Université Pierre et Marie Curie Licence de Mathématiques

ANALYSE COMPLEXE

3M266

2017-2018

V. Minerbe

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À L'ANALYSE COMPLEXE

Nous allons ici introduire une notion de dérivation pour les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Formellement, la définition sera complètement analogue à celle de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Disons tout de suite que cette similarité est trompeuse ! Les fonctions dérivables au sens complexe s'avèrent très spéciales et jouissent de propriétés de rigidité remarquables. On verra plus tard, entre autres, comment exploiter ces particularités pour développer des outils puissants de calcul intégral. Par ailleurs, la dérivabilité au sens complexe a une jolie interprétation géométrique simple, ce qui a aussi des applications importantes.

1.1. Rappels sur les nombres complexes

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois internes $+$ et $\times$ définies par

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')\\ (x,y)\times(x',y') &= (xx'-yy',xy'+x'y)\end{aligned}$$

pour $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont les *nombres complexes*. On identifiera $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. En particulier, $1 = (1,0)$. On notera aussi $i = (0,1)$. Tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique

$$(x,y) = x(1,0)+y(0,1) = x1+yi = x+iy.$$

En particulier, le produit se réécrit

$$(x+iy)\times(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

Proposition 1.1.1. — *$(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps. $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. -1 a deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: i et $-i$.*

Démonstration. — La vérification des axiomes est laissée au lecteur. Notons simplement que l'inverse de $x+iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est $\dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$. Par ailleurs, l'équation $(x+iy)^2 = -1$ équivaut à : $x^2-y^2 = -1$ et $2xy = 0$. Autrement dit, soit $x = 0$ et et $y^2 = 1$, i.e. $y = \pm 1$, soit $y = 0$ et $x^2 = -1$, ce qui n'est pas possible. Les solutions sont donc $\pm i$. $\square$

Forme cartésienne. — $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 : la loi externe $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ s'obtient en restreignant le produit $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. La base canonique de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ est $(1=(1,0), i=(0,1))$. Les coordonnées de $z=x+iy$ dans cette $\mathbb{R}$-base sont $x=\mathrm{Re(z)}$, la *partie réelle* de z, et $y=\mathrm{Im(z)}$, la *partie imaginaire* de z. L'écriture $z=x+iy$ est la *forme cartésienne* de z.

Par abus de notation, il pourra nous arriver d'écrire $z=x+iy$ en sous-entendant que x et y sont réels.

Le *conjugué* de z est $\overline{z}=x-iy$. On a donc les formules :

$$z=\mathrm{Re}\,z+i\mathrm{Im}\,z,\qquad \overline{z}=\mathrm{Re}\,z-i\mathrm{Im}\,z;,\qquad \mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Un nombre complexe z est donc dans $\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im(z)}=0$ ssi $\overline{z}=z$. De même, $z\in i\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Re(z)}=0$ ssi $\overline{z}=-z$: on dit alors que z est *imaginaire pur.*

Remarque 1.1.2. — Le lecteur pourra vérifier que la conjugaison complexe $z\mapsto\overline{z}$ est un automorphisme de corps qui induit l'identité sur $\mathbb{R}$. Et, en fait, c'est le seul, avec l'identité : si un automorphisme u du corps $\mathbb{C}$ induit l'identité sur $\mathbb{R}$, alors

$$u(x+iy)=u(x)+u(i)u(y)=x+u(i)y,$$

de sorte que u est déterminé par $u(i)$; or $u(i)^2=u(i^2)=u(-1)=-1$, donc soit $u(i)=i$ et u est l'identité, soit $u(i)=-i$ et u est la conjugaison.

Forme trigonométrique. — Le *module* de $z=x+iy$ est $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Autrement dit, c'est la norme euclidienne du vecteur $z=(x,y)$ de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. Le module est donc une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, définissant la topologie usuelle de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. L'expression du produit des nombres complexes montre que le produit scalaire euclidien entre les vecteurs z et z' de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ n'est autre que $\mathrm{R}e(\bar{z}z')$. En particulier, on trouve l'identité $z\overline{z}=|z|^2$, qui entraîne une formule utile pour l'inverse de $z\in\mathbb{C}^*$: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. On en déduit aussi le fait que le module définit une norme multiplicative : $|z\,z'|=|z|\,|z'|$ pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$. Le lien avec le produit scalaire donne aussi la formule utile suivante : $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2+2\mathrm{R}e(\bar{z}z')$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$, le nombre $w=z/|z|$ est de module 1, donc $\mathrm{Re(w)}^2+\mathrm{Im(w)}^2=1$. Ainsi, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re(w)}=\cos\theta$ et $\mathrm{Im(w)}=\sin\theta$. On note alors $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (on reviendra sur cette exponentielle plus loin dans le cours), de sorte que $z=|z|e^{i\theta}$. C'est la *forme trigonométrique* du nombre complexe $z\neq 0$. Le nombre θ est *un argument* de z. Il n'est pas unique! Il n'est déterminé qu'à $2\pi\mathbb{Z}$ près. Par exemple, la formule d'Euler $e^{i\pi}=-1$ donne la forme trigonométrique de -1, dont un argument est π.

Plus géométriquement, si on pense à $\mathbb{C}$ comme au plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le passage de l'écriture $z=x+iy$ à $z=re^{i\theta}$, avec $r=|z|$, correspond au passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires : $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

1.2. Géométrie et $\mathbb{C}$-linéarité

Comme dit plus haut, $\mathbb{C}$ est en particulier un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, identifié à $\mathbb{R}^2$ par $x + iy = (x, y)$. Dans cette identification, $(1, i)$ est la base canonique ; le module est la norme euclidienne ; un argument de z donne une mesure de l'angle (orienté) entre 1 et z, vus comme vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Certaines transformations s'interprètent aisément : si ρ est un réel positif, l'application $z \mapsto \rho z$ est l'homothétie de rapport ρ (centrée en 0) ; pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la rotation d'angle θ (centrée en 0) ; la conjugaison est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses (dirigé par 1).

Une application $\mathbb{C}$-linéaire $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est en particulier une application $\mathbb{R}$-linéaire. Il est naturel et utile de comprendre ce que la $\mathbb{C}$-linéarité ajoute et signifie géométriquement.

Proposition 1.2.1. — *Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est $\mathbb{C}$-linéaire,*
2. *$u(i) = iu(1)$,*
3. *La matrice de u dans la base canonique $(1, i)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,*
4. *$u = 0$ ou bien u est une similitude.*

Rappelons qu'une *similitude* (vectorielle directe) est par définition la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation (centrées en 0).

Démonstration. — On va montrer $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. $1 \Rightarrow 4$ Une application $\mathbb{C}$-linéaire $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme : $u(z) = \lambda z$, où $\lambda = u(1) \in \mathbb{C}$. Si $\lambda = 0$, $u = 0$. Sinon, $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$; alors u est la composée de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport ρ, donc une similitude. $4 \Rightarrow 3$ Si $u = 0$, $a = b = 0$ conviennent. Si u est une similitude, c'est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport $\rho > 0$, donc sa matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix},$$

de sorte que $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$ conviennent. $3 \Rightarrow 2$ La matrice dit que $u(1) = a1 + bi = a + ib$ et que $u(i) = -b1 + ai = i(a + ib)$, donc $u(i) = iu(1)$. $2 \Rightarrow 1$ Par $\mathbb{R}$-linéarité, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x + iy) = u(x) + u(iy) = xu(1) + yu(i).$$

Avec l'hypothèse $u(i) = iu(1)$, on trouve donc $u(x + iy) = (x + iy)u(1)$, soit $u(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = u(1)$: u est $\mathbb{C}$-linéaire. $\square$

On peut donner une caractérisation encore plus géométrique. Un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire v de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ est dit *conforme* si v est inversible et préserve les angles : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, l'angle (orienté) entre $v(z)$ et $v(z')$ est égal à l'angle entre z et z'.

Proposition 1.2.2. — *Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire non nulle. u est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si u est conforme.*

Démonstration. — Si u est $\mathbb{C}$-linéaire, alors u est une similitude (proposition 1.2.1), donc la composée d'une homothétie de rapport non nul et d'une rotation. Comme ces deux transformations du plan préservent les angles, u est conforme. Supposons maintenant u conforme. Comme u est inversible, $u(1)$ et $u(i)$ sont non nuls. L'angle entre 1 et i est $+\pi/2$, donc l'angle entre $u(1)$ et $u(i)$ est aussi $+\pi/2$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u(i) = \lambda e^{\frac{i\pi}{2}} u(1) = \lambda i u(1)$. De même, l'angle entre $1 - i$ et $1 + i$ est $+\pi/2$, donc il existe $\mu > 0$ tel que $u(1+i) = \mu\, i\, u(1-i)$. Par $\mathbb{R}$-linéarité, $u(1 \pm i) = u(1) \pm u(i) = (1 \pm \lambda i)u(1)$, d'où

$$(1 + \lambda i)u(1) = \mu i(1 - \lambda i)u(1).$$

En simplifiant par $u(1) \neq 0$ et regardant les parties réelles et imaginaires, on arrive à $\lambda\mu = 1$ et $\lambda = \mu$. Avec $\lambda > 0$, cela implique $\lambda = \mu = 1$, donc $u(i) = iu(1)$ et u est $\mathbb{C}$-linéaire par la proposition 1.2.1. □

1.3. Différentiabilité au sens complexe

Définition 1.3.1. — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*différentiable* (ou $\mathbb{C}$-*dérivable*) en a si le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0. On note cette limite :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

C'est la dérivée complexe de f en a.

Cette définition est formellement similaire à celle de la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Néanmoins, ici, on prend h dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, donc on calcule une limite dans $\mathbb{R}^2$ et c'est plus subtil : on exige que le quotient converge vers le même nombre dans toutes les directions, quelle que soit la façon d'approcher a. Avec des quantificateurs, ce qu'on demande, c'est que *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$, tel que*

$$0 < |h| < \rho \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon.$$

Quitte à noter $\epsilon(h)$ la quantité dans le module, on a donc :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\epsilon(h),$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Ainsi, on a le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|). \tag{1}$$

Et en fait l'existence d'un tel développement limité équivaut à la $\mathbb{C}$-différentiabilité de f en a.

Exemple 1.3.2. — $f : z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point $z \in \mathbb{C}$, avec $f'(z) = 1$, car $\dfrac{(z+h) - z}{h} = 1 \to 1$ quand $h \to 0$.

Exemple 1.3.3. — $f : z \mapsto z^2$ est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point $z \in \mathbb{C}$, avec $f'(z) = 2z$ car $\dfrac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \to 2z$ quand $h \to 0$.

Exemple 1.3.4. — Par contre, $f : z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point $z \in \mathbb{C}$ car $\dfrac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \dfrac{\bar{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0 : si l'on regarde $h_n = 1/n$ et $h_n = i/n$, on trouve que les quotients $\dfrac{\bar{h}_n}{h_n}$ valent respectivement 1 et -1, donc n'ont pas la même limite.

Si l'on pense que $\mathbb{C}$ n'est autre que le plan réel $\mathbb{R}^2$, on y dispose déjà d'une notion de différentiabilité : si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in \Omega$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $Df_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle qu'on ait le développement limité

$$f(a+h) = f(a) + Df_a(h) + o(|h|). \tag{2}$$

Dans cet énoncé, $\mathbb{C}$ n'est qu'une notation pour $\mathbb{R}^2$. Rappelons que le module $|h|$ de $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ n'est autre que la norme euclidienne de $h \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. C'est vraiment la définition usuelle de la différentiabilité pour une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$!

Théorème 1.3.5. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est $\mathbb{C}$-différentiable en a.*
2. *f est $\mathbb{R}$-différentiable en a et sa différentielle Df_a est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Dans ce cas, Df_a est l'application $h \mapsto f'(a)h$.

Démonstration. — Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en a, on a le développement limité (1), où le terme $h \mapsto f'(a)h$ est en particulier $\mathbb{R}$-linéaire, donc fournit la différentielle $h \mapsto Df_a(h)$; comme ce terme est en fait $\mathbb{C}$-linéaire, Df_a est $\mathbb{C}$-linéaire. Réciproquement, si f est $\mathbb{R}$-différentiable en a, avec Df_a $\mathbb{C}$-linéaire, alors Df_a est de la forme $h \mapsto \lambda h$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Le développement limité (2) donne

$$f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(|h|)$$

et donc f est $\mathbb{C}$-différentiable en a, avec $f'(a) = \lambda$. □

Il est utile, pour certains calculs pratiques, d'interpréter ceci en termes de dérivées partielles. Notons $P = \mathrm{Re(f)}$ et $Q = \mathrm{Im(f)}$, de sorte que $f = P + iQ = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, toujours grâce à l'identification canonique de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la matrice dans la base canonique de Df_a est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Au vu de la proposition 1.2.1 (3.), cette matrice représente une application $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a) \tag{3}$$

Ce sont les *équations de Cauchy-Riemann.*

Corollaire 1.3.6. — *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-différentiable en un point a d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. La fonction f est $\mathbb{C}$-différentiable en a si et seulement si les fonctions $P=\mathrm{Re(f)}$ et $Q=\mathrm{Im(f)}$ vérifient les équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a)=\frac{\partial Q}{\partial y}(a) \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(a)=-\frac{\partial Q}{\partial x}(a).$$

Remarque 1.3.7. — Que valent les dérivées partielles d'une fonction f qui est $\mathbb{C}$-différentiable en a ? Les vecteurs de la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ sont $(1,0)=1$ et $(0,1)=i$, donc ces dérivées partielles valent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=Df_a(1)=f'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a)=Df_a(i)=if'(a).$$

On peut aussi voir ces formules en regardant le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $h=\epsilon$ puis $h=i\epsilon$, où ϵ est un *réel* tendant vers 0.

En particulier, on voit que, si f est un prolongement complexe d'une fonction réelle le long de l'axe réel, alors sa dérivée complexe coïncide avec sa dérivée réelle le long de l'axe réel (et il n'y a pas de conflit de notation autour de f' !).

Remarque 1.3.8. — Mentionnons ici un autre point de vue. On considère une fonction f qui est $\mathbb{R}$-différentiable en a et on part de la formule

$$Df_a(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_x+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_y,$$

où $h=(h_x,h_y)=h_x+ih_y$, i.e. $h_x=\mathrm{Re(h)}=\dfrac{\mathrm{h}+\bar{\mathrm{h}}}{2}$ et $h_y=\mathrm{Im(h)}=\dfrac{\mathrm{h}-\bar{\mathrm{h}}}{2\mathrm{i}}$. En exprimant h_x et h_y en termes de h et $\bar{h}$, on obtient

$$Df_a(h)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)h+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h},$$

où l'on note

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Comme $Df_a(i)-iDf_a(1)=-2i\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)$, la proposition 1.2.1 (2.) montre que Df_a est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)=0$; dans ce cas, f est $\mathbb{C}$-différentiable en a et $f'(a)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$. L'équation $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ condense les équations de Cauchy-Riemann : en écrivant $f=P+iQ$ comme ci-dessus, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

de sorte que les équations de Cauchy-Riemann (3) sont les parties réelle et imaginaire de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. On retrouve aussi la remarque précédente 1.3.7.

1.4. Fonctions holomorphes

Définition 1.4.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de Ω. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Les propriétés suivantes se démontrent comme leurs analogues concernant les fonctions d'une variable réelle. On laisse au lecteur le soin de les (re)démontrer en utilisant la définition par le taux de variation ou le développment limité complexe à l'ordre 1.

1. Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $(af+bg)$ et fg sont holomorphes et $(af+bg)' = af'+bg'$ et $(fg)' = fg' + f'g$. De plus, tant que g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est holomorphe et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.
2. $\mathcal{O}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $C^0(\Omega)$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$.
3. Les polynômes complexes ($P \in \mathbb{C}[z]$) sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Leurs dérivées sont données par les formules usuelles.
4. Une fraction rationnelle complexe ($R \in \mathbb{C}(z)$) est holomorphe sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble de ses pôles.
5. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $g \in \mathcal{O}(\Omega')$ et $f(\Omega) \subset \Omega'$, alors $g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Une fonction holomorphe est en particulier une fonction $\mathbb{R}$-différentiable entre ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc le calcul différentiel usuel s'applique, souvent avec plus de simplicité, puisque la différentielle de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est simplement la multiplication par un nombre complexe. Ainsi, le théorème d'inversion locale en z nécessite simplement que $f'(z)$ soit non nul ; de même, l'inégalité des accroissement finis s'écrira

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \sup_{[z_1,z_2]} |f'|.$$

La topologie dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ jouera un rôle important dans ce cours. Par exemple, la connexité interviendra dans de nombreux énoncés. Le résultat suivant est l'occasion de réviser.

Proposition 1.4.2. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f' = 0$. Alors f est constante.*

Démonstration. — Soient $z_0 \in \Omega$ et $c = f(z_0)$. Alors $U = f^{-1}(\{c\})$ est un fermé non vide de Ω (fermé par continuité de f et non vide car contenant z_0). Montrons que U est ouvert. Soit $z \in U$. Comme z appartient à l'ouvert Ω, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$. Pour $w \in D(z, r)$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis pour voir que $f(w) = f(z) = c$. Donc $D(z, r) \subset U$. Ceci montre que U est ouvert. C'est donc un ouvert/fermé non vide du connexe Ω : $U = \Omega$ et f est constante à c. □

Le théorème 1.3.5 et la proposition 1.2.2 donnent une interprétation géométrique de l'holomorphie : une fonction holomorphe est une fonction dont la différentielle en chaque point est soit nulle, soit conforme. Dans le second cas, elle préserve donc les angles infinitésimaux. Développons un peu.

On se place sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on prend $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ tel que $f'(a) \neq 0$. Considérons alors deux courbes paramétrées γ_1, $\gamma_2 \colon [0,1] \to \Omega$, différentiables, telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ et $\gamma_1'(0) = v_1 \neq 0$, $\gamma_2'(0) = v_2 \neq 0$: elles se coupent au temps $t = 0$ en formant un angle θ, l'angle entre v_1 et v_2. Alors les courbes $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ se coupent en $f(a)$, au temps $t = 0$, et, par la formule

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)),$$

on voit que leurs vecteurs vitesses à l'intersection sont $Df_a(v_i)$, $i = 1, 2$. Comme Df_a est conforme, l'angle entre $Df_a(v_1)$ et $Df_a(v_2)$ est égal à l'angle θ entre v_1 et v_2. C'est en ce sens que f préserve les angles : f envoie deux courbes se coupant en un point a en formant un angle θ sur deux courbes se coupant en un point $f(a)$ en formant le même angle θ (pourvu que $f'(a) \neq 0$).

CHAPITRE 2

FONCTIONS ANALYTIQUES

Les fonctions analytiques sont les fonctions complexes s'écrivant localement comme somme d'une série entière. La motivation première de l'étude de cette famille de fonctions est d'enrichir notre gamme d'exemples de fonctions holomorphes. Nous verrons plus tard qu'en fait *toutes* les fonctions holomorphes sont analytiques !

2.1. Rappels sur les séries de fonctions

Soient un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et des fonctions $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et on veut donner un sens à sa somme, qu'on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$; si elle est bien définie, c'est la fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ qui à un point $z \in \mathbb{C}$ associe le nombre complexe $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$. Différentes notions de convergence sont pertinentes.

On dit d'abord que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge *simplement* si, pour tout $z \in \Omega$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(z)$ converge, i.e. si $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(z)$ existe, dans $\mathbb{C}$. C'est la convergence "minimale".

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge *absolument* si, pour tout $z \in \Omega$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n(z)|$ converge. Comme les séries à termes positifs ont toujours une somme bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on demande en fait : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)| < +\infty$. La convergence absolue implique la convergence simple, par complétude de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *uniformément* si elle converge simplement et vérifie $\lim_{N\to+\infty} \sup_{z\in\Omega} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(z)\right| = 0$. Autrement dit, avec des quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq N_0, \quad \forall z \in \Omega, \quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(z)\right| \leq \epsilon.$$

C'est la convergence qui permet d'obtenir des propriétés de régularité sur la somme d'une série de fonctions. Par exemple, si les fonctions u_n sont continues et si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est elle-même une fonction continue.

Enfin, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *normalement* si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \sup_\Omega |u_n|$ converge, c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_\Omega |u_n| < +\infty$. C'est la convergence la plus forte. Elle implique la convergence absolue (majorer $|u_n(z)|$ par $\sup_\Omega |u_n|$) mais aussi la convergence uniforme $\Big($majorer $\sup_\Omega \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n\right|$ par $\sum_{n=N}^{+\infty} \sup_\Omega |u_n|$ $\Big)$. On peut remarquer qu'elle n'est pas équivalente à la convergence uniforme : si l'on pose $u_n(z) = 1/n$ si $z = n$ et $u_n(z) = 0$ sinon, on peut vérifier que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$, mais pas normalement. Néanmoins, la convergence normale a l'avantage d'être relativement facile à vérifier en pratique : c'est presque toujours via la convergence normale qu'on obtient la convergence uniforme.

