

Partiel d'analyse complexe - 3M266*Les documents et outils électroniques ne sont pas autorisés.**Durée : 1 heure 30.***Exercice 1**

Calculer $\text{Log} \left(2e^{\frac{3\pi i}{4}} e^{\frac{2\pi i}{3}} \right)$ où Log est la détermination principale du logarithme (en justifiant la réponse).

Exercice 2

Vérifier que la formule $F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3} \cos(tz) dt$, $z \in \mathbb{C}$, définit une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3

1. a) Déterminer (en le justifiant) l'ensemble A des nombres complexes z tels que $\cos z = 0$.

b) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus A$, on pose $K(z) = \frac{1+\sin z}{\cos z}$. Justifier l'existence d'une suite (b_n) de nombres réels tels que

$$\forall z \in D(0, \pi/2), \quad K(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

2. a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus A$, on pose $H(z) = \frac{1+\sin z}{\cos z} + \frac{4}{2z-\pi}$. Prouver que les quantités $H\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$ et $K\left(-\frac{\pi}{2} - h\right)$ ont une limite quand le nombre complexe non nul h tend vers 0.

b) Vérifier que H se prolonge au disque $D(0, 3\pi/2)$ en une fonction holomorphe $\tilde{H}$.

c) Donner le développement en série entière de $\tilde{H}$ en 0 et en déduire que $b_n \sim_{+\infty} \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}$.

Exercice 4

1. Soit f une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur un ouvert contenant le disque unité fermé $\overline{D(0, 1)}$. On suppose que $|f(z)| \geq 3$ lorsque z appartient au cercle $C(0, 1)$. Prouver que $|f(z)| \geq 3$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f non identiquement nulle. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $f(\omega) = 0$.

a) Prouver que si $r > 0$ est assez petit, le disque $\overline{D(\omega, r)}$ est inclus dans Ω et $f(z) \neq 0$ pour tout z appartenant au cercle $C(\omega, r)$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N$ et tout $z \in C(\omega, r)$, $|f_n(z)| \geq \alpha$.

c) Prouver que, pour tout n assez grand, il existe $z \in D(\omega, r)$ tel que $f_n(z) = 0$.

Correction du partiel d'analyse complexe - 3M266

Exercice 1 $z \stackrel{\text{def}}{=} 2e^{\frac{3\pi i}{4}} e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2e^{\frac{17}{12}i\pi} = 2e^{-\frac{7}{12}i\pi}$ et $(2, -\frac{7}{12}i\pi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$. Donc $\text{Log } z = \ln 2 - \frac{7\pi}{12}i$.

Commentaires Pour qu'une réponse soit validée à partir de l'écriture $z = re^{i\theta}$, il faut explicitement vérifier que $r \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 2 Notons f la fonction définie par $f(z, t) = e^{-t^3} \cos(tz)$ pour tout $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z, \cdot)$ est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(\cdot, t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Et lorsque $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in D(0, R)$,

$$|f(z, t)| \leq e^{-t^3} \frac{1}{2} (|e^{itz}| + |e^{-itz}|) = \frac{e^{-t^3}}{2} (e^{-t \operatorname{Im} z} + e^{+t \operatorname{Im} z}) \leq \frac{e^{-t^3}}{2} (e^{tR} + e^{-tR}) = e^{Rt-t^3}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{Rt-t^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $t \gg 1$, $Rt - t^3 = -t^3(1 - Rt^{-2}) = -t^3[1 + o(1)] \leq -\frac{t^3}{2}$, donc $0 \leq \varphi(t) \leq e^{-t/2}$. Donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Avec le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale, on en déduit que F est définie et holomorphe sur $\bigcup_{R \in \mathbb{R}_+^*} D(0, R) = \mathbb{C}$.

Commentaires La fonction $\cos$ n'est pas bornée. Il ne suffit pas d'invoquer le théorème sur l'holomorphicité des intégrales à paramètre. Encore faut-il vérifier que les hypothèses sont satisfaites. En général, la seule difficulté réside dans la domination.

