Partiel d'analyse complexe - 3M266

Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.

Durée : 1 heure 30.

Exercice 1

a) Etant donné $w \in \mathbb{C}$, on considère l'équation $z^2 - 2wz + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Combien a-t-elle de solutions ?

b) Déduire du a) que la fonction $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

Exercice 2 Soit f une fonction entière. On veut prouver que $f(\mathbb{C})$ ne peut pas être le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $f(\mathbb{C}) = P$. Vérifier que e^{-f} est constante et obtenir une contradiction.

Exercice 3 On se fixe un réel b et on note f la fonction entière définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$.

a) Etant donné $R > 0$, on note γ_R le lacet obtenu en concaténant les segments orientés $[-R, R]$, $[R, R+ib]$, $[R+ib, -R+ib]$ et $[-R+ib, -R]$. Que vaut $\int_{\gamma_R} f(z)dz$? (Justifier soigneusement la réponse.)

b) Prouver que $I_R^+ = \int_{[R,R+ib]} f(z)dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

c) Après avoir justifié son existence, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ibx} dx$ à l'aide des questions précédentes et en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4 Considérons le polynôme $P_z = X^2 - z$, où $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. On suppose qu'il existe une détermination continue d'une des racines de P_z sur $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \backslash \{0\}$, c'est-à-dire une fonction continue $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{D}^*$, $P_z(f(z)) = 0$.

a) On rappelle que Log désigne la détermination principale du logarithme, définie sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. On note L la détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$ dont la partie imaginaire est à valeurs dans $]0, 2\pi[$. Vérifier qu'il existe $\alpha, \beta \in \{-1, +1\}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{D} \backslash \mathbb{R}_-,\ f(z) = \alpha e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log} z} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{D} \backslash \mathbb{R}_+,\ f(z) = \beta e^{\frac{1}{2} L(z)}.$$

b) En déduire que f est holomorphe sur $\mathbb{D}^*$.

c) Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

d) Tirer une contradiction du c) et de l'identité $f(z)^2 = z$, valable pour $z \in \mathbb{D}^*$.

Correction du partiel d'analyse complexe - 3M266

Exercice 1 a) L'équation $z^2 - 2wz + 1 = 0$ est du second degré en z. Son discriminant réduit vaut $w^2 - 1$. Lorsque $w \in \{-1, 1\}$, cette équation n'a qu'une racine, à savoir w, et lorsque $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, cette équation a deux racines.

b) Soit $w \in \mathbb{C}$. Lorsque $z \in \mathbb{C}$, $\cos z = w$ si et seulement si $e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 2w$ c'est à dire si et seulement si e^{iz} est racine de $P = X^2 - 2wX + 1$. Soient u l'une des racines de P. $u \neq 0$ car $P(0) = 1 \neq 0$. Par conséquent, il existe $v \in \mathbb{C}$ tel que $e^v = u$. Par construction $z = \frac{v}{i}$ vérifie $\cos z = w$.

Commentaires *Dans le a), on peut se contenter dire qu'une équation du second degré a dans $\mathbb{C}$ deux racines simples ou une racine double selon que son discriminant est nul ou pas mais il est faux qu'elle ait forcément deux racines. Par ailleurs, il est inadmissible en L3 d'écrire «si $w^2 - 1 > 0$» lorsque $w \in \mathbb{C}$. Il n'y a pas d'ordre naturel dans $\mathbb{C}$! Ecrire $\sqrt{w^2 - 1}$ sans autre forme de procès laisse penser que le cours n'a pas même été lu. Vous devez en particulier retenir de ce cours de L3 que écrire $\operatorname{Log} z$ ou $\sqrt{z}$ quand $z \in \mathbb{C}$ n'a pas de sens et que chercher à lui en donner amène à considérer plusieurs déterminations du logarithme et des fonctions puissances.*

Exercice 2 La fonction e^{-f} est entière puisque exp et f le sont. e^{-f} est bornée puisque $\left|e^{-f}\right| = e^{-\operatorname{Re} f} \leqslant 1$ et $\operatorname{Re} f < 0$. Grâce au théorème de Liouville, on en déduit que e^f est constante. Soit c sa valeur. $c \in \mathbb{C}^*$ et à ce titre, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $c = e^\ell$. Puisque $e^{f-\ell} = 1$ et $\{z \in \mathbb{C};\ e^z = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$, la fonction $g = f - \ell$ est une fonction continue à valeurs dans $2\pi i\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, elle se doit d'être constante.

En effet, posons $g(0) = v$ et $X = g^{-1}(\{v\})$. X est un fermé de $\mathbb{C}$ car g est continue et $\{v\}$ fermé dans $\mathbb{C}$. Si $w \in X$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{2\pi}|g(x) - g(w)| < 1$ lorsque $x \in D(w, r)$. Puisque $\frac{1}{2\pi}g$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ceci force $g(x) = g(w) = v$ lorsque $x \in D(w, r)$. Ainsi, X est aussi un ouvert de $\mathbb{C}$. Comme $X \neq \varnothing$ puisque $0 \in X$, $X = \mathbb{C}$. Finalement, il apparaît que f est constante.

