Donc le sup vaut 1.

(e) (i) Cours.

(ii) Par inégalité triangulaire, pour $|z| = 1$, $|-2z^2 + z + 1| \leq 4 < 5 = |5z^5|$. Le théorème de Rouché montre alors que les polynômes complexes $5z^5 - 2z^2 + z + 1$ et $5z^5$ ont le même nombre de racines, avec multiplicité, dans le disque unité, soit 5 (vu le second). Comme $5z^5 - 2z^2 + z + 1$ est de degré 5, cela veut dire que toutes ses racines sont dans le disque unité.

Exercice 2.

A. Sur la droite réelle.

- (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(at)}{\sinh(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, bornée près de 0 (par DL, on voit qu'elle tend vers a en 0) et bornée globalement par $1/\sinh(t)$ qui décroît exponentiellement donc est intégrable près de l'infini. Donc l'intégrale existe.
- (b) Essentiellement, on obtient le rectangle de sommets $-R, R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi$, dans le lequel on a croqué deux petits demi-disques centrés en 0 et $2i\pi$. Attention à l'orientation de chaque morceau.
- (c) Un petit changement de variable dans la seconde intégrale ci-dessous donne

$$I_1 + \tilde{I}_1 = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iat}}{\sinh(t)} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iat}}{\sinh(t)} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{\sinh(t)} dt$$

et ceci tend vers $2iF(a)$. Comme $f_a(2i\pi + t) = e^{-2\pi a} f_a(t)$, on peut procéder de même pour trouver que $I_2 + \tilde{I}_2$ tend vers $2ie^{-2\pi a} F(a)$.

- (d) (i) $\sinh(z)$ s'annule quand $e^z = e^{-z}$, soit $e^{2z} = 1$, i.e. $z \in i\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction proposée est holomorphe sur le disque épointé $D'(0, \pi)$. Comme $\sinh(z) \sim z$ en 0, elle reste bornée près de 0, donc la singularité en 0 n'est qu'apparente et en fait la fonction se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0, \pi)$. En particulier, elle est holomorphe et bornée sur le compact $\overline{D(0, 1)}$, par une constante c .
- (ii) Convergence dominée sur l'intégrale $\int_{T_1}^{T_2} \frac{re^{it}}{\sinh(re^{it})} e^{iare^{it}} dt$. La question (i) montre que, pour $r \leq 1$, l'intégrande est dominé par ce^a . Et sa limite quand $r \rightarrow 0$ est 1 (utiliser $z/\sinh(z) \rightarrow 1$ quand $z \rightarrow 0$). Donc la limite de l'intégrale est $T_2 - T_1$.
- (iii) La question (ii) montre que $I_3 = \int_0^{\pi} f_a(\varepsilon e^{it}) i\varepsilon e^{it} dt$ tend vers $i\pi$. Avec la relation $f_a(2i\pi + t) = e^{-2\pi a} f_a(t)$, on voit de même que $\tilde{I}_3$ tend vers $e^{-2\pi a} i\pi$.
- (e) On majore I_4 par la longueur du chemin fois le sup de l'intégrande :

$$|I_4| \leq 2\pi \sup_{\gamma_4^*} |f_a|.$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$, par inégalité triangulaire (inverse),

$$|f_a(R + it)| \leq \frac{2|e^{iaR-at}|}{||e^{R+it}| - |e^{-R-it}||} \leq \frac{2e^{|a|2\pi}}{e^R - e^{-R}}.$$

On voit ainsi que $I_4 = O(e^{-R})$ tend vers zéro. Pareil pour l'autre intégrale.

- (f) Quand $h \rightarrow 0$, on trouve $f_a(i\pi + h) = -\frac{e^{ia(i\pi+h)}}{\sinh(h)} \sim -\frac{e^{-a\pi}}{h}$. Donc f_a admet en $i\pi$ un pôle simple de résidu $-e^{-a\pi}$.
- (g) Soit σ le lacet obtenu en concaténant γ_1 , l'opposé de γ_3 , $\tilde{\gamma}_1$, γ_4 , l'opposé de $\tilde{\gamma}_2$, l'opposé de $\tilde{\gamma}_3$, l'opposé de γ_2 et enfin l'opposé de $\tilde{\gamma}_4$. On vérifie que le théorème des résidus s'applique pour donner $\int_{\sigma} f_a = 2i\pi \text{Res}(f_a, i\pi)$. Avec les

questions précédentes (attention aux orientations), on en tire quand $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$2iF(a) - 2ie^{-2\pi a}F(a) - i\pi - e^{-2\pi a}i\pi = -2i\pi e^{-a\pi}.$$

En posant $X = e^{\pi a}$, on en tire $F(a) = \frac{\pi}{2} \frac{X^2 - 2X + 1}{X^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \frac{X - 1}{X + 1}$, d'où la formule.

B. Ailleurs.

- (a) Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. On se fixe $0 < b < 1$ et $R > 0$. Pour $|Im(z)| \leq b$ et $t \geq 1$, on domine l'intégrande par $\frac{e^{bt}}{\sinh(t)}$, qui est intégrable ($\sim e^{(b-1)t}$ en $+\infty$). Pour $t \leq 1$ et $|z| < R$, la quantité $\sin(tz)/(tz)$ est bornée par une constante c_R : c'est parce que la fonction $w \mapsto \sin(w)/w$ est entière donc bornée par c_R sur $D(0, R)$. Dans ce cadre, on peut dominer l'intégrande par $Rc_R t/\sinh(t)$, qui est intégrable sur $]0, 1]$ (continu en 0). On en déduit le résultat ($b \rightarrow 1, R \rightarrow \infty$).

- (b) Le théorème permet aussi de dériver sous le signe intégrale :

$$F'(z) = \int_0^\infty \frac{t \cos(tz)}{\sinh(t)} dt.$$

- (c) $J = F'(0) = \pi^2/4$, en dérivant la formule de A.g.

- (d) La fonction définie par $G(z) = \frac{\pi e^{\pi z} - 1}{2 e^{\pi z} + 1}$ est holomorphe sur U . Par A.g, elle coïncide avec F sur la droite réelle, donc avec F sur tout l'ouvert Ω (par le principe des zéros isolés). C'est le prolongement voulu.

- (e) La relation $\sinh(iw) = i \sin(w)$, l'indication et un changement de variable donnent

$$F(-i/2) = \int_0^\infty \frac{\sin(-it/2)}{\sinh(t)} dt = \int_0^\infty \frac{\sinh(t/2)}{i \sinh(t)} dt = \int_0^\infty \frac{dt}{2i \cosh(t/2)} = \frac{K}{i}.$$

Avec B.d, on arrive à $K = iF(-i/2) = \frac{\pi}{2}$.