Exercice 3 1. a) L'équation $\cos z = 0$ signifie $e^{iz} + e^{-iz} = 0$, soit $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$, ce qui équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2iz = i\pi + 2ik\pi$. Donc $A = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont entières, donc la fonction $K = \frac{1+\sin}{\cos}$ est holomorphe là où $\cos$ ne s'annule pas, i.e. sur $\mathbb{C} \setminus A$. Comme cet ouvert contient le disque $D(0, \pi/2)$, K s'y écrit comme une série entière $(\sum b_n z^n)$ centrée en 0. A priori b_n est un nombre complexe, mais puisque K est holomorphe, $b_n = K^{(n)}(0) = \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(0)$ et donc ce nombre est réel parce que K est réelle sur l'axe réel. On peut ne pas faire intervenir de dérivée partielle en remarquant que si $x \in \mathbb{R}$, $K'(x)$ est la limite en x^* de $y \rightarrow \frac{K(y)-K(x)}{y-x}$ puis faire une récurrence. La différence est de l'ordre de la présentation puisque lorsque $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial K}{\partial x}(x)$ est précisément et par définition la limite en x^* de $y \rightarrow \frac{K(y)-K(x)}{y-x}$.

2. a) Pour $h \in \mathbb{C}$, que $\cos(\pi/2 - h) = \frac{1}{2} (e^{i\pi/2} e^{ih} + e^{-i\pi/2} e^{-ih}) = \sin h$ et, de même, $\sin(\pi/2 - h) = \cos h$. Quand $\mathbb{C}^* \setminus \pi\mathbb{Z} \ni h \rightarrow 0$, on en tire

$$H\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{1 + \cos h}{\sin h} - \frac{2}{h} = \frac{2 + O(h^2)}{h + O(h^3)} - \frac{2}{h} = \frac{2}{h}(1 + O(h^2) - 1) = O(h) \rightarrow 0.$$

Utilisant la parité des fonctions sin et cos, on obtient aussi que

$$K\left(-\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = \frac{1 - \cos h}{-\sin h} \sim_{0^*} \frac{\frac{1}{2}h^2}{-h} = O(h) \rightarrow 0$$

b) K est holomorphe sur $D\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ et le a) montre que K se prolonge continûment par la valeur 0 en $-\pi/2$. Grâce à un théorème de Riemann, on en déduit que ce prolongement continu $\tilde{K}$ de K est holomorphe sur $D(0, 3\pi/2) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Puisque $z \mapsto 4/(2z - \pi)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pi/2\}$ et $\tilde{K}$ sur $\mathbb{C} \setminus \tilde{A}$ où $\tilde{A} = A \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, H est holomorphe sur $D(0, 3\pi/2) \setminus \{\pi/2\}$ et le a) indique que H se prolonge continûment par la valeur 0 en $-\pi/2$. Comme ci-dessus, ceci implique que ce prolongement $\tilde{H}$ de H est holomorphe sur $D(0, 3\pi/2)$.

c) Puisque $\tilde{H}$ est holomorphe sur $D(0, 3\pi/2)$, $\tilde{H}$ est la somme d'une série entière $(\sum a_n z^n)$ sur ce disque :

$$\forall z \in D(0, 3\pi/2), \quad \tilde{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Avec b) et le développement en série entière $\frac{4}{2z - \pi} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - (2z)/\pi} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2z)^n}{\pi^n}$ valide pour $z \in D(0, \pi/2)$, on trouve

$$\forall z \in D(0, \pi/2), \quad \tilde{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n - \frac{4}{\pi} \frac{2^n}{\pi^n} \right) z^n.$$

L'unicité du développement en série entière donne $a_n = b_n - \frac{4}{\pi} \frac{2^n}{\pi^n}$ pour tout n . Comme $\pi/2$ est dans le disque de convergence de $(\sum a_n z^n)$, $(a_n (\pi/2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, ce qui donne $b_n - \frac{4}{\pi} \frac{2^n}{\pi^n} = o((2/\pi)^n)$ et donc l'équivalent voulu.