Commentaires *Vous devez savoir que $\left|e^f\right| = e^{\operatorname{Re} f}$. La fonction* exp *n'est pas injective et donc écrire que e^{-f} est constante ne permet pas d'affirmer que f est constante. Dans le cours, nous avons vu que si g et h sont deux déterminations continues du logarithme sur un même ouvert connexe D, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h = g + 2\pi ik$. Dans cette question, il s'agissait plus ou moins de refaire cette preuve. Apprendre son cours est une nécessité.*

Exercice 3 a) La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ est convexe et γ_R est un lacet C^1 par morceaux tracé dans $\mathbb{C}$. Le théorème de Cauchy permet donc d'affirmer que $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ est 0.

b) Lorsque $R \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|I_R^+\right| \leqslant long\left([R, R+ib]\right) \sup_{t\in[0,b]} |f(R+it)| = |b| \sup_{t\in[0,b]} \exp\left(-\frac{\operatorname{Re}(R+it)^2}{2}\right)$$
$$= e^{-R^2/2}|b| \sup_{t\in[0,b]} e^{t^2/2} = e^{-R^2/2}|b|e^{|b|^2/2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\lim_{R\to+\infty} I_R^+$ existe et vaut 0.

c) $f_b : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ibx}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque continue. De plus, $|f_b(x)| = e^{-\frac{x^2}{2}} = O(e^{-|x|})$ quand $x \to \pm\infty$. Donc f_b est intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale considérée existe.

Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, si on pose $I_R^- = \int_{[-R;-R+ib]} f_0(z)dz$, en changeant R en $-R$ dans les calculs du b), on obtient que I_R^- tend vers 0 quand $R \to +\infty$. Vu la définition de γ_R, le a) donne pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 = \int_{-R}^{+R} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + I_R^+ - \int_{-R}^{+R} e^{-\frac{(t+ib)^2}{2}}dt - I_R^-.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{(t+ib)^2}{2}} = e^{\frac{b^2}{2}}f_b(t)$. Ainsi, faisant tendre R vers $+\infty$, on en déduit : $e^{\frac{b^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ibx}dx = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{b^2}{2}}.$$

La transformée de Fourier de la gaussienne est la gaussienne.

Commentaires *a) Le fait que $\mathbb{C}$ est connexe n'est pas pertinent ici. Soit on utilise le théorème de Cauchy local el le fait que $\mathbb{C}$ est convexe ou étoilé par rapport par exemple à 0, soit on utilise le théorème de Cauchy homotopique et le fait que $\mathbb{C}$ est un domaine simplement connexe.*

b) Vous devez savoir que si f est holomorphe au voisinage du support d'un chemin γ, $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant long(\gamma)\,\|f\|_{\langle\gamma\rangle}$ où $\|f\|_{\langle\gamma\rangle} = \sup_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|$.

c) Ne pas savoir prouver en L3 que $f_b \in L^1(\mathbb{R})$ est inacceptable. Par ailleurs écrire $\left|\int_{\mathbb{R}} f_b(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx$ ne peut pas établir que $f \in L^1(\mathbb{R})$ car cette inégalité ne peut pas être écrite si on ne sait pas déjà que f_b est intégrable.

Exercice 4 a) Lorsque $z \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$, $f(z)^2 = z = \left(e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}\right)^2 \neq 0$. Par conséquent, les deux racines de P_z sont les deux nombres non nuls $e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$ et $-e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$. Comme $f(z)$ est aussi l'une d'elle, $\frac{f(z)}{e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}} \in \{-1,+1\}$. Ainsi, $g : z \mapsto \frac{f(z)}{e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}}$ est une fonction continue de $\mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$ dans $\{-1,+1\}$. Comme $\mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$ est connexe, elle est constante et il existe donc $\alpha \in \{-1,+1\}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$, $f(z) = \alpha e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$. De même, il existe $\beta \in \{-1,+1\}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_+$, $f(z) = \alpha e^{\frac{1}{2}L(z)}$.

b) Log et L sont respectivement holomorphes sur $\mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_+$ qui sont des ouverts dont la réunion est $\mathbb{D}$. Donc f est holomorphe sur $\mathbb{D}^*$.

c) Puisque $|f(z)|^2 = |z| \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$, f se prolonge par continuité en 0, par $f(0) = 0$ (donc f est bornée sur un voisinage épointé de 0). Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}^*$, un théorème de Riemann permet d'affirmer que f prolongée par continuité en 0 est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

d) Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $f(z)^2 = z$ pour tout z dans $\mathbb{D}^*$, et donc dans $\mathbb{D}$ par continuité, on trouve en dérivant : $2f'(z)f(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En particulier, $0 = 2f'(0)f(0) = 1$, ce qui est une contradiction.

Commentaires *a) Certains ignorent la différence entre «supposer» et «prouver». Ainsi, dans cette question, on* <u>*suppose*</u> *que* $f \in C^0(\mathbb{D}^*)$ *vérifie* $f^2 = Id_{\mathbb{D}^*}$ *et on veut en particulier* <u>*prouver*</u> *qu'il existe* $\alpha \in \{-1, +1\}$ *tel que* $f(z) = \alpha \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$. *Ecrire a priori que* f *est de cette forme sur* $\mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$ *pour le «démontrer» ensuite est une erreur de logique qui n'a pas même sa place au collège. Par ailleurs, que pour tout* $z \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}_-$, $f(z)^2 = \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)^2$ *entraîne seulement* $f(z) = \alpha \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)$ *avec un* $\alpha \in \{-1, 1\}$ *qui dépend de* z.

c) L'énoncé ne dit pas que f *est continue en* 0. *A priori, elle n'est même pas définie en* 0*... Envisager la limite de* $f(z)$ *quand* $z \to 0^-$ *est un non sens. Il n'y pas d'ordre dans* $\mathbb{C}$ *;* 0^- *et* 0^+ *n'ont aucun sens dans* $\mathbb{C}$.