2.2. Séries entières complexes

Ce sont les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n : z \mapsto a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Un léger abus de notation nous fera écrire $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, voire $\sum a_n z^n$, pour désigner ces fonctions. Leur théorie repose sur le lemme suivant.

***Lemme 2.2.1* (Abel).** — *Soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\overline{D(0,s)}$ pour tout $s < r$.*

Démonstration. — Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq M$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in]0, r[$, on a alors

$$\sup_{z\in\overline{D(0,s)}} |a_n z^n| = |a_n| s^n \leq M \left(\frac{s}{r}\right)^n.$$

Comme $s/r < 1$, la série géométrique $\sum M \left(\frac{s}{r}\right)^n$ converge. Donc le membre de gauche est le terme général d'une série convergente et cela donne la convergence normale voulue. □

Théorème 2.2.2. — *Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, on définit :*

$$R = \sup\{r \geq 0 \ / \ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

Alors la série converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$.

Ce R est le *rayon de convergence* de la série entière. Le disque $D(0, R)$ est le *disque de convergence*, avec la convention naturelle $D(0, +\infty) = \mathbb{C}$.

Le théorème découle immédiatement du lemme d'Abel et, en fait, on a plus d'information. Si $|z| > R$, la suite $(a_n|z|^n)$ n'est pas bornée (par définition de R), donc ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement. Par contre, si $0 \leq s < R$, alors $(a_n s^n)$ est une suite bornée et le lemme d'Abel assure la convergence *normale* sur le disque $\overline{D(0, s)}$. C'est important ! Cela montre tout de suite que la somme d'une série entière est continue, et même beaucoup plus, cf. 2.3.4. Cette convergence normale permet aussi d'intégrer terme à terme les séries entières, sans précaution d'aucune sorte.

Il convient de noter qu'on n'a, en général, pas de convergence normale sur la totalité du disque $D(0, R)$, parce qu'il peut y avoir des problème au bord. Au fond, tout peut se passer sur le cercle de rayon R : convergence en certains points, divergence en d'autres...

On peut donner une formule pour le rayon de convergence.

***Lemme 2.2.3* (Formule d'Hadamard).** — *Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule : $R = \dfrac{1}{\limsup\left(|a_n|^{1/n}\right)}$.*

Rappelons brièvement les notions de limites supérieure et inférieure. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On pose $s_n = \sup\{x_k \ / \ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La suite (s_n) est décroissante donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: on la note $\limsup(x_n)$ ou $\overline{\lim}(x_n)$. On définit de même $\liminf = \underline{\lim}$, en regardant les inf au lieu des sup.

En fait, on peut voir que $\limsup(x_n)$ (resp. $\liminf(x_n)$) est la plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence de (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$. En particulier, (x_n) admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup(x_n) = \liminf(x_n)$. Donnons un exemple : si $x_n = (-1)^n + 1/n$, alors $\limsup(x_n) = 1$ et $\liminf(x_n) = -1$.

Démonstration. — Notons $\rho = 1/\limsup\left(|a_n|^{1/n}\right)$ et prenons un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$.

Si $|z|/\rho > 1$, on obtient $\limsup(|z||a_n|^{1/n}) > 1$, donc on a $|a_n z^n| > 1$ pour une infinité de valeurs de n : la série diverge.

Si $|z|/\rho < 1$, alors $\limsup(|z||a_n|^{1/n}) < 1$, donc on peut trouver $c < 1$ tel que $|z||a_n|^{1/n} \leq c$ i.e. $|a_n||z|^n \leq c^n$ pour n assez grand : la série converge.

Ceci montre que le rayon convergence R est ρ. □

Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière, sa *série entière dérivée* est la série entière

$$\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n.$$

La formule d'Hadamard (par exemple) montre que la série entière dérivée a le même rayon de convergence que la série entière initiale. En effet, comme $(n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} \to 1$ et $\dfrac{n+1}{n} \to 1$, on a

$$\limsup\left((n+1)|a_{n+1}|\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup\left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \limsup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}},$$

ce qui, à un décalage d'indice près, est bien la formule d'Hadamard pour le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

On peut faire des combinaisons linéaires de séries entières : si on a deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergentes sur le disque $D(0,r)$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ la série entière $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)z^n$ converge sur $D(0,r)$ et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

On peut aussi faire des produits. Cela nécessite de manipuler des sommes doubles et nous allons le faire via les théorèmes de Fubini. Rappelons d'abord qu'une somme à termes positifs (ou l'intégrale d'une fonction mesurable positive) a toujours un sens, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Munissons $\mathbb{N}$ de la mesure de dénombrement (sur la tribu discrète) et $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la mesure produit. Dans ce cadre, le théorème de Fubini-Tonelli dit que si on se donne des nombres $a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

Le théorème de Fubini-Lebesgue permet de traiter le cas des sommes de nombres complexes : si on se donne des nombres $z_{m,n} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |z_{m,n}| < +\infty$, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} z_{m,n}$, $\sum\limits_{m\geq 0}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_{m,n}\right)$, $\sum\limits_{m\geq 0} z_{m,n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} z_{m,n}\right)$ sont absolument convergentes et

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} z_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} z_{m,n}.$$

Ceci permet de calculer des produits de séries.

Lemme 2.2.4. — *Soient deux séries absolument convergentes* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Alors la série* $\sum c_n$ *est absolument convergente et on a la formule*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration. — Ecrivons $c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}$, où $\alpha_{k,n} = a_k b_{n-k}$ si $k \leq n$, $\alpha_{k,n} = 0$ sinon. Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{k,n}| = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} |a_k||b_{n-k}| = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k||b_n| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\right)$$

et ces sommes sont finies par convergence absolue des séries. Par Fubini-Lebesgue (cf. rappel ci-dessus), on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_k b_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Comme $c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n}$, c'est bien le résultat voulu. □

Corollaire 2.2.5. — *Soient deux séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *convergentes sur le disque* $D(0,r)$. *Posons* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Alors la série entière* $\sum c_n z^n$ *converge aussi sur* $D(0,r)$ *et on a la formule*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

2.3. Fonctions analytiques

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie au voisinage de z_0. On dit que f est *développable en série entière* au voisinage de z_0 s'il existe $r > 0$ et une suite a_n, $n \in \mathbb{N}$, de nombres complexes tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

La convergence du second membre fait partie de la condition !

Définition 2.3.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *analytique* sur Ω si f est développable en série entière au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω. Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ est appelée fonction *entière*.

Les fonctions analytiques sont donc celles qui s'écrivent localement comme des séries entières. Elles récupèrent donc les propriétés d'icelles. En particulier, le paragraphe précédent assure que $\mathcal{A}(\Omega)$ est une sous-algèbre de $C^0(\Omega)$.

Avant de préciser leurs propriétés, donnons des exemples fondamentaux : les séries entières et les fractions rationnelles.

Théorème 2.3.2. — *La somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est analytique sur $D(0, R)$.*

Démonstration. — Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, pour $z \in D(0, r)$. Soit $z_0 \in D(0, R)$: on veut voir que f est développable en série entière au voisinage de z_0. Pour $z \in D(z_0, R - |z_0|)$, on écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n},$$

où $\alpha_{k,n} = a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k$ si $k \leq n$, $\alpha_{k,n} = 0$ sinon. Par convergence absolue de $\sum a_n z^n$ sur $D(0, R)$, on assure $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{k,n}| < +\infty$. Par Fubini-Lebesgue, on peut alors permuter les sommes et obtenir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

avec $b_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}$; la convergence des séries en jeu est donnée aussi par Fubini-Lebesgue.

□

Exemple 2.3.3. — Soit f une fraction rationnelle (complexe) de pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Alors f est une fonction analytique sur $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. Montrons-le. Par décomposition en éléments simples, f est la somme d'un polynôme complexe et d'une combinaison linéaire de fonctions du type $z \mapsto \frac{1}{(z - \alpha_i)^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Comme les sommes et produits de fonctions analytiques sont analytiques, il suffit de montrer que pour tout i, $z \mapsto \frac{1}{z - \alpha_i}$ est analytique sur Ω. Soit donc $z_0 \in \Omega$. On pose $r = \min(|z_0 - \alpha_1|, \ldots, |z_0 - \alpha_p|)$ et on prend $z \in D(z_0, r)$:

$$\frac{1}{z - \alpha_i} = \frac{1}{(z - z_0) - (\alpha_i - z_0)} = \frac{1}{z_0 - \alpha_i} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\alpha_i - z_0}} = \frac{1}{z_0 - \alpha_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_i - z_0} \right)^n (z - z_0)^n;$$

cette série converge car $\left| \frac{z - z_0}{\alpha_i - z_0} \right| < \frac{r}{|z_0 - \alpha_i|} \leq 1$.

Théorème 2.3.4. — *Toute fonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ y est holomorphe.*

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Alors on a au voisinage de z_0 un développement du type $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. En particulier, $f(z_0) = a_0$ et donc pour h petit non nul, on a :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} h^n.$$

Le membre de droite converge vers a_1 quand $h \to 0$ (convergence normale sur un petit disque autour de 0). Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0) = a_1$. □

Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$, on peut décrire f par une série entière

$$g(h) = f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

et cette formule est valide pour h dans un disque $D(0, r)$. Alors on peut voir que f' est donnée par la série entière dérivée. En fait, cela découle de ce qu'on a fait. Si on se donne $h_1 \in D(0, r)$, la preuve ci-dessus dit que $g'(h_1)$ est le coefficient devant $h - h_1$ dans le développement en série entière de g en h_1. Or on a calculé ce coefficient dans la preuve de 2.3.2 : c'est le coefficient $b_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \binom{n}{1} h_1^{n-1}$. En simplifiant, on trouve donc : $\forall h_1 \in D(0, r), \quad g'(h_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n h_1^{n-1}$. Si on revient à la fonction f, en posant $z = z_0 + h_1$, cela donne

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

En particulier, f' est encore analytique sur Ω, donc holomorphe. Et on peut itérer ce raisonnement. Ainsi, une fonction analytique est infiniment $\mathbb{C}$-différentiable (et en particulier C^∞). En outre, on peut itérer la formule ci-dessus pour obtenir le développement en série entière de la $\mathbb{C}$-dérivée k-ième de f :

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

En particulier, on trouve $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$. Résumons !

Théorème 2.3.5. — *Soit f une fonction analytique. Alors :*
- *f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable ;*
- *pour tout point z_0, le développement en série entière de f au point z_0 s'écrit comme un développement de Taylor*

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad ; \tag{4}$$

- *le développement en série entière en z_0 des dérivées successives de f s'obtient en dérivant terme à terme le développement de f, sur le même disque $D(z_0, r)$.*

Voyons maintenant des propriétes qualitatives qui découlent de cette discussion. Les énoncés qui suivent sont plus ou moins évidents si on considère des fonctions polynomiales. Il est frappant qu'ils persistent dans la classe plus large des fonctions analytiques.

Corollaire 2.3.6. — *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. On suppose qu'il existe un point $a \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est nulle sur Ω.*

Démonstration. — Soit $A = \{z \in \Omega / \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = 0\}$. C'est l'intersection des fermés $(f^{(n)})^{-1}(\{0\})$, $n \in \mathbb{N}$, donc un fermé de Ω. De plus, A contient a, donc A est un fermé non vide du *connexe* Ω. On va montrer que A est également ouvert, ce qui permettra de conclure que $A = \Omega$, d'où le résultat. Prenons $z_0 \in A$. Comme les dérivées $f^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$, sont toutes nulles, la formule (4) montre que si z est dans un certain disque $D(z_0, r)$, $r > 0$, alors $f(z) = 0$. Donc f est identiquement nulle sur $D(z_0, r)$, et donc ses dérivées aussi : $D(z_0, r) \subset A$. Ceci montre que A est ouvert. □

Corollaire 2.3.7. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si deux fonctions $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ sont égales sur un ouvert non vide U de Ω, elles sont égales sur Ω.*

Ce résultat montre *l'unicité du prolongement analytique* : si f et g sont deux extensions analytiques d'une même fonction de $A(U)$, le corollaire dit qu'elles sont forcément égales.

Démonstration. — On applique le corollaire précédent à $f - g$, en un point a de l'ouvert U. □

Le résultat suivant est une variante importante de ces corollaires : c'est encore une propriété de rigidité des fonctions analytiques.

***Théorème 2.3.8* (Principe des zéros isolés).** — *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Si f n'est pas la fonction nulle, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f est constitué de points isolés : si $z_0 \in \Omega$ est un zéro de f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ et z_0 est le seul zéro de f contenu dans $D(z_0, \varepsilon)$.*

Cela revient à dire que l'ensemble $Z_f = f^{-1}(\{0\})$ est une partie *discrète* de Ω : la topologie induite sur Z_f est la topologie discrète, i.e. tous les singletons sont ouverts (et fermés). Pour tout compact K de $\mathbb{C}$, $K \cap Z_f$ est donc fini : en effet, c'est un compact (intersection d'un compact et d'un fermé) et on peut appliquer la propriété de Borel-Lebesgue au recouvrement ouvert fourni par tous ses singletons !

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Dans le développement en série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, on a donc $a_0 = f(z_0) = 0$. Si f n'est pas la fonction nulle, 2.3.6 montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ et donc $a_n \neq 0$. Notons p le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$. Alors on peut écrire $f(z) = \displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^p g(z)$ où g est analytique au voisinage de z_0 et $g(z_0) = a_p \neq 0$. Par continuité, g ne s'annule pas sur un disque $D(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Sur ce disque, l'équation $f(z) = 0$ impose $(z - z_0)^p = 0$, soit $z = z_0$. □

Le contraire d'un point isolé est un point d'accumulation : étant donné $A \subset \mathbb{C}$, on dit qu'un point a de A est un point d'accumulation de A si, pour tout $\varepsilon > 0$, $(A \backslash \{a\}) \cap D(a, \varepsilon)$ n'est pas vide ; il est équivalent de demander l'existence d'une suite de points a_n de $A \backslash \{a\}$ telle que $(a_n) \to a$.

Corollaire 2.3.9. — *Soient f et g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Si l'ensemble $\{z \in \Omega \;/\; f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$.*

Cet énoncé renforce le principe d'unicité du prolongement analytique. Par exemple, deux fonctions analytiques qui coïncident le long d'un intervalle réel sont égales partout.

Démonstration. — L'hypothèse dit que la fonction analytique $h = f - g$ admet un zéro non isolé. Par le principe des zéros isolés, ce n'est possible que si h est identiquement nulle, i.e. $f = g$. □

Remarque 2.3.10. — Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ une fonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Supposons que f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0. Dans la démonstration du principe des zéros isolés, on a vu qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f(z) = (z - z_0)^p h(z)$$

au voisinage de z_0, pour une fonction h analytique non nulle au voisinage de z_0. Cet entier est déterminé par

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

ou bien par le développement en série entière

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{avec} \qquad a_p \neq 0.$$

Cet entier p est appelé *l'ordre d'annulation* de f en z_0. On parle aussi de *multiplicité* du zéro z_0, soulignant ainsi l'analogie polynomiale.

On peut calculer l'ordre d'annulation en faisant un développement limité en z_0, puisque $f(z) \sim c\,(z - z_0)^p$, avec $c = h(z_0) \neq 0$.

Exemple 2.3.11. — Considérons une fonction $\phi : z \mapsto f(z)/g(z)$, qui s'écrit comme quotient de deux fonctions analytiques f et g sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que f et g s'annulent en $z_0 \in \Omega$ et nulle part ailleurs. Alors ϕ est holomorphe comme quotient de fonctions holomorphes sur l'ouvert $\Omega \backslash \{z_0\}$. On peut raffiner ceci à l'aide de la remarque 2.3.10. Notons p et q les multiplicités respectives du zéro z_0 de f et g. Si $p \geq q$, alors ϕ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω tout entier.

En effet, au voisinage de z_0, on peut écrire $f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$ et $g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)$, avec f_1 et g_1 analytiques et non nulles au voisinage de z_0. Dans ce voisinage privé de z_0, on obtient $\phi(z) = (z - z_0)^{p-q} f_1(z)/g_1(z)$. Le membre de droite définit une fonction holomorphe au voisinage de z_0 (y compris en z_0 puisque $p - q \geq 0$ et g_1 ne s'annule pas). Donc il fournit un prolongement holomorphe de ϕ en z_0.

2.4. Exponentielle complexe

2.4.1. Définition. — La série entière de terme général $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, pour $n \geq 0$, a pour rayon de convergence $+\infty$ puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|}{n+1} = 0 < 1$ (critère de D'Alembert). On appelle *exponentielle complexe* la somme de cette série de fonctions et on note :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lemme 2.4.1. — *L'exponentielle a les propriétés suivantes.*

1. exp *est une fonction entière vérifiant* $\exp' = \exp$.
2. $e^0 = 1$ *et* $e^{a+b} = e^a\, e^b$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{C}$.
3. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Démonstration. — Par définition, exp est analytique sur $\mathbb{C}$ donc entière. En dérivant terme à terme, on obtient :

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dz}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \exp(z).$$

$e^0 = 1$ vient de la formule définissant exp. La formule pour le produit de deux séries et la formule du binôme de Newton montrent qu'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!},$$

d'où $e^a\, e^b = e^{a+b}$. Le dernier point résulte de la $\mathbb{R}$-linéarité et de la continuité de la conjugaison complexe. □

A partir de ceci, on peut *démontrer* les propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe, notamment sa périodicité. Commençons par deux remarques rapides.

Remarque 2.4.2. — $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$: en effet, s'il y avait un b tel que $e^b = 0$, alors, par 2., on aurait $e^z = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ce qui contredit $e^0 = 1$.

Remarque 2.4.3. — $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ par 3. La positivité des coefficients de la série entière de exp montre que la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (puisque $e^x \geq x^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et vers 0 en $-\infty$ (par 2., on a $e^{-x} = 1/e^x$) : c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la réciproque de cette restriction de l'exponentielle à l'axe réel.

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de l'exponentielle le long de la droite imaginaire $i\mathbb{R}$. Les propriétés 2. et 3. ci-dessus donnent, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|e^{it}|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1.$$

Donc $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. De plus, si l'on pose, pour t réel, $\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$ et $\sin t = \mathrm{I}m(e^{it})$, on trouve $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = |e^{it}|^2 = 1$. Le développement en série entière de exp donne des formules pour les parties réelle et imaginaire de e^{it} :

$$\cos t = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin t = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Il s'agit bien sûr des fonctions trigonométriques usuelles, mais nous ne supposons a priori rien de connu sur leurs propriétés. En particulier, on va donner une (la ?) définition du nombre π.

La formule ci-dessus donne $\cos 0 = 1 > 0$, $\cos 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p}}{(2p)!} \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} < 0$ (série alternée), donc par continuité, il existe un t_0 minimal dans $]0, 2[$ tel que $\cos t_0 = 0$. On pose $\pi = 2t_0$.

En dérivant par rapport à t l'identité $\cos t + i \sin t = e^{it}$, on trouve $\cos'(t) + i \sin'(t) = ie^{it} = i \cos t - \sin t$, d'où : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Comme cos est strictement positif sur $]0, \pi/2[$ par construction de π, sin est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$; en particulier, comme $\sin(0) = 0$ et $1 = \sin(\pi/2)^2 + \cos(\pi/2)^2 = \sin(\pi/2)^2$, on en déduit $\sin(\pi/2) = 1$. Alors $e^{\frac{i\pi}{2}} = 0 + i1 = i$, donc (avec 2.) $e^{i\pi} = e^{\frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2}} = (e^{\frac{i\pi}{2}})^2 = -1$ et de même $e^{2i\pi} = 1$. De nouveau avec 2., on en déduit que exp est $2i\pi$-périodique :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + 2i\pi) = \exp(z).$$

En particulier, ceci donne la 2π-périodicité des fonctions cos et sin. La stricte croissance de sin sur $[0, \pi/2]$, son imparité (cf. formule) et l'identité $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ (conséquence de $e^{i\pi} = -1$) déterminent le tableau de variation de sin. De même pour cos. On obtient ainsi l'allure usuelle des graphes de ces fonctions.

On étend les fonctions cosinus et sinus au plan complexe en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

de sorte que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\ .$$

Ce sont encore des fonctions entières (donc holomorphes sur $\mathbb{C}$). On notera par exemple que la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est vraie sur $\mathbb{C}$: elle est vraie sur $\mathbb{R}$ (cf. ci-dessus) donc partout, par le principe des zéros isolés (2.3.9).