Commentaires 1b) D'après le cours, le développement en série entière obtenu est valable sur $\Delta = D\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ car $\frac{\pi}{2} = \text{dist}\left(0, b(\mathbb{C} \setminus A)\right) = \text{dist}\left(0, A\right)$. Autrement dit, le rayon de convergence de $(\sum b_n z^n)$ est au moins $\frac{\pi}{2}$. Puisque K n'est pas bornée près de $\frac{\pi}{2}$ dans Δ , K possède une singularité non éliminable en $\frac{\pi}{2}$ et ce rayon est exactement $\frac{\pi}{2}$. En particulier, $(\sum b_n z^n)$ diverge quand $z \in (\mathbb{C} \setminus A) \setminus \bar{\Delta}$ et la question de savoir si $K(z)$ est égal à $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ n'a pas même de sens.

2a) Cette question est de niveau L1. Les techniques de base concernant les d.l. doivent être maîtrisées.

Exercice 4 1. Puisque f ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{D(0, 1)}$. Comme $\overline{D(0, 1)}$ est un compact de $D(0, 2)$, le principe du maximum donne la majoration $\max_{\overline{D(0, 1)}} \left| \frac{1}{f} \right| \leq \max_{C(0, 1)} \left| \frac{1}{f} \right| \leq \frac{1}{3}$, puisque $|f| \geq 3$ sur $C(0, 1)$. D'où $|f| \geq 3$ sur $D(0, 1)$.

2. a) D'après un théorème de Weierstrass, f , limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes sur Ω , est holomorphe. Etant donné que Ω est un ouvert connexe et que f n'est pas la fonction nulle, on sait grâce au principe des zéros isolés qu'il existe

$r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\overline{D(\omega, r)} \subset \Omega$ et pour tout $z \in \overline{D(\omega, r)} \setminus \{\omega\}$, $f(z) \neq 0$.

b) Puisque $C(\omega, r)$ est compact et puisque $|f|$ est continue strictement positive sur $C(\omega, r)$, $m \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{C(\omega, r)} |f| = \min_{C(\omega, r)} |f| > 0$.

Puisque $C(\omega, r)$ est compact, (f_n) converge uniformément sur $C(\omega, r)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\|f - f_n\|_{C(\omega, r)} \leq \alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{m}{2}$. Lorsque $z \in C(\omega, r)$, on obtient donc $|f_n(z)| \geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| \geq m - \|f - f_n\|_{C(\omega, r)} \geq \alpha > 0$.

c) Supposons par l'absurde que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq k$ tel que f_n ne s'annule pas dans $D(\omega, r)$. On peut alors construire par une récurrence élémentaire une extractrice φ telle que $\varphi(0) \geq N$ et $f_{\varphi(n)}$ ne s'annule pas dans $D(\omega, r)$, pour tout n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|f_{\varphi(n)}| \geq \alpha$ sur $C(\omega, r)$, $f_{\varphi(n)}$ ne s'annule pas sur $\overline{D(\omega, r)}$. Par continuité, on obtient un ouvert V_n tel que $\overline{D(\omega, r)} \subset V_n \subset \Omega$ et $f_{\varphi(n)}$ ne s'annule pas sur V_n . En effet, pour chaque $z \in \overline{D(\omega, r)}$, on peut trouver $\rho_z \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $D_z = D(z, \rho_z) \subset \Omega$ et $|f_{\varphi(n)}(w)| \geq \frac{1}{2} |f_{\varphi(n)}(z)| > 0$ lorsque $w \in D_z$. L'ouvert $V_n = \bigcup_{z \in \overline{D(\omega, r)}} D_z$ convient alors.

On peut donc appliquer le raisonnement du (1) et obtenir que $|f_{\varphi(n)}| \geq \alpha$ sur $D(\omega, r)$ et en particulier que $|f_{\varphi(n)}(\omega)| \geq \alpha$. Ceci ayant lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par passage à la limite que $0 = |f(\omega)| \geq \alpha > 0$, ce qui est absurde.