On peut aussi étendre les fonctions de la trigonométrie hyperbolique :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Mais ces fonctions ne sont guère différentes des précédentes : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \mathrm{ch}(iz)$ et $i \sin z = \mathrm{sh}(iz)$. En particulier, on notera que la fonction $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bornée, puisque sa restriction à l'axe imaginaire est la fonction cosinus hyperbolique (réelle).

Revenons à l'exponentielle et montrons qu'elle est essentiellement surjective.

Proposition 2.4.4. — $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *est surjective et, pour* $t, t' \in \mathbb{R}$*, on a* $\exp(it) = \exp(it')$ *ssi* $t = t'$ *modulo* 2π*.*

Démonstration. — Prenons d'abord $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $\mathrm{I}m(z) \geq 0$: $z = x + iy$, avec $x \in [-1, 1]$ et $y \in [0, 1]$. Comme cos établit une bijection entre entre $[0, \pi]$ et $[-1, 1]$ (cf. graphe), il existe $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos t = x$. Avec $y^2 = 1 - x^2 = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$ et $y, \sin t \geq 0$, on en tire $y = \sin t$, donc $z = e^{it}$. Maintenant, si $z \in \mathbb{S}^1$ est de partie imaginaire négative, alors $|\bar{z}| = 1$ et $\mathrm{I}m(\bar{z}) \geq 0$, de sorte que le cas précédent donne un $t \in [0, \pi]$ tel que $\bar{z} = e^{it}$, soit $z = e^{-it}$. Ceci prouve la surjectivité. Si on se donne $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\exp(it) = \exp(it')$, on trouve $e^{is} = 1$ pour $s = t - t'$; donc $\cos s = 1$. Quitte à ajouter un multiple de 2π à t ou t', on peut supposer $s \in [0, 2\pi[$. Or le graphe de cos montre que l'équation $\cos s = 1$, pour $0 \leq s < 2\pi$, admet pour unique solution $s = 0$. □

Corollaire 2.4.5. — $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective et, pour* $z, z' \in \mathbb{C}$*, on a* $\exp(z) = \exp(z')$ *ssi* $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$*.*

Démonstration. — Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$. C'est le produit d'un élément de $\mathbb{R}_+^*$ et d'un élément de $\mathbb{S}^1$. Par surjectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, on trouve $x, t \in \mathbb{R}$ tels que $z = e^x e^{it} = \exp(x + it)$. Par injectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, x est uniquement déterminé. Par la proposition 2.4.4, t est déterminé à 2π près. Donc z est déterminé à $2i\pi$ près. □

Remarque 2.4.6. — Dans les applications, on a parfois besoin de calculer le module de l'exponentielle de quelque chose. Or si x et y sont réels, on a $|e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x$ d'après ce qui précède. On retiendra :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

2.5. Logarithmes complexes

Bâtir un logarithme complexe en inversant l'exponentielle complexe n'a pas de sens a priori, puisque l'exponentielle n'est pas bijective. Néanmoins, on peut le faire en restreignant l'exponentielle à des ouverts où elle est bijective. Il y a un choix usuel, qui mène à la définition d'un logarithme dit "principal". Néanmoins, il faut garder à l'esprit que c'est un choix et que les applications nécessitent parfois d'utiliser d'autres logarithmes.

Pour bâtir le logarithme principal, on va restreindre l'exponentielle complexe à la bande $\mathbb{R} + i] - \pi, \pi[= \{z \ / \ |\mathrm{I}m(z)| < \pi\}$, où elle est injective par 2.4.5. L'image de cette bande par l'exponentielle est $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Donc tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ admet un unique antécédent $\mathrm{Log}(z)$ dans la bande $\mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$. Ceci définit le *logarithme principal*

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$$

et on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-, \quad e^{\mathrm{Log}(z)} = z.$$

Ce choix de logarithme est intimement lié à un choix d'argument pour les nombres complexes.

Si z est un élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, alors $z/|z|$ est dans $\mathbb{S}\backslash\{-1\}$ et la proposition 2.4.4 montre qu'il existe un unique $t\in]-\pi,\pi[$ tel que $e^{it}=z/|z|$. On le note $t=\mathrm{Arg}(z)$ et on l'appelle *argument principal* de z. On obtient ainsi une fonction

$$\mathrm{Arg}:\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-\to]-\pi,\pi[\qquad\text{telle que}\qquad\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-,\quad z=|z|e^{i\,\mathrm{Arg}(z)}.$$

Remarque 2.5.1. — Cette fonction est continue. Pour le voir, on va donner des formules. Observons que cos est une fonction strictement décroissante continue sur $[0,\pi]$, d'image $[-1,1]$, donc admet sur cet intervalle une réciproque continue arccos : $[-1,1]\to[0,\pi]$. La preuve de 2.4.4 montre que pour $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z)&=\arccos\mathrm{Re}(z/|z|)\qquad\text{si }\mathrm{Im}(z)\geq 0,\\&=-\arccos\mathrm{Re}(\overline{(z/|z|)})=-\arccos\mathrm{Re}(z/|z|)\qquad\text{si }\mathrm{Im}(z)\leq 0.\end{aligned}$$

Ces deux formules coïncident sur $\mathbb{R}_+$: si $\mathrm{Im}(z)=0$, $z/|z|$ est un réel positif de module 1, i.e. 1, donc $\arccos\mathrm{Re}(z/|z|)=\arccos(1)=0$. Ceci montre que l'argument principal est une fonction continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Pour comprendre le lien entre logarithme principal et argument principal, on écrit, pour $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $\mathrm{Log}(z)=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-\pi,\pi[$. Alors :

$$z=e^{\mathrm{Log}(z)}=e^{x+iy}=e^xe^{iy},$$

de sorte que $|z|=e^x$ et $e^{iy}=z/|z|$. La première équation est réelle et donne $x=\ln|z|$. La seconde donne alors $y=\mathrm{Arg}(z)$. Donc :

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-,\quad\mathrm{Log}(z)=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}(z).\tag{5}$$

On note au passage que la restriction de Log à la demi-droite $\mathbb{R}_+^*$ n'est autre que le logarithme néperien.

Remarque 2.5.2. — Avec $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on obtient $\mathrm{Log}(j)=2i\pi/3$ et $\mathrm{Log}(j^2)=-2i\pi/3$ (on prend l'argument dans $]-\pi,\pi[$!). En particulier, $\mathrm{Log}(j^2)\neq 2\,\mathrm{Log}(j)$. Les logarithmes complexes, en général, ne transforment pas produit en somme !

Ces définitions sont arbitraires. Pourquoi $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$? Pourquoi ne choisirait-on pas l'argument dans $]0,2\pi[$? Dans les applications, de façon générale, on aura besoin de se placer sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}^*$ et d'y considérer des fonctions continues $L:\Omega\to\mathbb{C}$ et $A:\Omega\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-,\quad e^{L(z)}=z\qquad\text{et}\qquad z=|z|e^{iA(z)}.$$

De telles fonctions sont appelées des *déterminations continues du logarithme* (L) et de l'argument (A). On abrégera parfois en logarithme/argument.

Ainsi, le logarithme principal Log est une détermination continue du logarithme sur $\Omega=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et l'argument principal Arg est une détermination continue de l'argument sur $\Omega=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ (par la remarque 2.5.1 et la formule (5)).

Remarque 2.5.3. — En prenant le module de la relation $e^{L(z)} = z$, on voit que la partie réelle de $L(z)$ est toujours $\ln|z|$, comme dans la preuve de (5). En fait, logarithmes et arguments sont toujours reliés par la formule
$$L(z) = \ln|z| + iA(z).$$
L est une détermination continue du logarithme ssi A est une détermination continue de l'argument.

Exemple 2.5.4. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Au lieu de prendre les arguments dans $]-\pi, \pi[$, on peut les prendre dans $]-\pi+\alpha, \pi+\alpha[$. On obtient ainsi un logarithme L_α sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash D_\alpha$, où D_α est la demi-droite $e^{i\alpha}\mathbb{R}_-$. On vérifie que la formule
$$L_\alpha(z) = \mathrm{Log}(e^{-i\alpha}z) + i\alpha$$
fournit bien une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$.

Remarque 2.5.5. — Si L_1 et L_2 sont deux déterminations continues du logarithme sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}^*$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in \Omega$, $L_1(z) - L_2(z) = 2ik\pi$. En effet, pour tout $z \in \Omega$, $e^{L_1(z)-L_2(z)} = 1$. Donc $L_1 - L_2$ prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Or c'est une fonction continue sur un connexe, donc son image est un connexe de $2i\pi\mathbb{Z}$, donc un singleton $\{2i\pi k\}$. De même, les déterminations continues de l'argument sur un même ouvert connexe ne diffèrent que par une constante, dans $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 2.5.6. — La remarque précédente permet de voir qu'il n'y a pas détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. S'il y en avait une, ce serait Log, à une constante près. Donc en particulier Log devrait s'étendre continûment en -1 : mais $\lim_{y\to 0^\pm} \mathrm{Arg}(-1+iy) = \pm\pi$, donc $\lim_{y\to 0^\pm} \mathrm{Log}(-1+iy) = \pm i\pi$ et on ne peut pas prolonger Log en une fonction continue en -1.

La proposition suivante répond à une attente naturelle : tout logarithme est holomorphe et fournit une primitive de la fonction $z \mapsto 1/z$. Et c'est presque une définition équivalente.

Proposition 2.5.7. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.*

1. *Si L est une détermination continue du logarithme sur Ω, alors L est holomorphe sur Ω et $L'(z) = 1/z$ pour tout $z \in \Omega$.*

2. *Si F est une fonction holomorphe sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, $F'(z) = 1/z$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F + c$ est une détermination continue du logarithme sur Ω.*

Démonstration. — Pour le premier point, on écrit
$$\frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \frac{L(z) - L(z_0)}{e^{L(z)} - e^{L(z_0)}}$$
et on reconnaît l'inverse d'un taux de variation de exp en z_0. Quand $z \to z_0$, $L(z) \to L(z_0)$ (continuité de L) et le quotient ci-dessus tend donc vers
$$\frac{1}{\exp'(L(z_0))} = \frac{1}{\exp(L(z_0))} = \frac{1}{z_0}.$$

Pour le second point, on a

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)}(1 - z/z) = 0$$

donc il existe une constante a telle que pour tout $z \in \Omega$, $ze^{-F(z)} = a$. Le membre de gauche n'est pas nul, donc $a \neq 0$ et il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $a = e^c$. Alors $e^{F(z)+c} = z$ pour tout $z \in \Omega$. □

En particulier, le logarithme principal est une fonction holomorphe. C'est un (en fait : le) prolongement holomorphe du logarithme néperien à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Au voisinage de 1, on peut l'exprimer par le développement en série entière usuel.

Corollaire 2.5.8. — $\forall z \in D(0,1)$, $\mathrm{Log}(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$.

Démonstration. — La série entière de droite est convergente sur $D(0,1)$ donc définit une fonction $L : D(0,1) \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$-dérivable et vérifie

$$\forall z \in D(0,1), \quad L'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = \frac{d}{dz}\,\mathrm{Log}(1+z).$$

Le disque étant connexe, $z \mapsto L(z) - \mathrm{Log}(1+z)$ est constante, donc nulle puisqu'elle est nulle en 0. □

La donnée d'un logarithme $L : \Omega \to \mathbb{C}$ permet de définir les puissances complexes des nombres complexes $z \in \Omega$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad z^\alpha = e^{\alpha L(z)}.$$

Ainsi, $z \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur Ω, comme composée de fonctions holomorphes. Ceci permet par exemple d'extraire des racines de manière holomorphe.

Si α est entier, pour tout logarithme L, $\alpha L(z)$ est une somme de α termes $L(z)$. Donc $e^{\alpha L(z)}$ est le produit de α facteurs $e^{L(z)} = z$ (l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles) : c'est bien z^α au sens classique.

Le module de cette puissance est aussi ce qu'on attend, grâce à la remarque 2.5.3 : pour tout logarithme L et tout complexe α, on trouve

$$|z^\alpha| = |e^{\alpha L(z)}| = e^{\alpha \mathrm{Re} L(z)} = e^{\alpha \ln|z|} = |z|^\alpha.$$

Mais en général, la puissance complexe ainsi définie dépend du logarithme choisi. Si on prend le logarithme principal (sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$), on parle de détermination principale de la puissance. Mais on peut aussi prendre un logarithme défini sur $\mathbb{R}_-$ et extraire des racines carrées de réels négatifs si on a envie ! Deux logarithmes L_1, L_2 différant d'une constante additive $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (par la remarque 2.5.5), les fonctions puissances associées diffèrent d'une constante multiplicative :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall z \in \Omega, \quad e^{\alpha L_1(z)} = e^{2i\pi k\alpha}e^{\alpha L_2(z)}.$$

CHAPITRE 3

LA FORMULE DE CAUCHY

La formule de Cauchy est la formule clef de l'analyse complexe. Elle mène à toutes les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes, notamment leur analyticité. En outre, elle permettra, plus tard, des calculs magiques d'intégrales.

3.1. Chemins

Un *chemin* dans $\mathbb{C}$, c'est une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. On dit qu'il relie $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. On notera $\gamma^* = \gamma([a, b])$ l'image de γ.

Un *lacet* (ou chemin fermé) est un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Exemple 3.1.1. — Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Le segment $[\alpha, \beta]$ est paramétré par $\gamma(t) = (1-t)\alpha + t\beta$, avec $t \in [0, 1]$.

Exemple 3.1.2. — Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$. Le cercle $C(z_0, r)$, de centre z_0 et de rayon r, est paramétré par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. C'est un lacet.

On peut concaténer deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ en un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$: on pose $a = a_1$, $b = b_1 + b_2 - a_2$ et

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_1(t) \quad \text{si } a \leq t \leq b_1, \\ &= \gamma_2(t - b_1 + a_2) \quad \text{si } b_1 \leq t \leq b. \end{aligned}$$

On travaillera souvent avec des chemins ayant une certaine régularité, par exemple C^1. On dira qu'un chemin est C^1 par morceaux (C^1_{morc}) s'il est une concaténation d'un nombre fini de chemins C^1. On dira qu'un chemin est affine par morceaux s'il est une concaténation d'un nombre fini de segments.

Dans ce cours, on travaille souvent avec des ouverts connexes de $\mathbb{C}$. La proposition suivante montre que la connexité d'un ouvert de $\mathbb{C}$ est équivalente à la connexité par arcs, et même à une propriété un peu plus forte : on peut relier deux points quelconques de l'ouvert en suivant un nombre fini de segments inclus dans l'ouvert.

Proposition 3.1.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Ω est connexe ssi pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$, il existe un chemin affine par morceaux $\gamma : [a, b] \to \Omega$ tel que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$.*

Démonstration. — Pour le sens $\Leftarrow$, on suppose que Ω est l'union disjointe de deux ouverts non vides U et V. On peut alors considérer la fonction $f : \Omega \to \{0,1\}$ qui vaut 0 sur U et 1 sur V. C'est une fonction localement constante, donc continue. On se donne $z_1 \in U$, $z_2 \in V$. Par hypothèse, on a un chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ reliant z_1 à z_2. Alors $f \circ \gamma$ est une fonction continue, de $[a,b]$ dans $\{0,1\}$, qui vaut 0 en a et 1 en b : c'est impossible, puisque le théorème des valeurs intermédiaires l'obligerait à prendre la valeur $1/2$ quelque part. Donc Ω est connexe.

Pour le sens $\Rightarrow$, on se fixe $z_0 \in \Omega$ et on considère l'ensemble U des points $z \in \Omega$ tels qu'il existe un chemin affine par morceaux γ_z reliant z_0 à z dans Ω. On va montrer que U est tout Ω, ce qui impliquera le résultat (en concaténant un chemin de z_1 à z_0 et un chemin de z_0 à z_2). D'abord, on vérifie que U est ouvert : si $z \in U$, on a un disque $D(z,r) \subset \Omega$ avec $r > 0$ (car Ω est ouvert) et, pour tout $w \in D(z,r)$, la concaténation de γ_z et du segment $[z,w] \subset D(z_0,r) \subset \Omega$ relie z_0 à w dans Ω ; ceci montre que $D(z,r)$ est inclus dans U, et comme on peut faire ça pour tout $z \in U$, on voit que U est ouvert. Et en fait, le même argument montre que $\Omega\backslash U$ est ouvert. En effet, si maintenant on choisit $z \in \Omega\backslash U$, on a toujours un disque $D(z,r) \subset \Omega$; si on avait un point w dans $U \cap D(z,r)$, alors la concaténation de γ_w et du segment $[w,z] \subset D(z_0,r) \subset \Omega$ relierait z_0 à z dans Ω, ce qui contredirait $z \notin U$; donc $D(z,r) \subset \Omega\backslash U$ et on montre ainsi que $\Omega\backslash U$ est ouvert. Finalement, U est une partie ouverte, fermée, non vide ($z_0 \in U$) du connexe Ω, donc $U = \Omega$. □

Remarque 3.1.4. — Tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est l'union disjointe d'ouverts connexes Ω_i, $i \in I$. Ces ouverts Ω_i sont les composantes connexes de Ω ; si z_i est un point de Ω_i, Ω_i est l'ensemble des points $z \in \Omega$ qu'on peut relier à z_i en restant dans Ω. On peut remarquer que I est au plus dénombrable (en choisissant un point à coordonnées rationnelles dans chaque ouvert Ω_i, on injecte I dans $\mathbb{Q}^2$).

3.2. Intégrale sur un chemin

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux. Si f est une fonction continue sur l'image $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$ de γ, on définit *l'intégrale de f le long du chemin γ* par :

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

L'intégrande est une fonction continue par morceaux, donc cette intégrale a bien un sens. On utilisera aussi la notation $\displaystyle\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz$.

Cette notion d'intégrale a des propriétés naturelles. Par exemple, par Chasles, si γ est la concaténation de deux chemins γ_1 et γ_2, on a $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$.

On peut aussi voir que les changements de paramétrages n'affectent essentiellement pas la valeur de l'intégrale. Etant donné $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, on peut le reparamétrer à l'aide d'un difféomorphisme $\phi : [c,d] \to [a,b]$ pour obtenir un nouveau chemin $\sigma = \gamma \circ \phi : [c,d] \to \mathbb{C}$. Par changement de variable $s = \phi(t)$, on a

$$\int_\sigma f = \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds.$$

Il y a deux cas. Si ϕ est un difféomorphisme croissant ($\phi(c) = a$ et $\phi(d) = b$), alors $\displaystyle\int_\sigma f = \int_\gamma f$. Si ϕ est décroissant ($\phi(c) = b$ et $\phi(d) = a$), alors $\displaystyle\int_\sigma f = -\int_\gamma f$. Donc au fond, l'intégrale ne dépend que de l'image de γ, γ^*, et d'un choix d'orientation : c'est très géométrique et cela permet une grande souplesse dans le maniement de ces intégrales.

On définit la *longueur* d'un chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ par :

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

On vérifie de même que la longueur L est finie, invariante par changement de paramétrage et additive sous les concaténations. Si $\gamma : t \mapsto (1-t)\alpha + t\beta$ paramètre un segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{C}$, un calcul immédiat donne $L(\gamma) = |\beta - \alpha|$. Ainsi, par concaténation, L donne bien la longueur attendue pour les chemins affines par morceaux. En approchant un chemin (C^1 par morceaux) par une suite de chemins affines par morceaux, on se convainc que L est bien la longueur "intuitive". On l'utilisera souvent pour majorer les intégrales de fonctions :

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt \leq (\sup_{\gamma^*} |f|) \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

On retiendra :

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \sup_{\gamma^*} |f|. \tag{6}$$

3.3. Indice

En intégrant une fonction particulière sur les chemins fermés, on va obtenir une quantité géométrique intéressante. Elle interviendra dans la formule de Cauchy que nous visons ici.

Soit γ un lacet C^1 par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit z un point du plan situé hors de l'image de γ. Alors on peut définir *l'indice de* γ par rapport à z, noté $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$, par la formule

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Proposition 3.3.1. — *La fonction* $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \backslash \gamma^* \to \mathbb{C}$ *est continue, à valeurs dans* $\mathbb{Z}$. *Elle est donc constante sur les composantes connexes de* $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$.

Démonstration. — Il s'agit d'étudier $\mathrm{Ind}_\gamma : z \mapsto \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z}$, avec $\gamma(a) = \gamma(b)$, $z \notin \gamma^*$.

La continuité de cette fonction vient du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre : l'intégrande est continu en t (donc mesurable), continu en z et, si $d(z_0, \gamma^*) = r > 0$, on peut le dominer sur le disque $D(z_0, r/2)$: pour $t \in [a,b], z \in D(z_0, r/2)$, on a $|\gamma(t) - z| \geq |\gamma(t) - z_0| - |z - z_0| \geq r/2$, donc l'intégrande est dominé par $\dfrac{2}{r}|\gamma'(t)|$, avec $\displaystyle\int_a^b \frac{2}{r}|\gamma'(t)| = \frac{2L(\gamma)}{r} < \infty$. Ceci montre la continuité près de tout point z_0 de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$.

Pour prouver que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est toujours un entier, il suffit de voir que $e^{2i\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)} = 1$. Si on introduit la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi(t) = \exp\left(2i\pi\displaystyle\int_a^t \frac{\gamma'(s)\,ds}{\gamma(s)-z}\right)$, on veut donc prouver que $\varphi(b) = 1$. Or φ est C^1 par morceaux (donc en particulier continue) et, sur chaque segment où elle est C^1, sa dérivée vaut $\varphi'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\varphi(t)$, de sorte qu'on a $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} = 0$. Ainsi, $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est constante sur ces segments. Et cette fonction est continue, donc elle est en fait constante sur $[a,b]$: $\dfrac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} = \dfrac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z}$. Avec $\gamma(b) = \gamma(a)$ et $\varphi(a) = 1$, on arrive à $\varphi(b) = 1$, donc au résultat.

Enfin, l'image d'une composante connexe par la fonction continue Ind_γ est un connexe de $\mathbb{Z}$, donc un singleton. □

Parmi les composantes connexes du complémentaire de γ^*, une et une seule est non bornée. En effet, γ^* est compact, donc inclus dans un disque $D(0,R)$, de sorte que : $\mathbb{C}\backslash D(0,R) \subset \mathbb{C}\backslash\gamma^*$; comme $\mathbb{C}\backslash D(0,R)$ est connexe, il est inclus dans une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ qui est donc non bornée. Et les autres composantes connexes sont alors disjointes de $\mathbb{C}\backslash D(0,R)$, donc bornées. La proposition permet de calculer Ind_γ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$. En effet, puisque sa valeur est constante, elle vaut aussi la limite de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ quand $|z| \to \infty$. Or, avec (6), on a la majoration $|\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)| \leq \dfrac{L(\gamma)}{2\pi d(z,\gamma^*)}$, donc cette limite est 0, est l'indice vaut 0 en tout point de la composante connexe non bornée.

Exemple 3.3.2. — Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\gamma_k : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_k(t) = z_0 + re^{ikt}$: c'est le cercle de centre z_0, de rayon r, parcouru k fois (dans le sens direct si $k \geq 0$, indirect sinon). Un calcul donne l'indice en z_0 :

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ikre^{ikt}dt}{z_0 + re^{ikt} - z_0} = \frac{k}{2i\pi}\int_0^{2\pi} dt = k.$$

Avec ce qui précède, on en déduit que Ind_{γ_k} est la fonction qui vaut k sur le disque $D(z_0,r)$ et 0 sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D(z_0,r)}$. Il faut retenir de cet exemple que l'indice d'un lacet par rapport à un point z compte le nombre de tours que le lacet fait autour de z. On y reviendra.

3.4. Théorème et formule de Cauchy

Dans tout ce paragraphe, les chemins sont supposés C^1 par morceaux. On va commencer par montrer que les intégrales le long de chemins se calculent bien quand on dispose d'une primitive holomorphe de l'intégrande.

Définition 3.4.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une primitive holomorphe de $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si $F' = f$.

Si l'ouvert Ω est connexe, deux primitives holomorphes d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante additive par 1.4.2. Par exemple, le logarithme principal est la primitive holomorphe de la fonction $z \mapsto 1/z$ sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ qui s'annule en 1.

Proposition 3.4.2. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$, admettant une primitive holomorphe F. Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$, on a la formule*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, pour tout lacet γ dans Ω, $\displaystyle\int_\gamma f = 0$.

Démonstration. — C'est un calcul immédiat :

$$\int_\gamma f = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dans le cas d'un lacet, on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ donc le résultat est nul. □

Exemple 3.4.3. — $z \mapsto z^n$ se primitive en $z \mapsto \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{C}$ si $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}$, $\displaystyle\int_\gamma z^n dz = 0$. Ce raisonnement fonctionne encore pour un entier $n \leq -2$ si γ est tracé dans $\mathbb{C}^*$: ainsi, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^k} = 0$ pour tout entier $k \geq 2$ et tout lacet γ dans $\mathbb{C}^*$. Mais attention, il y a un vrai problème quand $k = 1$. Par exemple, si on intègre sur le cercle unité C, paramétré dans le sens direct, on trouve

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2i\pi \operatorname{Ind}_C(0) = 2i\pi \neq 0.$$

La non-nullité de cette intégrale montre que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive holomorphe sur un ouvert contenant le cercle unité. Et on retrouve le fait qu'il n'y a pas de détermination continue du logarithme sur un tel ouvert (cf. 2.5.7).

Le lemme qui suit va avoir des conséquences formidables. On lui donne parfois un nom : le lemme de Goursat.

Lemme 3.4.4. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et Δ un triangle fermé inclus dans Ω. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f = 0$. *De plus, le résultat vaut encore si f est continue sur Ω et holomorphe sur Ω moins un point.*

Formellement, si a, b, c sont les sommets du triangle Δ, alors le lacet $\partial\Delta$ est la concaténation des segments $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$ et donc

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f. \tag{7}$$

Ceci est bien défini une fois qu'on a choisi l'ordre des sommets, c'est-à-dire une orientation de $\partial\Delta$ (par exemple, si on permute b et c, le signe change). Dans l'énoncé, cette légère ambiguité ne joue pas de rôle, puisque $0 = -0$. Dans la preuve, on devra être précis.

Par ailleurs, la seconde partie de l'énoncé semble un peu artificielle et technique : en fait, ce raffinement n'est pas cher dans la preuve et nous en aurons besoin ci-dessous.

Démonstration. — On suppose d'abord $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On note a, b, c les sommets de Δ et a', b', c' les milieux respectifs des segments bc, ca, ab. Ceci détermine quatre triangles $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$, dont les bords sont orientés comme suit : $ac'b', ba'c', cb'a'$ et $a'b'c'$. Le lecteur est invité à faire un dessin pour visualiser les orientations. Avec ces choix, on a

$$\int_{\partial\Delta} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta_i} f.$$

En effet, si on développe le membre de droite en utilisant (7) pour chaque triangle Δ_i, on obtient une somme de douze intégrales sur des segments. Parmi celles-ci, on trouve $\displaystyle\int_{[c',b']} f$ et $\displaystyle\int_{[b',c']} f$, qui sont opposées donc se compensent dans la somme ; les intégrales sur $a'b'$ et $a'c'$ se compensent de même. Et les six termes restants donnent le membre de gauche (cf. dessin).

On veut montrer que $M = \left|\displaystyle\int_{\partial\Delta} f\right|$ est nul. Observons d'abord que l'inégalité $M \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_i} f\right|$ montre que, pour l'un des indices i, on a $\left|\displaystyle\int_{\partial\Delta_i} f\right| \geq \dfrac{M}{4}$. De plus, si on note L le périmètre de Δ (i.e. la longueur de son bord), le périmètre de Δ_i est $L/2$ par le théorème de Thalès. L'idée de la preuve consiste à recommencer avec le triangle Δ_i, en le subdivisant lui-même en quatre petits triangles, etc. On bâtit ainsi une suite de triangles T_n telle que $T_0 = \Delta$, $T_{n+1} \subset T_n$, le périmètre de T_n est $L/2^n$ et $\left|\displaystyle\int_{\partial T_n} f\right| \geq \dfrac{M}{4^n}$.

Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ est un singleton $\{z_0\}$. En effet, n'importe quelle suite de points $y_n \in T_n$ est de Cauchy (parce que le diamètre de T_N est majoré par $L/2^N$ qui tend vers 0), donc converge vers un point y_∞ ; comme y_n est dans le fermé T_N pour tout $n \geq N$, y_∞ aussi et cela prouve que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ n'est pas vide. Cet ensemble est par ailleurs de diamètre majoré par celui de T_N, donc par $L/2^N$, pour tout N. Donc il est de diamètre nul et ne contient qu'un point, qu'on appellera z_0.

Soit $\epsilon > 0$. La $\mathbb{C}$-différentiabilité de f en z_0 donne un $\delta > 0$ tel que pour $z \in D(z_0, \delta)$,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|.$$

Posons $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$. Pour n assez grand, on a $T_n \subset D(z_0, \delta)$ et on écrit

$$\int_{\partial T_n} f = \int_{\partial T_n} g + \int_{\partial T_n} (f - g).$$

Par 3.4.3, g admet une primitive holomorphe, donc, par 3.4.2, $\int_{\partial T_n} g = 0$. Le second terme se majore par (6) :

$$\left|\int_{\partial T_n}(f-g)\right| \leq L(\partial T_n)\sup_{\partial T_n}|f-g| \leq \frac{L}{2^n}\frac{\epsilon L}{2^n} = \frac{\epsilon L^2}{4^n}.$$

Au final, on trouve

$$\frac{M}{4^n} \leq \left|\int_{\partial T_n} f\right| = \left|\int_{\partial T_n}(f-g)\right| \leq \frac{\epsilon L^2}{4^n},$$

d'où $M \leq \epsilon L^2$. C'est vrai pour tout ϵ : $M = 0$.

Maintenant, étendons le résultat au cas où f est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{p\}$. Il y a trois cas. 1) Si p n'appartient pas à Δ, pas de problème, la preuve ci-dessus fonctionne. 2) Si p est un sommet de Δ, disons $\partial\Delta = pbc$, on subdivise Δ en introduisant un point b_n sur le segment pb et un point c_n sur le segment pc ; alors $\int_{\partial\Delta} f$ est la somme des intégrales de f le long des triangles b_nbc, b_ncc_n et pb_nc_n. Par le cas précédent, les deux premières sont nulles ; en choisissant b_n et c_n très proches de p, on peut rendre la troisième intégrale aussi petite qu'on veut, donc $\int_{\partial\Delta} f = 0$. 3) Si p est à l'intérieur de Δ ou le long d'une arête, on subdivise Δ en triangles dont p est l'un des sommets et on se ramène ainsi au cas précédent. □

Rappelons qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *convexe* si, pour tous les points a, b de Ω, le segment ab est inclus dans Ω. Un convexe est connexe mais le contraire est faux : par exemple, $\mathbb{C}^*$ n'est pas convexe. La convexité intervient dans notre contexte via le lemme de Goursat : si on se donne trois point a, b, c d'un ouvert convexe Ω, les segments ab, bc, ca sont dans Ω et tout point de l'intérieur du triangle abc est sur un segment reliant deux points du bord, donc le triangle plein de sommets a, b, c est inclus dans Ω.

Théorème 3.4.5 **(Théorème de Cauchy local).** — *Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors pour tout lacet γ dans Ω, $\int_\gamma f = 0$.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ reste dans Ω, donc on peut définir $F(z) = \int_{[z_0,z]} f$. On va montrer que F est holomorphe sur Ω de dérivée $F' = f$; en appliquant la proposition 3.4.2, on aura le résultat. Soit $z \in \Omega$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ assez petit, $z+h$ est dans l'ouvert Ω. Par convexité, le triangle de sommets z_0, z, $z+h$ est dans Ω, donc le lemme 3.4.4 donne $\int_{[z_0,z]} f + \int_{[z,z+h]} f + \int_{[z+h,z_0]} f = 0$. En paramétrant $[z, z+h]$ par $t \mapsto z+th$, $0 \leq t \leq 1$, on en déduit $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f = \int_0^1 f(z+th)h\,dt$, qui se réécrit

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z) + \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\,dt.$$

En utilisant la continuité de f en z et le théorème de convergence dominée, on voit que le dernier terme tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc F est $\mathbb{C}$-dérivable en z et $F'(z) = f(z)$. □

Remarque 3.4.6. — Comme dans le lemme de Goursat, il suffit de supposer que f est continue sur Ω et holomorphe sur Ω moins un point.

Remarque 3.4.7. — On verra plus tard un théorème de Cauchy plus général et naturel, valide sur un ouvert quelconque, avec une contrainte de nature topologique sur le lacet.

Dans la preuve ci-dessus, on a montré le résultat suivant, qui mérite d'être retenu.

Proposition 3.4.8. — *Toute fonction holomorphe sur un ouvert convexe Ω admet une primitive holomorphe sur Ω.*

***Théorème 3.4.9* (Formule de Cauchy locale).** — *Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, γ un lacet dans Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors pour tout $z \in \Omega \backslash \gamma^*$,*

$$f(z)\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Démonstration. — On se fixe $z \in \Omega \backslash \gamma^*$, puis on pose $g(w) = \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}$ si $w \neq z$ et $g(z) = f'(z)$. Cette fonction g est holomorphe sur $\Omega \backslash \{z\}$ et elle est continue sur tout Ω (en z, c'est par définition de la $\mathbb{C}$-différentiabilité). Par le théorème de Cauchy local (avec la remarque 3.4.6), on obtient $\displaystyle\int_\gamma g = 0$. En développant, cela donne

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z} dw = f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2i\pi f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

□

Cette formule de Cauchy est appelée locale, parce qu'on va beaucoup l'appliquer sur des disques, au voisinage de tout point (un disque est convexe !). Dans ce cadre, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.10. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supposons que le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ est inclus dans Ω. Alors :*

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Implicitement, on a orienté le cercle $C(z_0, r)$ dans le sens trigonométrique.

Démonstration. — Il faut remarquer que le compact $\overline{D(z_0, r)}$ est disjoint du fermé $\mathbb{C} \backslash \Omega$, donc à distance strictement positive $\epsilon > 0$. Alors $D(z_0, r + \epsilon)$ est un ouvert convexe inclus dans Ω, donc f y est holomorphe, et contenant $C(z_0, r)$. On peut appliquer la formule de Cauchy locale et on obtient le résultat en remarquant que l'indice de $C(z_0, r)$ est $+1$ avec notre choix d'orientation (cf. exemple 3.3.2). □

CHAPITRE 4

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

4.1. Analyticité

Théorème 4.1.1. — *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$: les fonctions holomorphes sont analytiques.*

Démonstration. — L'inclusion $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega)$ est déjà connue (2.3.4). Il s'agit donc de considérer $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et de montrer que f est analytique. Fixons un point z_0 dans Ω, à distance R du fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Pour tout $r < R$, le disque $D(z_0, r)$ est inclus dans Ω et on dispose de la formule de Cauchy (3.4.10) :

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Fixons un tel z, dans le disque $D(z_0, r)$. Pour tout $w \in C(z_0, r)$, on peut écrire :

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}.$$

Observons que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{w \in C(z_0,r)} \left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n$ est finie, puisqu'on suppose $|z - z_0| < r$. Comme f est bornée sur le cercle par continuité, on en déduit la convergence normale de la série sur le cercle et on peut permuter $\displaystyle\int_{C(z_0,r)}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ [(1)] pour obtenir l'expression $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Ces coefficients a_n sont indépendants de z, on a bien trouvé un développement en série entière de f au voisinage de tout point z_0 de Ω : f est analytique. □

1. c'est en fait un cas particulier du théorème de Fubini-Lebesgue

Remarque 4.1.2. — Les coefficients a_n de la preuve semblent dépendre de r, mais en fait non : par unicité du développement en série entière, a_n ne dépend que de f et z_0. On dispose ainsi d'un développement en série entière sur tout le disque $D(z_0, R)$, où R est la distance de z_0 au complémentaire de Ω. Autrement dit, ce développement est valable sur le disque *maximal* centré en z_0 et inclus dans Ω.

C'est exactement le phénomène qu'on avait observé pour les fractions rationnelles, dans l'exemple 2.3.3 ; il est en fait complètement général !

Exemple 4.1.3. — Soit α un nombre complexe. La détermination principale du logarithme permet de définir la fonction $p_\alpha : z \mapsto z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Elle est holomorphe donc analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Par 4.1.2, son développement en série entière en 1 est valable sur le disque $D(1,1)$. On peut calculer ses coefficients à l'aide des dérivées successives de p_α en 1, cf. 2.3.5. Or les propriétés des logarithmes donnent

$$\forall z \in D(0,1), \qquad p'_\alpha(z) = \frac{d}{dz} e^{\alpha \operatorname{Log} z} = \frac{\alpha e^{\alpha \operatorname{Log} z}}{z} = \alpha e^{(\alpha-1)\operatorname{Log} z} = \alpha p_{\alpha-1}(z),$$

d'où par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in D(0,1), \qquad p_\alpha^{(n)}(z) = (\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)p_{\alpha-n}(z).$$

Comme $\operatorname{Log} 1 = 0$, on a $p_{\alpha-n}(1) = 1$ pour tout n et on obtient ainsi la formule

$$\forall z \in D(0,1), \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n.$$

Notons que si α est un entier naturel, la somme est finie (les coefficients sont nuls pour $n \geq \alpha+1$) et on retrouve la formule du binôme de Newton.

Remarque 4.1.4. — Les fonctions entières sont les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$. Ce sont donc des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier. La remarque 4.1.2 dit que leur développement en série entière en 0 (par exemple) a un rayon de convergence infini : elles s'écrivent globalement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ce sont donc exactement les sommes de séries entières de rayon de convergence infini.

Le théorème 4.1.1 montre que les fonctions holomorphes récupèrent les propriétés des fonctions analytiques, comme le principe des zéros isolés, par exemple. On peut aussi parler de l'ordre d'annulation d'une fonction holomorphe, de la multiplicité de ses zéros, cf. 2.3.10. Il faut retenir le corollaire frappant suivant, qui vient du fait que la dérivée d'une fonction analytique est analytique (cf. 2.3.5).

Corollaire 4.1.5. — *Les fonctions holomorphes sont infiniment $\mathbb{C}$-dérivables.*

Autrement dit, la dérivée d'une fonction holomorphe est automatiquement holomorphe ! Entre autres choses, cela permet de prouver une sorte de réciproque au lemme de Goursat.

***Corollaire 4.1.6* (Théorème de Morera).** — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω. On suppose que pour tout triangle fermé $\Delta \subset \Omega$, $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f = 0$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. — Fixons $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose $F(z) = \displaystyle\int_{[z_0,z]} f$. En procédant comme dans la preuve du théorème de Cauchy local (3.4.5), on voit que F est holomorphe sur $D(z_0, r)$, avec $F' = f$. Ainsi, sur ce disque, f est la dérivée d'une fonction holomorphe, donc est holomorphe, par 4.1.5. Et c'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$. □

L'analyticité permet aussi de voir que si une fonction est holomorphe au dehors d'un point et n'est pas trop méchante au voisinage de ce point, alors elle se prolonge holomorphiquement (on va généraliser 2.3.11). Nous étudierons plus tard les méchancetés possibles.

***Théorème 4.1.7* (Riemann).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On suppose que f est une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_0\}$, bornée près de z_0. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur tout Ω.*

Démonstration. — On pose $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = 0$. Alors g est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\Omega\backslash\{z_0\}$, et, comme f est bornée près de z_0, le quotient

$$\frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \frac{h^2 f(z_0 + h)}{h} = O(h)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc g est holomorphe sur Ω, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) = 0$ et on a un développement en série entière de la forme $g(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ au voisinage de z_0. Pour $z \neq z_0$ dans ce voisinage, on en tire $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z - z_0)^n$. Si on prolonge f en posant $f(z_0) = a_2$, on voit donc que f est développable en série entière en z_0, et donc on récupère une fonction holomorphe sur tout Ω. □

Remarque 4.1.8. — Les fonctions analytiques héritent également des propriétés des fonctions holomorphes. Par exemple, un quotient ou une composée de fonctions analytiques est encore analytique sur son domaine de définition. De telles propriétés sont beaucoup plus simples à vérifier si on pense qu'analytique signifie holomorphe.

4.2. Inégalités de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On a vu que, pour tout disque $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, on dispose du développement en série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, avec des coefficients vérifiant

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

On en déduit la majoration (6) :

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \sup_{w\in C(z_0,r)} \frac{|f(w)|}{r^{n+1}},$$

d'où le résultat suivant.

***Théorème 4.2.1* (Inégalités de Cauchy).** — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{C(z_0,r)} |f|$$

Les conséquences sont terribles.

***Corollaire 4.2.2* (Théorème de Liouville).** — *Une fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. — Soit f une fonction entière bornée par M. On peut utiliser l'inégalité de Cauchy pour $n = 1$ sur tout disque $D(z,r)$ de $\mathbb{C}$, ce qui donne

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall r \geq 0, \qquad |f'(z)| \leq \frac{1}{r} M.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $f'(z) = 0$ pour tout z dans $\mathbb{C}$: par 1.4.2, f est constante. □

On peut en déduire une preuve holomorphe du théorème de D'Alembert-Gauss.

***Corollaire 4.2.3* (Théorème de D'Alembert-Gauss).** — *Tout polynôme complexe non constant admet une racine complexe.*

Démonstration. — Soit P un polynôme complexe non constant, ne s'annulant pas sur $\mathbb{C}$. Alors $1/P$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, i.e. une fonction entière. Comme P est de degré $n \geq 1$, on a, pour $|z| \to +\infty$, $P(z) = az^n + o(|z|^n)$, donc $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ et $1/P(z)$ tend vers 0. Or une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini est bornée. Par le théorème de Liouville, $1/P$ devrait être constant, absurde. □

L'intérêt des inégalités de Cauchy réside dans le fait qu'une borne uniforme sur une fonction holomorphe f fournit automatiquement des bornes sur toutes les dérivées de f. Les deux paragraphes suivants illustent ce phénomène.

4.3. Holomorphie des intégrales à paramètre

Théorème 4.3.1. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et (T,μ) un espace mesuré. On considère une fonction $f : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est mesurable ;*
2. *pour tout $t \in T$, la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe ;*
3. *il existe une fonction intégrable $\varphi : T \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall t \in T, \quad \forall z \in \Omega, \quad |f(t,z)| \leq \varphi(t).$$

Alors la formule $F(z) = \int_T f(t,z)\, d\mu(t)$ *définit une fonction holomorphe sur* Ω *et*

$$\forall z \in \Omega, \qquad F'(z) = \int_T \frac{\partial f}{\partial z}(t,z) d\mu(t).$$

Remarque 4.3.2. — Dans cet énoncé, on peut remplacer les "pour tout t" par "presque pour tout t".

Remarque 4.3.3. — En pratique, vu que la $\mathbb{C}$-dérivabilité est une propriété locale, il suffit de trouver une domination par une fonction φ en voisinage de chaque point z_0 de Ω. Et d'ailleurs, c'est ainsi que fonctionne la preuve.

Démonstration. — Soit $z \in \Omega$. Pour $r > 0$ petit, le disque $\overline{D(z,r)}$ est inclus dans Ω. Pour $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $|h| < r/2$, on commence par écrire

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_T \frac{f(t,z+h) - f(t,z)}{h} d\mu(t)$$

A t fixé, le module de l'intégrande se majore par l'inégalité des accroissements finis, puis une inégalité de Cauchy (4.2.1) :

$$\left| \frac{f(t,z+h) - f(t,z)}{h} \right| \leq \frac{1}{|h|} |h| \sup_{w \in [z,z+h]} \left| \frac{\partial f}{\partial w}(t,w) \right| \leq \frac{2}{r} \varphi(t).$$

Pour comprendre cette dernière inégalité, il faut observer que si w est un point du segment $[z, z+h]$, alors w est dans le disque $D(z, r/2)$, de sorte que le disque $\overline{D(w, r/2)}$ est inclus dans $\overline{D(z,r)}$, donc dans Ω. L'inégalité de Cauchy borne donc la dérivée de $f(t,.)$ en w par le sup de $|f(t,.)|$, divisé par $r/2$. On trouve ainsi un majorant $\frac{2}{r}\varphi(t)$ qui est indépendant de z et intégrable. Par convergence dominée, quand h tend vers 0, on obtient

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \text{ tend vers } \int_T \lim_{h \to 0} \frac{f(t,z+h) - f(t,z)}{h} d\mu(t) = \int_T \frac{\partial f}{\partial z}(t,z) d\mu(t).$$

Ceci montre la $\mathbb{C}$-dérivabilité en z et la formule voulue. □

Dans le cadre holomorphe, la simple domination de la fonction intégrée suffit même pour assurer qu'on peut dériver sous le signe intégrale à tout ordre.

Proposition 4.3.4. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 4.3.1, on dispose de la formule suivante pour les dérivées successives :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \Omega, \qquad F^{(k)}(z) = \int_T \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z) d\mu(t).$$

Démonstration. — La preuve fonctionne par récurrence sur k. L'initialisation est claire et l'hérédité est une adaptation immédiate de l'argument précédent. Brièvement, partant de la formule à l'ordre k, on veut étudier la limite de

$$\frac{F^{(k)}(z+h) - F^{(k)}(z)}{h} = \int_T \frac{\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z+h) - \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z)}{h} d\mu(t)$$

quand h tend vers 0. Par convergence dominée, il suffit de dominer l'intégrande, ce qui se fait via l'inégalité des accroissements finis et l'inégalité de Cauchy à l'ordre $k+1$:

$$\left|\frac{\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z+h)-\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z)}{h}\right| \leq \sup_{w\in[z,z+h]}\left|\frac{\partial^{k+1}f}{\partial w^{k+1}}(t,w)\right| \leq \frac{(k+1)!}{(2/r)^{k+1}}\varphi(t).$$

On en conclut qu'on peut passer à la limite sous le signe intégrale et cela donne la formule à l'ordre $k+1$. □

En utilisant la mesure de dénombrement sur $T=\mathbb{N}$, on obtient le cas particulier des séries de fonctions holomorphes convergeant normalement.

Corollaire 4.3.5. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur Ω. Alors la formule $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ définit une fonction holomorphe sur Ω. De plus, on peut dériver terme à terme : $F^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $z\in\Omega$.*

On peut remarquer que la convergence uniforme suffirait, en vertu du théorème 4.4.1, à venir très prochainement. Néanmoins, dans les applications, c'est la convergence normale qu'on rencontrera usuellement. Encore une fois, il suffit d'avoir la convergence normale au voisinage de chaque point. Donnons deux exemples archi-classiques.

Exemple 4.3.6. — La fonction zeta est définie par la formule $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$. Vérifions qu'elle est holomorphe sur l'ouvert $\Omega=\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>1\}$. D'abord, on observe que les termes $f_n(z)=1/n^z=e^{-z\ln n}$ sont bien holomorphes en z. Ensuite, on va fixer $a>1$ et prouver la convergence normale sur l'ouvert $\Omega_a=\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>a\}$. En effet, si z est choisi dans Ω_a, on peut écrire

$$|f_n(z)|=|e^{-z\ln n}|=e^{-\mathrm{Re}(z)\ln n}\leq e^{-a\ln n}=1/n^a.$$

Le majorant obtenu est indépendant de z et sommable (série de Riemann, $a>1$), donc on peut appliquer le théorème 4.3.5. Ceci montre que ζ est holomorphe sur Ω_a, pour tout $a>1$. Alors ζ est $\mathbb{C}$-dérivable en tous les points de tous les ouverts Ω_a, donc elle est holomorphe sur leur réunion, qui est Ω.

Exemple 4.3.7. — La fonction Gamma est définie par l'intégrale $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$ et on va voir que c'est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Omega=\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>0\}$. On vérifie d'abord que $f(t,z)=t^{z-1}e^{-t}=e^{z\ln t}t^{-1}e^{-t}$ est holomorphe en z et Lebesgue-mesurable en t (puisque continue). On cherche alors une domination et il est utile de se placer sur l'ouvert $\Omega_{a,b}=\{z\in\mathbb{C}/a<\mathrm{Re}(z)<b\}$, où l'on fixe $b>a>0$. Etant donné $z\in\Omega_{a,b}$, on obtient $|f(t,z)|\leq\varphi(t)$, avec $\varphi(t)=t^{a-1}e^{-t}$ si $t\geq 1$ et $\varphi(t)=t^{b-1}e^{-t}$ si $t<1$ [2]. La fonction φ ainsi définie est continue par morceaux, décroît exponentiellement à l'infini et, en 0, $\varphi(t)\sim t^{b-1}$, avec

2. Attention au signe de $\ln t$!

$b-1>-1$: φ est intégrable. Le théorème 4.3.1 permet donc d'affirmer que Γ est holomorphe sur les ouverts $\Omega_{a,b}$, donc sur leur réunion, qui est Ω.

4.4. Suites de fonctions holomorphes

Théorème 4.4.1. — *Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on considère une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.*

Dans la preuve, on va utiliser le r-voisinage K_r d'un compact $K \subset \Omega$: c'est le compact défini par
$$K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z,K) \leq r\} = \{z \in \mathbb{C}, \exists w \in K, d(z,w) \leq r\} = \bigcup_{w \in K} \overline{D(w,r)}.$$
Comme le compact K est disjoint du fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$, il en est à distance $r_0 > 0$. Ainsi, pour tout $r < r_0$, K_r est inclus dans Ω.

Démonstration. — Par continuité des f_n et convergence uniforme (près de tout point) de f_n vers f, f est continue sur Ω. Si Δ est un triangle inclus dans Ω, le théorème de Cauchy local (3.4.5 sur un triangle un peu plus grand que Δ) montre que $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f_n$ est nul pour tout n ; par convergence uniforme sur $\partial\Delta$, $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f = 0$. Le théorème de Morera (4.1.6) montre alors que f est holomorphe sur Ω.

Fixons un compact $K \subset \Omega$ et un entier $k \in \mathbb{N}$. Pour $r < r_0 = d(K, \mathbb{C}\backslash\Omega)$ et $z \in K$, les inégalités de Cauchy
$$\left|(f_n - f)^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{C(z,r)} |f_n - f|$$
impliquent
$$\sup_K \left|(f_n - f)^{(k)}\right| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{K_r} |f_n - f| \,.$$
Le membre de droite tend vers zéro par convergence uniforme de f_n vers f sur le compact K_r, donc le membre de gauche aussi : cela prouve la convergence uniforme de $f_n^{(k)}$ vers f^k sur K. □

Le théorème suivant est très puissant : il montre comment faire converger des suites de fonctions holomorphes, uniformément sur tout compact.

***Théorème 4.4.2* (Théorème de Montel).** — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante M_K telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_K |f_n| \leq M_K. \tag{8}$$
Alors on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω.

Autrement dit, une suite de fonctions holomorphes qui est uniformément bornée sur tout compact admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f. On peut alors utiliser 4.4.1 pour voir que cette valeur d'adhérence f est une fonction holomorphe et que la suite des dérivées converge uniformément sur tout compact vers f.

Ce théorème est le cousin holomorphe du théorème d'Arzela-Ascoli, qui affirme en substance qu'une suite de fonctions C^1 uniformément bornées et à dérivées uniformément bornées sur les compacts admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction continue. Dans le contexte holomorphe, les inégalités de Cauchy permettent de se passer d'une hypothèse sur les dérivées. On peut noter, aussi, qu'il n'y a pas de perte de régularité dans le théorème de Montel : la limite est holomorphe, alors que la valeur d'adhérence obtenue par Arzela-Ascoli n'est que continue.

Démonstration. — Première étape. On va extraire de f_n une sous-suite qui converge en tout point de la partie dénombrable dense $A = \mathbb{Q}^2 \cap \Omega$. Numérotons ses éléments : $A = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$. Par (8), la suite $(f_n(a_0))$ est une suite bornée de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, donc le théorème de Bolzano-Weiertrass permet d'en extraire une sous-suite convergente $(f_{\phi_0(n)}(a_0))$. On peut recommencer avec les autres points a_i, afin de trouver des extractrices ϕ_i telles que $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_i(n)})$ converge aux points $a_0, \ldots, a_i$. On peut alors vérifier que $\psi(n) = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$ définit une extractrice et que $(f_{\psi(n)})$ converge en tout point de A [3]. Dans la suite, pour simplifier, on rebaptise cette suite (f_n).

Seconde étape. Soit K un compact de Ω. On va montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(C^0(K), \|.\|_\infty)$. Pour ce faire, on commence par se fixer $r > 0$ tel que $K_r \subset \Omega$. Soit $\epsilon \in]0, r/2[$. Par densité de A, K est recouvert par les disques $D(a, \epsilon)$. Par compacité de K, on peut trouver $a_1, \ldots, a_k$ dans A tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} D(a_i, \epsilon)$. Par convergence de $(f_n(a_i))$ pour $i = 1, \ldots, k$, on trouve N tel que

$$\forall i = 1, \ldots, k, \quad \forall p, q \geq N, \qquad |f_p(a_i) - f_q(a_i)| \leq \epsilon.$$

Par choix des a_i, pour tout $z \in K$, on peut trouver $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $|z - a_i| < \epsilon$, de sorte qu'avec l'inégalité triangulaire, pour tous $p, q \geq N$,

$$|f_p(z) - f_q(z)| \leq |f_p(z) - f_p(a_i)| + |f_p(a_i) - f_q(a_i)| + |f_q(a_i) - f_q(z)| \leq \epsilon + 2 \sup_{n \geq N} |f_n(a_i) - f_n(z)|.$$

Or, pour tout n, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|f_n(z) - f_n(a_i)| \leq |z - a_i| \sup_{[z, a_i]} |f'_n| \leq \epsilon \sup_{K_{r/2}} |f'_n|.$$

Par inégalité de Cauchy, on a $\sup_{K_{r/2}} |f'_n| \leq \dfrac{2}{r} \sup_{K_r} |f_n|$ et on en déduit $|f_n(z) - f_n(a_i)| \leq \epsilon \dfrac{2M_{K_r}}{r}$. Tout ceci montre qu'on a

$$\forall p, q \geq N, \qquad \sup_K |f_p - f_q| \leq \left(1 + \frac{4M_{K_r}}{r}\right) \epsilon$$

3. Cette méthode est classique, on parle d'extraction diagonale.

et donc (f_n) est de Cauchy pour la norme du sup sur K. Par complétude de $(C^0(K), \|.\|_\infty)$, (f_n) converge uniformément sur K. En faisant ceci pour tout compact K, on obtient le résultat. $\square$

4.5. Propriété de la moyenne et principe du maximum

Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant le disque $\overline{D(z,r)}$, la formule de Cauchy donne en particulier :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Le cercle $C(z,r)$ est paramétré par $\gamma : t \mapsto z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, d'où :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{z+re^{it}-z} ire^{it} dt.$$

En simplifiant, on arrive au résultat suivant.

***Théorème 4.5.1* (Propriété de la moyenne).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque $\overline{D(z,r)}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,* $$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it}) dt.$$

Autrement dit, $f(z)$ est égal à la moyenne de f sur tout cercle centré en z. En fait, c'est aussi vrai en prenant la moyenne sur les disques centrés en z.

Corollaire 4.5.2. — *Soit une fonction holomorphe f sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Pour tout disque $\overline{D(z,r)}$ inclus dans Ω, on a la formule :* $$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} f.$$

Démonstration. — On écrit $\int_{D(z,r)} f = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta$, puis, avec 4.5.1, on arrive à $\int_{D(z,r)} f = \int_0^r 2\pi f(z) \rho d\rho = 2\pi f(z) \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 f(z)$. $\square$

Cette propriété de la moyenne est reliée à une autre propriété locale des fonctions holomorphes, le principe du maximum, qui comporte deux volets.

***Théorème 4.5.3* (Principe du maximum, I).** — *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que $|f|$ atteint un maximum local. Alors f est constante.*

Démonstration. — Appelons z_0 un point de Ω où $|f|$ atteint un maximum local : pour $r > 0$ petit, $|f(z_0)| = \max_{D(z_0,r)} |f| = m$. Alors 4.5.2 donne

$$m = |f(z_0)| = \frac{1}{\pi r^2} \left| \int_{D(z_0,r)} f \right| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0,r)} |f| \leq \frac{m}{\pi r^2} \int_{D(z_0,r)} 1 = m.$$

Donc il y a égalité dans ces inégalités. Ainsi, $|f|$ est constante à m sur $D(z_0,r)$. Si $m = 0$, f est nulle sur le disque $D(z_0,r)$ donc sur Ω par prolongement analytique (2.3.7). Sinon, par

$\overline{f} = \dfrac{|f|^2}{f} = \dfrac{m^2}{f}$, on voit que $\overline{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$. Les équations de Cauchy-Riemann pour f et $\overline{f}$ montrent alors que les dérivées partielles de f sont nulles sur ce disque : f y est constante. Par prolongement analytique (2.3.7), f est constante sur Ω. □

Remarque 4.5.4. — Donnons une autre preuve, avec les mêmes notations. Si f est constante près de z_0, f est constante, par prolongement analytique. Sinon, le développement en série entière de f en z_0 donne un développement limité du type $f(z_0+h) = f(z_0) + \alpha h^k + o(|h|^k)$ quand $h \to 0$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \neq 0$; en fait, k est l'ordre d'annulation de $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ en z_0. Si $|f(z_0)| = m = 0$, f est nulle sur $D(z_0, r)$ donc partout par prolongement analytique. Si $|f(z_0)| \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{\alpha}{f(z_0)} = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $h = \epsilon e^{-\frac{i\theta}{k}}$, on trouve alors $\dfrac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 + \rho\epsilon^k + o(\epsilon^k)$. Pour $\epsilon > 0$ petit, cela donne $\left|\dfrac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| > 1$, contredisant la maximalité de $|f(z_0)|$.

***Corollaire 4.5.5* (Principe du maximum, II).** — *Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{C}$. Pour toute fonction f continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω, on a*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|.$$

Autrement dit, f atteint son module maximum en un point du bord de Ω. A contrario, le principe du maximum I dit que, si f n'est pas constante, alors f ne peut pas atteindre son module maximum en un point de l'intérieur.

Démonstration. — La fonction continue $|f|$ atteint son maximum en un point z du compact $\overline{\Omega}$. Si z est sur le bord $\partial\Omega$, l'énoncé est prouvé. Sinon, le principe du maximum I (4.5.3) montre que f est constante : un point quelconque w de $\partial\Omega$ vérifie $|f(w)| = |f(z)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$. □

En pratique, le principe du maximum s'utilise souvent ainsi. On s'intéresse à une fonction f holomorphe sur un ouvert U et on veut contrôler f sur un ouvert connexe et borné Ω qui est plus petit que U, au sens où $\overline{\Omega}$ est inclus dans U. En dehors du cas trivial où f est constante, on aura

$$\forall z \in \Omega, \qquad |f(z)| < \max_{\partial\Omega} |f|.$$

L'inégalité large est donnée par le principe du max II. Le principe du maximum I montre que l'égalité n'a pas lieu, puisque f n'est pas constante.

4.6. Théorème de l'application ouverte

Théorème 4.6.1. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in \Omega$. On veut montrer que $f(\Omega)$ contient un voisinage de $w_0 = f(z_0)$. Par le principe des zéros isolés, on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que la fonction holomorphe $z \mapsto f(z) - w_0$ ne s'annule pas sur le cercle $C = C(z_0, r)$. Par compacité de C, on en déduit que $\rho = \min_{z \in C} |f(z) - w_0|$ est strictement positif. En fait, ρ est la distance de w_0 au compact $f(C)$.

On va montrer que $f(\Omega)$ contient le disque $D(w_0, \rho/2)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $w_1 \in D(w_0, \rho/2)$ tel que $w_1 \notin f(\Omega)$. Alors on peut considérer la fonction $\varphi : z \mapsto \dfrac{1}{f(z) - w_1}$, qui est holomorphe. Le principe du maximum (4.5.5) sur $\overline{D(z_0, r)}$ donne

$$|\varphi(z_0)| \leq \max_{D(z_0,r)} |\varphi| = \max_{C} |\varphi|,$$

ce qui, vu la définition de φ, signifie : $\quad |f(z_0) - w_1| \geq \min_{z \in C} |f(z) - w_1|.$

Géométriquement, cela signifie que w_1 est plus proche de $f(C)$ que de $f(z_0) = w_0$. Vu qu'on a pris w_1 proche de w_0, on va arriver à une contradiction. Effectivement, on en déduit :

$$\min_{z \in C} |f(z) - w_0| \leq \min_{z \in C} |f(z) - w_1| + |w_0 - w_1| \leq |f(z_0) - w_1| + |w_0 - w_1| = 2|w_0 - w_1|.$$

Avec la définition de ρ et $w_1 \in D(w_0, \rho/2)$, on en tire $\rho < 2\rho/2$, ce qui est absurde. □

En fait, cette propriété s'explique par la structure locale des fonctions holomorphes. On va voir que, localement, elles ressemblent à des applications du type $\varphi_m : z \mapsto z^m$, $m \in \mathbb{N}$. Or, pour $m \geq 1$, une telle application φ_m est ouverte, c'est-à-dire envoie un ouvert sur un ouvert : $\phi_m(D(0, r)) = D(0, r^m)$ donc l'image d'un voisinage de 0 est un voisinage de 0 ; près des autres points, on peut invoquer le théorème d'inversion locale (ou vérifier directement).

Définition 4.6.2. — Un *biholomorphisme* entre deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ est une bijection $\varphi : U \to V$ qui est holomorphe et de réciproque φ^{-1} holomorphe.

Théorème 4.6.3. — *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non constante sur Ω. Alors, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et un biholomorphisme $\varphi : U \to V$ entre des voisinages ouverts U de z_0 et V de 0 tels que*

$$\forall z \in U, \qquad f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m.$$

L'entier m est l'ordre d'annulation de $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ en z_0, cf. 2.3.10. Il code le comportement local de f au voisinage de z_0 : à biholomorphisme près. Par exemple, si $m \geq 2$, f n'est pas injective au voisinage de z_0, puisque $z \mapsto z^m$ n'est pas injective au voisinage de 0.

Démonstration. — Par 2.3.10, on peut écrire $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$ sur un voisinage U de z_0, avec $g \in \mathcal{O}(U)$, $g(z_0) \neq 0$. Quitte à rétrécir U, on peut supposer $g(U) \subset D(g(z_0), \epsilon)$, avec $0 < \epsilon < |g(z_0)|$. Sur ce disque, on peut trouver un logarithme L (cf exemple 2.5.4). Alors, en posant $h(z) = e^{\frac{1}{m} L(g(z))}$, on obtient $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $h^m = g$. Alors pour $z \in U$, on peut écrire $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$, avec $\varphi(z) = (z - z_0)h(z)$. La fonction φ est holomorphe sur U et $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$, puisque $h(z_0)^m = g(z_0) \neq 0$. Ainsi, la différentielle de φ est inversible en z_0, donc le théorème d'inversion locale montre que, quitte à rétrécir U, φ est un difféomorphisme entre les ouverts U et $V = \varphi(U)$. Enfin, $D(\varphi^{-1})_w = \left(D\varphi_{\varphi^{-1}(w)}\right)^{-1}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, donc φ^{-1} est holomorphe et φ est bien un biholomorphisme. □

On peut en déduire un résultat global qui dit en substance qu'une fonction holomorphe injective est un biholomorphisme (sur son image). Dans le cas réel, il eût fallu une hypothèse sur la différentielle pour appliquer le théorème d'inversion locale. Ici, c'est gratuit : l'injectivité (locale) impose un ordre d'annulation $m = 1$, ce qui signifie que la dérivée n'est pas nulle. La preuve ci-dessous détaille ceci.

Corollaire 4.6.4. — *Soit f une fonction holomorphe injective sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Alors f' ne s'annule pas et f est un biholomorphisme entre les ouverts Ω et $f(\Omega)$.*

Démonstration. — Au voisinage d'un point z_0 de Ω, on écrit $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$ avec les notations du théorème. Dans le cas $m \geq 2$, $w \mapsto w^m$ n'est injective sur aucun voisinage de 0 et φ est bijective, donc $z \mapsto f(z_0) + \varphi(z)^m$ n'est pas injective près de z_0, ce qui contredit l'injectivité de f. Donc $m = 1$. Alors $f'(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ (un difféomorphisme a sa différentielle inversible en tout point). Par hypothèse, f est une bijection holomorphe entre Ω et $f(\Omega)$. Puisque f' ne s'annule pas, on peut appliquer le théorème d'inversion locale au voisinage de tout point pour voir que f^{-1} est différentiable de différentielle $\mathbb{C}$-linéaire ($D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$) : f est un biholomorphisme. □

En particulier, la réciproque d'une fonction holomorphe bijective est holomorphe.

CHAPITRE 5

HOMOTOPIES ET FONCTIONS HOLOMORPHES

On va introduire de nouvelles notions topologiques afin de mieux comprendre la théorie de Cauchy des fonctions holomorphes. On pourra en particulier se passer de convexité et travailler sur des ouverts tels que le plan privé d'une demi-droite, ou bien sur des disques tordus. Ceci nous offrira en outre une plus grande souplesse dans le maniement des intégrales de fonctions holomorphes, ce qui sera utile dans le prochain chapitre.

5.1. Homotopie

Commençons par une remarque. On peut toujours reparamétrer un chemin sur $[0,1]$: étant donné $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, si on introduit $\phi : [0,1] \to [a,b]$ telle que $\phi(t) = (1-t)a + tb$, alors $\gamma \circ \phi$ est un reprmétrage croissant de γ sur $[0,1]$.

Dans ce paragraphe, pour simplifier, on paramètre tous les chemins sur $[0,1]$. On se placera toujours sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, même si les concepts se généralisent bien au-delà.

Définition 5.1.1. — Soient γ_0 et γ_1 deux lacets dans Ω, paramétrés sur $[0,1]$. Une *homotopie* entre γ_0 et γ_1 est une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ telle que

1. $\forall t \in [0,1], \quad H(0,t) = \gamma_0(t) \quad$ et $\quad H(1,t) = \gamma_1(t)$;
2. $\forall s \in [0,1], \quad H(s,0) = H(s,1)$.

On dit alors que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω.

Si s est fixé dans $[0,1]$, $\gamma_s = H(s,.)$ est une application continue de $[0,1]$ dans Ω. La seconde hypothèse ci-dessus garantit que ces γ_s forment en fait une famille de lacets. En fait, l' homotopie H permet de déformer continûment le lacet γ_0 de façon à obtenir le lacet γ_1. Cette déformation se fait en suivant la famille de chemins γ_s, de $s = 0$ à $s = 1$.

Remarque 5.1.2. — Si $\phi : [0,1] \to [0,1]$ est une application continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$, alors tout lacet $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est homotope à $\gamma \circ \phi$ dans Ω : il suffit de poser $H(s,t) = \gamma((1-s)t + s\phi(t))$. En particulier, cela montre que l'existence d'une homotopie entre deux lacets n'est pas affectée par les reparamétrages croissants.

On dira qu'un lacet est *contractile* dans Ω s'il est homotope à un lacet constant ($t \mapsto z_0$, z_0 fixé dans Ω).

Définition 5.1.3. — On dit que Ω est *simplement connexe* si Ω est connexe et tout lacet de Ω est contractile dans Ω.

Intuitivement, $\mathbb{C}$ est simplement connexe alors que $\mathbb{C}^*$ ne l'est pas : dans $\mathbb{C}^*$, il y a un trou autour duquel on peut tracer des lacets non contractiles. On va clarifier ceci dans la suite.

Remarque 5.1.4. — Si F est une application continue sur Ω et si H est une homotopie entre deux lacets γ_0 et γ_1, dans Ω, alors $F \circ H$ est une homotopie entre $F \circ \gamma_0$ et $F \circ \gamma_1$. En particulier, ceci permet de voir que si un ouvert est homéomorphe à un ouvert simplement connexe, alors il est lui-même simplement connexe.

Afin d'avoir un critère simple assurant la simple connexité, disons qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est *étoilé* par rapport à $z_0 \in \Omega$ si, pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans Ω.

Proposition 5.1.5. — *Un ouvert étoilé est simplement connexe.*

Démonstration. — Supposons Ω étoilé par rapport à z_0. En particulier, Ω est connexe (par arcs). De plus, étant donné un lacet γ, on peut poser $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$ et vérifier que ceci définit bien une homotopie entre γ et le lacet constant à z_0, dans Ω. □

Exemple 5.1.6. — Un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points, donc simplement connexe. Par exemple, on voit ainsi que le plan $\mathbb{C}$ et les disques $D(z,r)$ sont simplement connexes.

Exemple 5.1.7. — Pour tout $\alpha \in \mathbb{S}^1$, l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \alpha\mathbb{R}_+$ est étoilé par rapport à $-\alpha$, donc simplement connexe.

5.2. Homotopie et théorème de Cauchy

On va ici généraliser le théorème de Cauchy local (3.4.5) en remplaçant l'hypothèse de convexité de Ω par un critère homotopique. Un problème technique vient du fait que les homotopies sont naturellement des objets continus, alors que les intégrales le long de chemins réclament un peu de régularité, disons des chemins C^1 par morceaux. Le lemme suivant permet de contourner cette difficulté. Il est très intuitif : faire un dessin !

Lemme 5.2.1. — *Pour tout lacet $\gamma : [0,1] \to \Omega$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un lacet affine par morceaux $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ tel que*
- $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ *et* $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ *;*
- $\sup\limits_{[0,1]} |\gamma - \tilde{\gamma}| \leq \epsilon$
- γ *et* $\tilde{\gamma}$ *sont homotopes dans* Ω.

Démonstration. — La distance d du compact γ^* au fermé disjoint $\mathbb{C} \backslash \Omega$ est strictement positive : on peut supposer $\epsilon < d/10$. Comme γ est continue sur un compact, γ est uniformément continue : on dispose d'un $\delta > 0$ tel que $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon/2$ dès que $|t-t'| < \delta$. Choisissons alors une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ telle que $|t_i - t_{i+1}| < \delta$ pour tout i et considérons le chemin $\tilde{\gamma}$ obtenu en concaténant les segments $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$, $0 \leq i \leq n-1$. Chaque segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ est de longueur au plus $\epsilon/2$, donc reste à distance au plus $\epsilon/2$ de $\gamma(t_i)$. Le choix des t_i garantit aussi que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ reste à distance au plus $\epsilon/2$ de $\gamma(t_i)$. Par inégalité triangulaire, on en déduit $\sup|\gamma - \tilde{\gamma}| \le \epsilon$. En posant $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)$, on obtient une homotopie H entre γ et $\tilde{\gamma}$. De plus, pour tous s et t, on a $|H(s,t) - \gamma(t)| = s|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \le \epsilon$, donc H reste à distance au plus ϵ de γ^*, donc à distance au moins $d - \epsilon > 0$ de $\mathbb{C}\backslash\Omega$: ainsi, H est une homotopie dans Ω. $\square$

***Théorème 5.2.2* (Théorème de Cauchy).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que γ_0 et γ_1 sont deux lacets C^1 par morceaux et homotopes dans Ω. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega), \qquad \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Démonstration. — Dans un premier temps, on suppose que γ_1 est proche de γ_0 : pour tout $t \in [0,1]$, $|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < r_{\gamma_0}$, avec $r_{\gamma_0} = d(\gamma_0^*, \mathbb{C}\backslash\Omega)/2$. Par uniforme continuité de γ_0, on trouve une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ telle que $|\gamma_0(t) - \gamma_0(t_i)| < r_{\gamma_0}$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et pour tout i. Pour $i = 0, \ldots, n-1$, on considère alors le lacet c_i obtenu en concaténant $\gamma_0|_{[t_i,t_{i+1}]}$, le segment $[\gamma_0(t_{i+1}), \gamma_1(t_{i+1})]$, l'opposé de $\gamma_1|_{[t_i,t_{i+1}]}$ et enfin le segment $[\gamma_1(t_i), \gamma_0(t_i)]$. Par inégalité triangulaire (faire un dessin), on voit que c_i^* est inclus dans le disque $D(\gamma_0(t_i), 2r_{\gamma_0}) \subset \Omega$. On peut ainsi appliquer le théorème de Cauchy local sur l'ouvert convexe $D(\gamma_0(t_i), 2r_{\gamma_0})$, où f est holomorphe : $\displaystyle\int_{c_i} f = 0$. Or, par la relation de Chasles, on a aussi $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f$ (les intégrales sur les segments ajoutés se compensent). On en déduit $\displaystyle\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ dans le cas où γ_1 est proche de γ_0.

Revenons au cas général. On dispose d'une homotopie H entre γ_0 et γ_1. Notons r la moitié de la distance entre l'image de H et $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Par uniforme continuité de H, on trouve une subdivision $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $i = 0, \ldots, m-1$, $|H(s_{i+1}, t) - H(s_i, t)| < r/10$. Les lacets $H(s_i, .)$, $0 < i < m$, ne sont pas forcément C^1 par morceaux : on les remplace par les lacets affines par morceaux $\sigma_i = \widetilde{H(s_i, .)}$ donnés par le lemme 5.2.1, avec $\epsilon = r/10$. On pose aussi $\sigma_0 = \gamma_0$ et $\sigma_m = \gamma_1$. Ainsi, les lacets successifs σ_i et σ_{i+1} sont homotopes entre eux et suffisamment proches pour appliquer le cas précédent : $\displaystyle\int_{\sigma_i} f = \int_{\sigma_{i+1}} f$.

Par récurrence immédiate, on en déduit $\displaystyle\int_{\sigma_0} f = \int_{\sigma_m} f$, i.e. $\displaystyle\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$. $\square$

Corollaire 5.2.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que γ est un lacet C^1 par morceaux et contractile dans Ω. Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega), \qquad \int_{\gamma} f = 0.$$

Démonstration. — Par 5.2.2, l'intégrale $\int_\gamma f$ est égale à l'intégrale de f le long d'un chemin constant $\gamma_1 : t \mapsto z_0$. Et un calcul immédiat donne $\int_{\gamma_1} f = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = 0$. □

Si l'ouvert Ω est simplement connexe, tous les lacets y sont contractiles, d'où le résultat suivant.

Corollaire 5.2.4. — *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Alors l'intégrale de toute fonction holomorphe sur Ω le long de tout lacet C^1 par morceaux dans Ω est nulle.*

5.3. Applications

Proposition 5.3.1. — *L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. — La fonction $z \mapsto 1/z$ est en effet holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, mais d'intégrale non nulle sur le cercle unité : $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi$. Le corollaire 5.2.4 montre que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. □

Théorème 5.3.2. — *Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que γ_0 et γ_1 sont deux lacets C^1 par morceaux et homotopes dans $\mathbb{C}\backslash\{z\}$. Alors ils ont le même indice par rapport à z : $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$.*

Démonstration. — Il suffit de prendre $f(w) = 1/(w - z)$ et $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{z\}$ dans le théorème de Cauchy 5.2.2. □

Remarque 5.3.3. — On peut montrer que l'indice caractérise entièrement les lacets dans $\mathbb{C}^*$, vus à homotopie près. En fait, tout lacet γ de $\mathbb{C}^*$ est homotope à l'un des lacets $\sigma_n : t \mapsto e^{2i\pi nt}$ ($t \in [0, 1]$). L'entier $n \in \mathbb{Z}$ est exactement l'indice de γ par rapport à 0.

Le théorème de Cauchy montre aussi que, dans un ouvert simplement connexe, l'intégrale d'une fonction holomorphe f sur un chemin reliant un point α à un point β ne dépend que des extrémités et pas du chemin suivi : si γ_1 et γ_2 sont deux chemins reliant α à β, alors la concaténation de γ_1 avec l'opposé de γ_2 produit un lacet σ. Le théorème de Cauchy donne $\int_\sigma f = 0$ et, par Chasles, cela signifie : $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. Cela mène au résultat suivant.

Théorème 5.3.4. — *Sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, toute fonction holomorphe admet une primitive holomorphe.*

Démonstration. — Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe Ω. Fixons un point z_0 dans Ω. Pour tout $z \in \Omega$, on pose $F(z) = \int_{\gamma_z} f$, où γ_z est un chemin C^1 par morceaux reliant z_0 à z ; il y en a un par connexité de Ω et la valeur de $F(z)$ ne dépend pas de celui qu'on choisit par simple connexité de Ω (cf. remarque ci-dessus). On va montrer que F est holomorphe de dérivée f. Pour $z \in \Omega$ et $h \neq 0$ petit, on peut écrire $F(z + h) = \int_{\sigma_{z,h}} f$, où $\sigma_{z,h}$

est choisi pour favoriser nos desseins : c'est la concaténation de γ_z et du segment $[z, z+h]$. Par Chasles, on obtient $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f$. On en déduit comme précédemment :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$$

quand $h \to 0$, par convergence dominée. □

On en déduit l'existence de logarithmes sur les ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}^*$.

Corollaire 5.3.5. — *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annulant pas, il existe $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f = e^{\phi}$. En particulier, si Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$, il existe une détermination continue du logarithme, et donc de toute puissance.*

Démonstration. — La fonction f'/f est holomorphe sur Ω, donc admet une primitive holomorphe ϕ. Alors la dérivée de $fe^{-\phi}$ est nulle, donc cette fonction est constante (1.4.2) ; elle est de plus non nulle, donc on peut ajouter une constante à ϕ pour que $fe^{-\phi} = 1$. Le cas particulier consiste à prendre $f(z) = z$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}^*$. □

On peut généraliser la formule de Cauchy.

***Théorème 5.3.6* (Formule de Cauchy).** — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que γ est un lacet C^1 par morceaux et contractile dans Ω. Alors :*

$$\forall z \notin \gamma^*, \qquad f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Démonstration. — A z fixé, on définit $g(w) = \dfrac{f(w) - f(z)}{w-z}$ si $w \neq z$. Cette fonction g est holomorphe sur $\Omega\backslash\{z\}$ et se prolonge par continuité en z, en posant $g(z) = f'(z)$; elle est en particulier bornée près de z, donc, par 4.1.7, g définit une fonction holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy (5.2.2), son intégrale le long de γ est nulle. En développant l'expression, on trouve la formule de Cauchy. □

Terminons par une application numérique qui préfigure la suite.

Exemple 5.3.7. — Considérons la fonction holomorphe définie par $f(z) = e^{iz}/z$, sur $\mathbb{C}^*$. Considérons un lacet γ qui paramètre naturellement le bord de l'ouvert

$$\Omega_{\epsilon,R} = \{\ z \in \mathbb{C}/\epsilon < |z| < R \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

C'est la concaténation d'un grand demi-cercle σ_R orienté positivement, du segment $[-R, -\epsilon]$, d'un petit demi-cercle τ_ϵ orienté négativement et du segment $[\epsilon, R]$. Ce lacet γ est contractile dans $\mathbb{C}^*$: en fait, il est tracé dans l'ouvert étoilé (donc simplement connexe) $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$. Par le théorème de Cauchy, on a donc : $\int_\gamma f = 0$. Mais l'intégrale sur σ_R s'écrit $\int_{\sigma_R} f = i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt$ et tend vers 0 quand $R \to +\infty$, par convergence dominée : le module de l'intégrande, $e^{-R\sin t}$, est en fait majoré par 1 (domination) et tend vers 0 pour tout t dans $]0, \pi[$. Un calcul similaire montre que l'intégrale sur τ_ϵ rend vers $-i\pi$ quand $\epsilon \to 0$. On obtient ainsi que l'expression

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{it}}{t} dt - i\pi + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{it}}{t} dt$$

tend vers 0 quand $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$. Cela donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE 6

SINGULARITÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

On va s'intéresser à des fonctions holomorphes sur un ouvert privé de certains points isolés, qu'on appellera des singularités. Cette situation intervient naturellement dans les applications : elle conduit notamment à une technique de calcul d'intégrales extrêmement puissante.

6.1. Classification des singularités

On considère une fonction f holomorphe sur un disque épointé $D'(z_0, r) = D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. La question est : comment se comporte f au voisinage de z_0 ? On a déja vu un premier résultat (4.1.7) : si f est bornée, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le disque $D(z_0, r)$. Dans ce cas, on dit que la singularité n'est qu'apparente. Le théorème suivant décrit la situation générale.

Théorème 6.1.1. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de Ω et f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_0\}$. Il y a trois cas.*

1. *La fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω : c'est une* singularité apparente.
2. *Le module de $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0 : dans ce cas, pour $z \in \Omega\backslash\{z_0\}$, on peut écrire $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $g(z_0) \neq 0$; on dit que f admet un* pôle d'ordre m.
3. *L'image de tout disque épointé non vide $D'(z_0, r) \subset \Omega$ par f est dense dans $\mathbb{C}$; c'est une singularité essentielle.*

Remarque 6.1.2. — Dans le troisième cas (connu sous le nom de Casorati-Weierstrass), la densité de $f(D'(z_0, r))$ pour tout $r > 0$ signifie que pour tout w dans $\mathbb{C}$, on peut trouver une suite de points $z_n \to z_0$ telle $f(z_n)$ tend vers w. C'est une propriété très sauvage, bien différente des deux autres cas : dans le premier, il existe un $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_n)$ tend vers w_0 pour tout suite $(z_n) \to z_0$; dans le deuxième, le module de $|f(z_n)|$ tend vers $+\infty$ pour tout suite $(z_n) \to z_0$.

Donnons un exemple pour chaque cas, avec $\Omega = \mathbb{C}$ et $z_0 = 0$.

Exemple 6.1.3. — La fonction $f : z \mapsto \dfrac{e^z - 1}{z}$ a une singularité apparente en 0, par le développement en série entière de l'exponentielle.

Exemple 6.1.4. — La fonction $f : z \mapsto 1/z^m$ a un pôle d'ordre m en 0.

Exemple 6.1.5. — La fonction $f : z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en 0. Pour le vérifier, il suffit d'invoquer le théorème 6.1.1 et de dire que $f(\pm 1/n) = e^{\pm n}$; ainsi, on a une suite tendant vers 0 dont l'image par f tend vers l'infini (en module), donc la singularité n'est pas apparente ; on a aussi une suite tendant vers 0 dont l'image par f tend vers 0, donc la singularité n'est pas un pôle ; c'est donc une singularité essentielle. Et en fait, pour $r > 0$, l'image de $D'(0, r)$ par f est $\exp(\mathbb{C} \backslash \overline{D(0, 1/r)})$. En utilisant la $2i\pi$-périodicité de exp, on voit que c'est toujours l'image tout entière de l'exponentielle, c'est-à-dire $\mathbb{C}^*$, qui est bien dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Supposons que le troisième cas n'a pas lieu. On va montrer que f tombe alors forcément dans l'une des deux premières situations, singularité apparente ou pôle. En niant 3., on sait qu'il existe $r > 0$ tel que $f(D'(z_0, r))$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Cela signifie qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que le disque $D(w, \delta)$ est disjoint de $f(D'(z_0, r))$: pour tout $z \in D'(z_0, r)$, $|f(z) - w| \geq \delta$. On peut alors définir $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$ sur $D'(z_0, r)$. On obtient ainsi une fonction φ holomorphe et bornée par δ sur le disque épointé. Par 4.1.7, on peut l'étendre en une fonction $\tilde{\varphi}$ holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$.

Si $\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0$, on peut écrire, pour $z \in D'(z_0, r)$, $f(z) = w + \dfrac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$ et on voit que f s'étend de façon holomorphe en z_0, de sorte qu'on est dans le cas 1.

Si $\tilde{\varphi}(z_0) = 0$, on note $m \in \mathbb{N}^*$ son ordre d'annulation en z_0 (m est bien défini puisque $\tilde{\varphi}$ n'est pas nul hors de z_0). Alors, pour z près de z_0, on peut écrire $\tilde{\varphi}(z) = (z - z_0)^m h(z)$, avec h holomorphe et $h(z_0) \neq 0$. On en tire, pour $z \neq z_0$ proche de z_0 :

$$(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{h(z)} + w(z - z_0)^m.$$

Le membre de droite est bien défini et holomorphe sur un voisinage de z_0. Cela montre que $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ s'étend en une fonction g holomorphe sur Ω tout entier. De plus, on a $g(z_0) = \dfrac{1}{h(z_0)} \neq 0$. La fonction f a donc un pôle d'ordre m en z_0 ; en particulier, quand z tend vers z_0, $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m} \sim \dfrac{g(z_0)}{(z - z_0)^m}$ tend vers l'infini en module. □

En pratique, la recherche d'un équivalent de f permet souvent de trancher. Par exemple, si f admet une limite (finie) w en z_0, la singularité n'est qu'apparente et le prolongement holomorphe consiste à poser $f(z_0) = w$. Si on trouve plutôt que pour $h \to 0$, $f(z + h) \sim \dfrac{\alpha}{h^m}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ en z_0, donc f admet un pôle en z_0 ; et l'ordre du pôle est m (puisque pour tout autre exposant m', $(z - z_0)^{m'} f(z)$ tend vers 0 ou l'infini en module).

6.2. Développement en série de Laurent

Notre but est d'analyser les singularités de fonctions holomorphes f sur $D'(z_0, R)$ par un développement en série de type "série entière". On va travailler sur des anneaux

$$A(z_0, R_1, R_2) = D(z_0, R_2) \backslash \overline{D(z_0, R_1)} = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

avec $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$. Insistons sur le fait que le discussion inclut le cas où le rayon intérieur R_1 est nul : dans ce cas, l'anneau $A(z_0, 0, R)$ est exactement le disque épointé $D'(z_0, R)$. Le rayon extérieur R_2 peut aussi être infini, auquel cas l'anneau est le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.2.1. — Une *série de Laurent* est une série de fonctions s'écrivant

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \ge 0} a_n z^n + \sum_{n \ge 1} a_{-n} z^{-n},$$

où les a_n sont des coefficients complexes. On dit qu'elle converge en $z \in \mathbb{C}^*$ si les deux séries $\sum_{n \ge 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \ge 1} a_{-n} z^{-n}$ convergent.

Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \ge 0} a_n z^n$ et $1/R_1$ celui de la série entière $\sum_{n \ge 1} a_{-n} w^n$. Le rayon $R_1 \in [0, +\infty]$ est donc défini de sorte que $\sum_{n \ge 1} a_{-n} z^{-n}$ converge si $|z| > R_1$ et diverge si $|z| < R_1$. Ainsi, la série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge sur l'anneau $A(0, R_1, R_2)$ et diverge sur $\mathbb{C} \backslash \overline{A(0, R_1, R_2)}$.

La théorie des séries entières s'applique aux deux morceaux d'une série de Laurent ($n \ge 0$ et $n \le -1$). En particulier, on a convergence normale sur tout anneau fermé $\overline{A(0, r_1, r_2)}$ tel que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. De même, la somme d'une série de Laurent est holomorphe sur $A(0, R_1, R_2)$.

Le théorème suivant donne une réciproque à cet énoncé. De même que les fonctions holomorphes sur un disque D sont exactement les sommes de séries entières convergentes sur D, les fonctions holomorphes sur un anneau A sont exactement les sommes de séries de Laurent convergentes sur A.

Théorème 6.2.2. — *Soit f une fonction holomorphe sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$. Alors f admet un développement en série de Laurent : il existe des nombres complexes a_n, $n \in \mathbb{Z}$, tels que*

$$\forall z \in A(z_0, R_1, R_2), \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Les coefficients a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \tag{9}$$

pour n'importe quel r dans $]R_1, R_2[$.

La preuve du théorème repose sur une formule de Cauchy adaptée : pour $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ et $z \in A(z_0, R_1, R_2)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{10}$$

Pour voir cette formule, on peut à nouveau introduire la fonction $g : w \mapsto \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$, qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $A(z_0, R_1, R_2)$ (cf. la preuve de 5.3.6). Comme les cercles $C(z_0, r_2)$ et $C(z_0, r_1)$ sont homotopes dans l'anneau (prendre $H(s,t) = z_0 + (1-s)r_2 e^{it} + s r_1 e^{it}$), le théorème de Cauchy 5.2.2 montre que les intégrales de g le long de ces deux cercles sont égales, ce qui donne

$$\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{C(z_0,r_2)} \frac{dw}{w-z} = \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{C(z_0,r_1)} \frac{dw}{w-z}.$$

Maintenant, on interprète $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r_2)} \frac{dw}{w-z}$ comme l'indice du lacet $C(z_0, r_2)$ par rapport au point z : par 3.3.2, cet indice est 1 (parce que z est à l'intérieur du cercle). De même, $\displaystyle\int_{C(z_0,r_1)} \frac{dw}{w-z} = 2i\pi \operatorname{Ind}_{C(z_0,r_1)}(z) = 0$ (z est cette fois à l'extérieur). Et on obtient la formule (10).

Remarque 6.2.3. — Une autre preuve consiste à appliquer la formule de Cauchy 5.3.6 à un lacet γ parcourant le grand cercle $C(z_0, r_2)$ dans le sens positif, puis un segment radial, puis le petit cercle $C(z_0, r_1)$ dans le sens négatif et enfin l'opposé du segment précédent pour revenir au point de départ. Un dessin aidera bien le lecteur à voir pourquoi un tel lacet est contractile dans l'anneau et pourquoi l'indice de γ par rapport à un point z de $A(z_0, R_1, R_2) \backslash \gamma^*$ est 1. Pour obtenir (10), il reste à utiliser Chasles pour décomposer l'intégrale de Cauchy le long de γ en quatre morceaux, deux sur des segments opposés qui se compensent et deux sur les cercles, donnant les termes voulus.

Prouvons le théorème 6.2.2.

Démonstration. — Le développement en série de Laurent s'obtient à partir de la formule de Cauchy 10 en développant convenablement les deux intégrandes. Pour le premier morceau, celmui où $|w - z_0| = r_2$, on écrit

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n,$$

cette série géométrique convergeant puisque $|z - z_0| < r_2 = |w - z_0|$. De même, dans la seconde intégrale, on a $|w - z_0| = r_1$, avec cette fois $|z - z_0| > r_1$, et on peut développer ainsi ($m = -n - 1$) :

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n.$$

Avec la convergence normale de ces séries de fonctions sur les deux cercles, on peut permuter intégrale et somme pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(z) = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} f(w)(w-z_0)^n dw\right)(z-z_0)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a presque l'expression voulue, avec $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ si $n \geq 0$ et $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ si $n \leq -1$.

Reste à voir qu'on peut remplacer r_2 et r_1 par un r quelconque dans $]R_1, R_2[$. A cette fin, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ est holomorphe sur $A(z_0, R_1, R_2)$ (parce qu'on a remplacé z par z_0 !). Les cercles $C(z_0, r)$, $R_1 < r < R_2$, sont tous homotopes entre eux dans cet anneau, donc le théorème de Cauchy 5.2.2 montre que les intégrales $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ ne dépendent pas de r. □

Proposition 6.2.4. — *Le développement en série de Laurent est unique.*

Démonstration. — Si on a le développement $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, alors les coefficients a_n obéissent à la formule (9) et donc ne dépendent que de f. En effet, on peut utiliser la convergence normale pour écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}}dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}(w-z_0)^{n-m-1}dw.$$

Par 3.4.3, ces intégrales sont nulles sauf si $n-m-1 = -1$, i.e. $n = m$. Dans ce cas, on reconnaît l'indice du cercle :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}}dw = \frac{a_m}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{dw}{w-z_0} = a_m.$$

□

On peut lire la nature des singularités sur le développement en série de Laurent. Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D'(z_0, r)$. Ecrivons le développement en série de Laurent de f sur $A(z_0, 0, r) = D'(z_0, r)$: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

1. La fonction f a une singularité apparente en z_0 si et seulement si f admet un développement en série entière au voisinage de z_0. Par unicité du développement en série de Laurent, cela signifie exactement : $a_n = 0$ pour tout $n \leq -1$.
2. La fonction f admet un pôle d'ordre m en z_0 si et seulement si $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe ne s'annulant pas en z_0, c'est-à-dire qu'on a un développement en série entière $(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ au voisinage de z_0, avec $b_0 \neq 0$. Et cela revient à dire qu'on a un développement en série de Laurent
$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
avec $a_{-m} \neq 0$, en posant $a_n = b_{m+n}$, pour tout $n \geq -m$. Ce type de développement en série de Laurent caractérise exactement les pôles d'ordre m.
3. Par le théorème 6.1.1, f admet une singularité essentielle en z_0 si et seulement si les deux cas précédents n'ont pas lieu, i.e. on a une infinité d'indices n négatifs tels que a_n est non nul.

Exemple 6.2.5. — On a déjà vu que $z \mapsto \exp(1/z)$ a une singularité essentielle en 0. Le développement en série entière de l'exponentielle donne un développement en série de Laurent de cette fonction, valide sur $\mathbb{C}^*$:
$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n.$$

Remarque 6.2.6. — Soit f une fonction holomorphe sur $D'(z_0, r) = A(z_0, 0, r)$. Le théorème 6.2.2 permet d'écrire $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $0 < |z - z_0| < r$. On peut alors remarquer que la partie négative de ce développement, $\sum_{n \leq 0} a_n (z - z_0)^n$, converge sur tout $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. En effet, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_{-n} w^n$ converge pour $1/r < |w| < +\infty$ (on a posé $w = 1/(z - z_0)$), donc son rayon de convergence est infini et elle converge partout.

6.3. Résidus

Définition 6.3.1. — Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D'(z_0, R)$, de développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Le *résidu* de f en z_0 est le nombre complexe $\text{Rés}(f, z_0) = a_{-1}$.

L'intérêt de ce coefficient a_{-1} apparaît clairement quand on veut trouver une primitive holomorphe pour f. En effet, si le résidu a_{-1} est nul, le développement en série de Laurent s'intègre terme à terme en $\displaystyle\sum_{n\neq -1}\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ pour donner une primitive de f sur $D'(z_0,R)$, comme pour les séries entières. Par contre, le terme $\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$, s'il n'est pas nul, n'admet pas de primitive holomorphe sur $D'(z_0,R)$: c'est encore et toujours dû au fait que l'intégrale de ce terme le long d'un cercle autour de z_0 n'est pas nulle, puisque c'est essentiellement l'indice du cercle par rapport à son centre, cf. 3.4.3. Le résidu de f en z_0 est donc exactement l'obstruction à trouver une primitive holomorphe de f sur le disque épointé $D'(z_0,R)$.

Dans le même esprit, la formule (9) donne l'expression suivante pour le résidu : pour $0<r<R$,

$$\mathrm{Rés}(f,z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}f(w)dw.$$

Les résidus sont intimement liés au calcul d'intégrales de fonctions holomorphes et donnent une formule toute puissante.

***Théorème 6.3.2* (Formule des résidus).** — *Soit γ un lacet C^1 par morceaux et contractile dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_1,\dots,z_N\}$, pour des points $z_1,\dots,z_N$ situés hors de l'image de γ. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f \;=\; \sum_{k=1}^{N}\mathrm{Rés}(f,z_k)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_k).$$

Dans cet énoncé, on notera bien que γ est supposé contractile dans Ω tout entier : l'homotopie contractant γ sur un point a le droit de passer par les points z_k et c'est tout l'intérêt de ce théorème !

Démonstration. — Près de chaque z_k, on peut écrire un développement en série de Laurent : $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_{n,k}(z-z_k)^n$. Notons $f_k(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}a_{n,k}(z-z_k)^n$ la partie avec des puissances négatives. La remarque 6.2.6 montre que cette formule définit une fonction holomorphe f_k sur $\mathbb{C}\backslash\{z_k\}$. Ainsi, la fonction $g=f-\displaystyle\sum_{k=1}^{N}f_k$ est bien définie et holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_1,\dots,z_N\}$. En outre, par construction, $f-f_k$ est donné par une série entière près de z_k, donc n'y admet qu'une singularité apparente ; et les fonctions f_j, pour $j\neq k$, sont holomorphes près de z_k. Donc g n'a que des singularités apparentes aux points z_k et se prolonge en une fonction holomorphe sur tout Ω. Le théorème de Cauchy 5.2.2 donne alors $\displaystyle\int_\gamma g=0$, d'où :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_k.$$

Par convergence normale des séries de Laurent, on a pour chaque k :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_k = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,k}\int_\gamma (z-z_k)^n dz.$$

Pour $n \neq -1$, $z \mapsto (z-z_k)^n$ admet une primitive holomorphe, donc s'intègre en 0 le long du lacet γ. Il reste :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_k = a_{-1,k}\,\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_k} = \text{Rés}(f,z_k)\,\text{Ind}_\gamma(z_k).$$

□

Remarque 6.3.3. — Afin d'utiliser ce théorème pour calculer des intégrales, il faut savoir calculer les résidus. Le cas usuel est celui où f s'écrit sur un disque épointé $D'(z_0,r)$ comme un quotient de fonctions holomorphes $\dfrac{u}{v}$. Le développement en série entière de ces fonctions permet décrire pour $h \in \mathbb{C}^*$ petit : $u(z_0+h) = a_k h^k + a_{k+1}h^{k+1} + \dots$ et $v(z_0+h) = b_l h^l + b_{l+1}h^{l+1} + \dots$, avec $k,l \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ et $b_l \neq 0$. Cela donne :

$$f(z_0+h) = \frac{a_k h^k + a_{k+1}h^{k+1} + a_{k+2}h^{k+2} + \dots}{b_l h^l + b_{l+1}h^{l+1} + b_{l+2}h^{l+2} + \dots} = \frac{c}{h^m}\,\frac{1+\alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots}{1+\beta_1 h + \beta_2 h^2 + \dots},$$

en posant $c = a_k/b_l$, $m = l-k$, $\alpha_i = a_{k+i}$, $\beta_j = b_{l+j}$. On peut alors faire un développement limité du quotient pour obtenir une expression du type

$$f(z_0+h) = \frac{c}{h^m}\,\left(1+\gamma_1 h + \gamma_2 h^2 + \dots\right).$$

Si m est strictement positif, ce calcul donne le développement en série de Laurent d'un pôle en z_0. Le résidu est le coefficient devant h^{-1}, c'est-à-dire $c\,\gamma_{m-1}$. Pour m assez petit, le calcul est rapide. Par exemple, si on a pôle simple, i.e. $m=1$, le résidu de f en z_0 est c ; dans ce cas, le résidu est simplement donné par l'équivalent $f(z_0+h) \sim \dfrac{c}{h}$. Attention, si le pôle est d'ordre supérieur, l'équivalent ne suffit pas, il faut pousser le développement limité jusqu'au bon terme.

Remarque 6.3.4. — Si la fonction étudiée f se présente sous la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^p}$, avec g holomorphe, le résidu de f en z_0 est l'un des coefficients du développement de Taylor de g en z_0, celui d'ordre $p-1$. D'où la formule $\text{Rés}(f,z_0) = \dfrac{g^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!}$, dans ce cas.

Exemple 6.3.5. — Utilisons la formule des résidus pour calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}.$$

L'intégrande est continu et décroît comme x^{-6} à l'infini, donc il est intégrable. On introduit la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} = \dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z+2i)(z-2i)}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{\pm i, \pm 2i\}$. On va l'intégrer sur le bord de $\Omega_R = \{z \in D(0,R)/\text{Im(z)} > 0\}$, orienté dans le sens positif, pour R grand. Ce bord $\partial\Omega_R$ est un lacet contractile dans $\mathbb{C}$ (puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe), son indice par rapport à i et $2i$ est 1, tandis qu'il est d'indice nul par rapport à $-i$ et $-2i$ (par 5.3.2 et 3.3.2). Le théorème des résidus donne donc :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega_R} f = \text{Rés}(f,i) + \text{Rés}(f,2i).$$

Le lacet $\partial\Omega_R$ peut être vu comme la concaténation du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle $C_R^+ = C(0,R)\cap\{z, \text{Im(z)} \geq 0\}$, donc :

$$\int_{[-R,R]} f + \int_{C_R^+} f = 2i\pi\left(\text{Rés}(f,i) + \text{Rés}(f,2i)\right).$$

La seconde intégrale se majore grossièrement pour R grand (cf. 6) :

$$\left|\int_{C_R^+} f\right| \leq \pi R \times C\ R^{-6} \to 0,$$

donc en faisant tendre R vers l'infini, on arrive à :

$$I = \int_{\mathbb{R}} f = 2i\pi\left(\text{Rés}(f,i) + \text{Rés}(f,2i)\right).$$

Reste à calculer les résidus, en $2i$ et i. L'équivalent $f(2i+h) \sim \dfrac{1}{(3i)^2 i^2 (4i)h} = \dfrac{1}{36i\,h}$ dit tout de suite que $2i$ est un pôle simple de résidu $\dfrac{1}{36i}$. Par ailleurs, on a

$$f(i+h) = \frac{1}{h^2}\frac{1}{(2i+h)^2(3i+h)(-i+h)} = -\frac{1}{12h^2}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{2i}\right)^2\left(1+\frac{h}{3i}\right)\left(1-\frac{h}{i}\right)},$$

d'où le développement limité : $f(i+h) = -\dfrac{1}{12h^2}\left(1 - \dfrac{h}{3i} + O(h^2)\right)$. On en déduit que le résidu de f en i est $\dfrac{1}{36i}$. Finalement, on trouve : $I = \dfrac{\pi}{9}$.

6.4. Détection des zéros

La formule des résidus permet de localiser les zéros des fonctions holomorphes.

Théorème 6.4.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D(z_0,r)}$. Soit f une fonction holomorphe sur Ω, ne s'annulant pas sur le cercle $C = C(z_0,r)$. Alors l'indice*

$$\text{Ind}_{f(C)}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'}{f}$$

est le nombre de zéros de f dans le disque $D(z_0,r)$, comptés avec leur multiplicité.

Dans ce contexte, par le principe des zéros isolés, f a un nombre fini de zéros dans le compact $\overline{D(z_0,r)}$. Notons les $z_1,\dots,z_N$. Par hypothèse, ils ne sont pas dans C, donc ce sont des points du disque ouvert $D(z_0, r)$. Appelons m_k l'ordre d'annulation de f en z_k. Le théorème dit que l'indice de $f(C)$ par rapport à 0 est exactement $\sum_{k=1}^{N} m_k$.

Démonstration. — D'abord, on vérifie la formule donnée pour l'indice, en paramétrant C par $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$. Alors $f \circ \gamma$ paramètre $f(C)$ et on trouve

$$\mathrm{Ind}_{f(C)}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f\circ\gamma(t)}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'}{f}.$$

Ensuite, avec les notations introduites ci-dessus, on voit que $z_1, \dots, z_N$ sont les seuls zéros de f dans un disque $D(z_0, r')$ de rayon r' un peu plus grand que r : c'est parce que f ne s'annule pas sur C, donc reste non nulle sur un voisinage de C. Ainsi, le quotient $\frac{f'}{f}$ est une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, r')$ privé des points $z_1, \dots, z_N$. Le cercle C est contractile dans ce disque, évite les points z_k et son indice par rapport à chaque z_k est 1. La formule des résidus donne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Rés}(f'/f, z_k).$$

Pour calculer ces résidus, on écrit près de chaque z_k : $f(z) = (z - z_k)^{m_k} g_k(z)$, avec g_k holomorphe ne s'annulant pas. Un calcul rapide donne

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}.$$

Le second terme est holomorphe, donc cette formule montre que f'/f admet un pôle simple en z_k, de résidu m_k. Cela prouve le théorème. □

***Corollaire 6.4.2* (Théorème de Rouché).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. On suppose que f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles que*

$$\forall z \in C(z_0, r), \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque $D(z_0, r)$.

L'inégalité stricte dans l'hypothèse assure en particulier que f et g ne s'annulent pas sur le cercle $C(z_0, r)$: sinon, on aurait un point z tel que $|-g(z)| < 0$ ou bien $|f(z)| < |f(z)|$, ce qui est absurde.

L'idée est que si on déforme un peu f en une fonction g alors les zéros de g ne seront pas loin de ceux de f : c'est une propriété de continuité de l'ensemble des zéros, quand on fait varier la fonction. Il faut faire un peu attention : un zéro multiple peut devenir plusieurs zéros de multiplicité inférieure. Par exemple, $f : z \mapsto z^2$ a un unique zéro d'ordre deux en 0 et, pour $\epsilon > 0$, $g_\epsilon : z \mapsto z^2 + \epsilon$ a deux zéros simples, en $\pm i\sqrt{\epsilon}$.

Démonstration. — On note $C = C(z_0, r)$. La preuve consiste à montrer que les indices des lacets $f(C)$ et $g(C)$ par rapport à 0 sont égaux, ce qui permet d'appliquer le théorème 6.4.1 pour trouver le résultat. On bâtit une homotopie entre ces lacets en posant

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad H(s, t) = (1 - s) f \circ \gamma(t) + s g \circ \gamma(t),$$

où γ paramètre le cercle C, comme ci-dessus. Pour en déduire $\mathrm{Ind}_{f(C)}(0) = \mathrm{Ind}_{g(C)}(0)$ à l'aide de 5.3.2, il faut vérifier que cette homotopie se fait dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$: cela vient de

$$|H(s,t)| = |f(\gamma(t)) + s(g-f)(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))| - |(g-f)(\gamma(t))| > 0,$$

par l'inégalité $|f-g| < |f|$ le long du cercle C. □

Le corollaire suivant montre que certaines propriétés ouvertes ("ne pas s'annuler") peuvent passer à la limite le long de suites de fonctions holomorphes.

Corollaire 6.4.3 **(Théorème de Hurwitz)**. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

1. *Si les fonctions f_n ne s'annulent pas, alors soit f est identiquement nulle, soit f ne s'annule pas.*
2. *Si les fonctions f_n sont injectives, alors soit f est constante, soit f est injective.*

Exemple 6.4.4. — En prenant $f_n(z) = z/n$, on voit que les cas particuliers peuvent survenir : ici, la limite f est identiquement nulle et les fonctions f_n sont injectives sur $\mathbb{C}$, ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. — Pour prouver 1., on suppose que la limite f n'est pas identiquement nulle, mais s'annule en $z_0 \in \Omega$. Par le principe des zéros isolés, f ne s'annule pas sur $C(z_0,r)$ pour $r>0$ petit. Par compacité du cercle, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $|f| \geq \epsilon$ sur $C(z_0,r)$. Pour n assez grand, on a $|f_n - f| < \epsilon \leq |f|$ sur $C(z_0,r)$, de sorte qu'on peut appliquer le théorème de Rouché : f_n et f ont autant de zéros dans le disque $D(z_0,r)$. Puisque f s'annule en z_0, f_n doit s'annuler quelque part dans le disque, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour 2., on suppose f non constante et $f(z_1) = f(z_2) = w$ avec $z_1 \neq z_2$. Quitte à soustraire w à toutes les fonctions, on peut supposer que w est nul. L'argument ci-dessus, appliqué près de z_1 et de z_2, montre que pour $r>0$ assez petit et n assez grand, f_n doit s'annuler dans $D(z_1,r)$ et dans $D(z_2,r)$. En choisissant r assez petit pour que ces disques soient disjoints, on voit que f_n atteint la valeur 0 en deux points distincts, ce qui contredit son injectivité. □

6.5. Fonctions méromorphes

Définition 6.5.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est une fonction *méromorphe* sur Ω s'il existe un fermé A de Ω, constitué de points isolés, tel que

1. f est holomorphe sur $\Omega\backslash A$;
2. tout point de A est un pôle de f.

On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Remarque 6.5.2. — On demande à A d'être fermé dans Ω et constitué de points isolés. Il est équivalent de demander à A d'être localement fini dans Ω : pour tout compact K de Ω, l'intersection $K \cap A$ est finie. La preuve est un petit exercice de topologie.

Bien sûr, les fonctions holomorphes sur Ω sont méromorphes sur Ω ($A = \emptyset$). Les fractions rationnelles sont les exemples typiques de fonctions méromorphes, sur $\mathbb{C}$; A est alors constitué des racines du dénominateur et il suffit de décomposer en éléments simples pour bien voir apparaître la structure des pôles.

Exemple 6.5.3. — La fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$: l'ensemble des pôles est $\left\{\dfrac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, qui est bien un fermé de $\mathbb{C}^*$ (mais pas de $\mathbb{C}$). Cette fonction n'est pas méromorphe sur $\mathbb{C}$: elle admet une singularité essentielle en 0.

Exemple 6.5.4. — On a vu au chapitre 4 que la fonction $\Gamma : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est holomorphe sur le demi-plan $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) > 0\}$. En fait, on peut l'étendre en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Pour ce faire, observons d'abord qu'une intégration par partie donne rapidement $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$. En itérant, on obtient pour tout entier $n \geq 1$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)},$$

si $\mathrm{Re}(z) > 0$ et si $-z$ est différent de $0, 1, \dots, n-1$. Dans cette équation, le membre de droite est holomorphe sur $\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})/\mathrm{Re}(z) > -n\}$. Donc il définit un prolongement holomorphe de Γ à Ω_n. Par unicité du prolongement analytique, ces extensions sont compatibles entre elles et on obtient un (unique) prolongement holomorphe à la réunion des Ω_n : Γ détermine donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Pour analyser la singularité en $-n$, on utilise la formule ci-dessus au rang $n+1$ pour voir l'équivalent suivant, quand $h \to 0$:

$$\Gamma(-n+h) = \frac{\Gamma(1+h)}{(-n+h)(1-n+h)\dots(n-n+h)} \sim \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{h}.$$

La fonction Γ a donc un pôle simple en $-n$, de résidu $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Remarque 6.5.5. — Une fonction f méromorphe sur Ω n'est pas définie sur Ω, seulement sur sur $\Omega\backslash A$. Néanmoins, si a est un pôle, alors $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers a. Donc f se prolonge naturellement en une fonction de Ω dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en posant $f(a) = \infty$ pour tout pôle a. On voit le point ∞ comme un point à l'infini dans $\mathbb{C}$, comme en géométrie projective. On peut étendre la topologie de $\mathbb{C}$ en une topologie de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en décidant que les voisinages épointés de ∞ sont les complémentaires de compacts dans $\mathbb{C}$. En fait, l'espace ainsi construit est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ (penser que $0 \in \mathbb{C}$ est le pôle nord et ∞ le pôle sud). On parle de *sphère de Riemann*. Le lecteur intéressé est invité à se renseigner sur ce qu'on appelle les *surfaces de Riemann*.

Proposition 6.5.6. — *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps.*

Démonstration. — Il s'agit essentiellement de vérifier que $\mathcal{M}(\Omega)$ est stable par addition, produit et inversion. Soient f et g deux fonctions méromorphes sur Ω, d'ensembles de pôles A_f et A_g. Alors $f+g$ et $f \times g$ sont holomorphes hors de $A_f \cup A_g$. En un point a de $A_f \cup A_g$, on vérifie que $f \times g$ admet toujours un pôle, tandis que $f+g$ admet un pôle ou une singularité apparente (deux pôles avec des coefficients opposés peuvent se compenser). Dans tous les cas, ces fonctions sont holomorphes sur $\Omega\backslash A$ avec des pôles aux points de A, pour une certaine partie A de $A_f \cup A_g$. Un tel A est automatiquement fermé et constitué de points isolés, par exemple par la remarque 6.5.2.

On veut voir aussi que $1/f$ est méromorphe sur Ω. Cette fois, les pôles de f sont des points où $1/f$ tend vers 0, donc se prolonge de façon holomorphe. Mais des singularités apparaissent là où f s'annule. L'ouvert Ω étant connexe, le principe des zéros isolés assure que le fermé A des zéros de f est constitué de points isolés. De plus, au voisinage d'un point a de A, on peut écrire $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et g holomorphe ne s'annulant pas. Autrement dit, $(z-a)^m \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1}{g(z)}$: $1/f$ a un pôle d'ordre m en a. □

En particulier, sur un ouvert connexe Ω, le quotient de deux fonctions holomorphes (avec dénominateur non nul) est une fonction méromorphe. En fait, le théorème de factorisation de Weierstrass dit que toutes les fonctions méromorphes s'écrivent comme un quotient de fonctions holomorphes. $\mathcal{M}(\Omega)$ est en fait le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{O}(\Omega)$.

CHAPITRE 7

LE THÉORÈME DE L'APPLICATION CONFORME

Théorème 7.0.7. — *Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent du vide et de $\mathbb{C}$, est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$.*

Ce théorème, dû à Berhard Riemann (1851, dans sa thèse !), classifie donc les ouverts simplement connexes du plan, à biholomorphisme près : en dehors des cas triviaux $\emptyset$ et $\mathbb{C}$, ils sont tous biholomorphes au disque. Géométriquement, ce résultat relève de la cartographie conforme : il signifie qu'on peut identifier ces ouverts simplement connexes au disque en respectant les angles.

Par exemple, on peut trouver des biholomorphismes entre le disque et l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ ou le demi-plan $\{z/\mathrm{Im} z > 0\}$. Dans ces cas simples, c'est un exercice de trouver explicitement un tel biholomorphisme. Dans le cas général, c'est beaucoup plus difficile et on n'aura pas de formule explicite.

Remarque 7.0.8. — Le plan $\mathbb{C}$ doit bien être mis à part : il n'est pas biholomorphe au disque. Sinon, on aurait un biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ et ce serait en particulier une fonction entière bornée, donc une fonction constante (Liouville), absurde.

En revanche, $\mathbb{C}$ est homéomorphe au disque : par exemple, l'application $z \mapsto \dfrac{2}{\pi} \arctan(|z|) \dfrac{z}{|z|}$ réalise un tel homéomorphisme. Le théorème montre donc que tous les ouverts simplement connexes non vides du plan sont homéomorphes au disque.

Remarque 7.0.9. — Dans le cas des ouverts simplement connexes, demander un homéomorphisme ou un biholomorphisme est presque la même la chose ; le seul cas particulier est $\mathbb{C}$. Pour des ouverts non simplement connexes, c'est bien différent : par exemple, on peut montrer que les anneaux $A(0, 1, r)$ et $A(0, 1, r')$ ne sont biholomorphes que si $r = r'$, alors qu'ils sont toujours homéomorphes.

7.1. Les automorphismes du disque

Au cours de la preuve du théorème de l'application conforme, on aura besoin d'utiliser des *automorphismes* du disque, c'est-à-dire des biholomorphismes du disque sur lui-même. Les premiers exemples sont les rotations autour de 0, i.e. $z \mapsto e^{i\theta} z$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. D'autres automorphismes sont donnés par des homographies.

Lemme 7.1.1. — *Pour tout nombre complexe a tel que $|a| < 1$, l'application $\varphi_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, d'inverse φ_{-a}.*

On peut remarquer que le paramètre a est l'(unique) antécédent de 0 par φ_a, i.e. $\varphi_{-a}(0) = a$.

Démonstration. — Ces applications sont bien holomorphes sur le disque $\mathbb{D}$. De plus, si $|z| = 1$, on a $1 = z\overline{z}$, donc $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} = \dfrac{1}{z}\dfrac{z-a}{\overline{z-a}}$, de sorte que $|\varphi_a(z)| = 1$. Par le principe du maximum, on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (4.5.5 donne $\leq$ et, puisque φ_a n'est pas constante, 4.5.3 empêche l'égalité). Ainsi, φ_a est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ pour tout $|a| < 1$. Un calcul rapide assure que φ_{-a} est un inverse de φ_a. D'où le résultat. □

Le lemme suivant va nous permettre de décrire tous les automorphismes du disque.

***Lemme 7.1.2* (Lemme de Schwarz).** — *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors :*

1. *pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$;*
2. $|f'(0)| \leq 1$ *;*
3. *si $|f'(0)| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Démonstration. — On peut écrire f comme une série entière convergeant sur $\mathbb{D}$ tout entier : avec $f(0) = 0$, on obtient l'écriture $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Donc $g : z \mapsto f(z)/z$ s'écrit comme une série entière convergeant sur $\mathbb{D}$: g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, avec $g(0) = a_1 = f'(0)$. Le principe du maximum (II), appliqué à g sur un disque $D(0, r)$ avec $r < 1$, donne

$$\forall z \in D(0,r), \qquad |g(z)| \leq \max_{C(0,r)} |g| = \max_{w \in C(0,r)} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r}.$$

En faisant tendre r vers 1, on voit que g est bornée par 1 sur $\mathbb{D}$ et cela donne les deux premiers points. Le principe du maximum (I) donne ensuite le troisième point (on est dans la situation $|g|$ atteint un maximum en 0, donc est constant sur le disque). □

Corollaire 7.1.3. — *Les automorphismes du $\mathbb{D}$ sont tous de la forme $e^{i\theta}\varphi_a$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$.*

Démonstration. — Soit f un automorphisme du disque. Soit $a = f^{-1}(0)$. Alors $g = f \circ \varphi_{-a}$ est un automorphisme du disque tel que $g(0) = 0$, et son inverse g^{-1} aussi. En appliquant le lemme de Schwarz à g et g^{-1}, on trouve $|g'(0)| \leq 1$ et $\left|(g^{-1})'(0)\right| = \dfrac{1}{|g'(0)|} \leq 1$, donc $|g'(0)| = 1$; la fin du lemme de Schwarz dit alors que g est une rotation autour de 0. Donc f est de la forme annoncée. □

7.2. La preuve

Ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème de l'application conforme. Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, non vide, différent de $\mathbb{C}$. Quitte à translater, on peut supposer que 0 est dans Ω. On introduit l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{f : \Omega \to \mathbb{D} \text{ holomorphe, injective telle que } f(0) = 0\}.$$

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont des biholomorphismes sur leur image (cf. 4.6.4), qui est un ouvert contenu dans $\mathbb{D}$. On va montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas vide, puis, par un procédé de maximisation, on va construire un élément f de $\mathcal{B}$ dont l'image est la plus grande possible, i.e. $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Cette fonction f sera donc un biholomorphisme entre Ω et $\mathbb{D}$.

La preuve va se faire en trois étapes.

Etape 1 : on montre que $\mathcal{B}$ n'est pas vide. — Comme Ω n'est pas le plan tout entier, on peut trouver un point w dans $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Considérons l'application $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ définie par $h(z) = z-w$. Par choix de w, cette fonction h ne s'annule pas. L'ouvert Ω étant simplement connexe, on peut utiliser 5.3.5 pour bâtir une racine carrée de h : ainsi, il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annulant pas et telle que $g(z)^2 = z - w$ pour tout $z \in \Omega$. Une telle application g est injective, puisque son carré l'est. Par ailleurs, le théorème de l'application ouverte 4.6.1 assure que $g(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc contient un disque $D(a, r)$, avec $r > 0$.

On peut vérifier qu'alors $g(\Omega)$ est disjoint de $D(-a, r)$: supposons qu'il existe $z_1 \in \Omega$ tel que $g(z_1) \in D(-a, r)$; alors $-g(z_1)$ est dans $D(a, r)$, donc dans $g(\Omega)$ et il existe $z_2 \in \Omega$ tel que $g(z_2) = -g(z_1)$; en élevant au carré, on trouve $z_2 - w = z_1 - w$, donc $z_1 = z_2$ et $g(z_1) = g(z_2) = -g(z_1)$, soit $g(z_1) = 0$, ce qui n'est pas possible, puisque g ne s'annule pas.

Ceci prouve que, pour tout $z \in \Omega$, $|g(z) - (-a)| = |g(z) + a|$ est supérieur ou égal à r. Donc on peut définir $f : \Omega \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{r}{g(z) + a}$. C'est une application holomorphe et injective, puisque g l'est. Par construction, on a aussi $|f(z)| \leq 1/2$ pour tout $z \in \Omega$. Donc $f(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{D}$.

Afin d'assurer que 0 est fixé, on compose par un automorphisme du disque bien choisi. On observe que $\varphi_{f(0)} \circ f(0) = 0$. Et, comme $\varphi_{f(0)}$ est holomorphe, injective et préserve le disque, on en conclut que $\varphi_{f(0)} \circ f$ est un élément de $\mathcal{B}$.

Etape 2 : si $f \in \mathcal{B}$ et $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$, alors il existe $f_1 \in \mathcal{B}$ tel que $|f_1'(0)| > |f'(0)|$. — L'idée grossière consiste à prendre une racine carrée.

Soit $\alpha \in \mathbb{D}\backslash f(\Omega)$. Alors $\varphi_\alpha \circ f$ ne s'annule pas. Par simple connexité de Ω, on en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annulant pas et telle que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z)^2 = \varphi_\alpha \circ f(z)$. Notons qu'alors g est injective (son carré l'est) et $|g|^2 \leq |\varphi_\alpha| < 1$ de sorte que $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Afin de fixer 0, de nouveau, on considère plutôt $f_1 = \varphi_\beta \circ g$, avec $\beta = g(0)$. Alors f_1 est un élément de $\mathcal{B}$.

Pour estimer $|f_1'(0)|$, on introduit $c : z \mapsto z^2$ pour écrire $f = \varphi_{-\alpha} \circ c \circ g$, puis $f = F \circ f_1$, avec $F = \varphi_{-\alpha} \circ c \circ \varphi_{-\beta}$. Comme $f(0) = f_1(0) = 0$, on trouve $|f'(0)| = |F'(0)||f_1'(0)|$. Il suffit donc de prouver que $|F'(0)| < 1$. Comme F est une fonction holomorphe envoyant $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, avec $F(0) = 0$, le lemme de Schwarz donne $|F'(0)| \leq 1$, avec $|F'(0)| = 1$ seulement si F est une rotation ; or F n'est pas injective (c ne l'est pas et les φ_a sont des bijections), donc ce n'est pas une rotation : $|F'(0)| < 1$.

Etape 3 : maximisation. — Au vu de l'étape 2, il est naturel de chercher à maximiser $|f'(0)|$ parmi les éléments f de $\mathcal{B}$.

Notons $M = \sup_{f \in \mathcal{B}} |f'(0)|$. On va montrer que M est atteint dans $\mathcal{B}$ et cela nous permettra de conclure rapidement. D'abord, le lemme de Schwarz montre que M est majoré par 1, donc fini. De plus, M est strictement positif : $\mathcal{B}$ n'est pas vide et, si f est un élément de $\mathcal{B}$, alors f est injective, donc $f'(0) \neq 0$ (cf. 4.6.4).

Par définition du sup, il existe une suite d'éléments f_n de $\mathcal{B}$ tels que $|f_n'(0)|$ tend vers M, quand n tend vers l'infini. Comme les fonctions f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{D}$, on a $|f_n| \leq 1$ pour tout n. Le théorème de Montel permet donc de supposer (quitte à extraire) que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. En particulier, par passage à la limite, $f(0) = 0$. Comme les dérivées convergent aussi (4.4.1), un passage à la limite donne aussi $|f'(0)| = M$. En particulier, $f'(0)$ n'est pas nul, donc f n'est pas constante. Comme les fonctions f_n sont injectives, f l'est aussi (cf. 6.4.3). Enfin, un passage à la limite donne $|f| \leq 1$ et le principe du maximum (I) empêche l'égalité (f n'est pas constante), donc f est à valeurs dans $\mathbb{D}$. Ceci prouve que f est un élément de $\mathcal{B}$.

Pour conclure, il suffit de voir que $f(\Omega) = \mathbb{D}$: si ce n'est pas le cas, l'étape 2 permet de trouver $f_1 \in \mathcal{B}$ tel que $|f_1'(0)| > |f'(0)| = M$ et cela contredit la définition de M. Donc l'image de f est $\mathbb{D}$ et f est un biholomorphisme entre Ω et $\mathbb{D}$.