THÉORIE DES JEUX : LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

FRANÇOISE FORGES, JÉRÔME RENAULT, SYLVAIN SORIN, AND NICOLAS VIEILLE

1. Introduction

Robert Aumann a apporté une contribution fondamentale à la théorie des jeux - *a method used to analyze strategic interaction among different agents* - dans de nombreux domaines. Le comité Nobel dans ses attendus - *Contributions to Game Theory : Analyses of Conflict and Cooperation* - en souligne plusieurs, - *Robert Aumann's primary contribution consists of using the tools of mathematical anlysis to develop concepts and hypotheses, provide them with concise formulations and draw precise conclusions* - qui sont présentés ici : jeux répétés à information complète (J. Renault), jeux répétés à information incomplète (S. Sorin), équilibres corrélés (F. Forges), connaisance commune (N. Vieille).

Ces textes sont la version écrite d'exposés prononcés lors de la session spéciale en l'honneur d' Aumann du *Séminaire Parisien de Théorie des Jeux*, organisée par F. Koessler, R. Laraki, D. Rosenberg et T. Tomala, le 12 Décembre 2005 à l'Institut Henri Poincaré.

2. Les Folk théorèmes

Les Folk théorèmes s'intéressent à la répétition, par des joueurs patients, d'un jeu de base donné. Dans le modèle simple présenté ici (dit d'observation standard), ils disent essentiellement ceci : *l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu répété est l'ensemble des paiements réalisables (i.e. que l'on peut obtenir en jouant) et individuellement rationnels (i.e. tels que chaque joueur a au moins son paiement de punition).*

2.1. **Le modèle.**

On considère un jeu de base fixé $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$. N est l'ensemble des joueurs. Pour chaque joueur i de N, A^i est l'ensemble d'actions du joueur i et g^i est une application du produit cartésien $A = \prod_{j\in N} A^j$ dans $I\!R$, donnant le paiement du joueur i. On suppose G fini : les ensembles N et A^i sont alors finis (et non vides). On s'intéresse à la répétition en temps discret, un grand nombre ou une infinité de fois, du jeu de base. Ce dernier est connu des joueurs. A chaque étape les joueurs choisissent (éventuellement de manière aléatoire) simultanément chacun une action dans leur ensemble d'actions, puis ces actions sont observées publiquement avant de passer à l'étape suivante.

Date: Décembre 2005.

Donnons quelques notations. A est l'ensemble des profils d'actions, $g = (g^i)_{i\in N}$ est la fonction de paiement vectoriel et $\Delta(A)$, resp. $\Delta(A^i)$, est l'ensemble des probabilités sur A, resp. sur A^i. On notera aussi g, resp. g^i, l'extension mixte (c'est-à-dire multilinéaire, ou en espérance) de g, resp. g^i. Rappelons qu'un équilibre de Nash en stratégies mixtes de G est un profil $x = (x^i)_{i\in N}$ dans $\prod_{i\in N} \Delta(A^i)$ tel qu'aucun joueur n'a de déviation strictement profitable, i.e. $\forall i \in N, \forall y^i \in \Delta(A^i), \quad g^i(y^i, x^{-i}) \leq g^i(x)$ (l'indice $-i$ désignant l'ensemble des joueurs autres que i). Dans le jeu répété, l'ensemble des histoires de longueur t est l'ensemble H_t des t-uplets $(a_1, ..., a_t)$ d'éléments de A, H_0 étant le singleton $\{\emptyset\}$. L'ensemble de toutes les histoires est $H = \cup_{t\geq 0} H_t$, et H_∞ désigne l'ensemble des parties du jeu répété, i.e. des suites $(a_1, ..., a_t, ...)$ d'éléments de A.

Une stratégie (dite de comportement) du joueur i dans le jeu répété est une application σ^i de H dans $\Delta(A^i)$. Pour h dans H_t, $\sigma^i(h)$ désigne la probabilité sur A^i jouée par le joueur i en date $t+1$ si h a été jouée aux dates 1,...,t. On note Σ^i l'ensemble des stratégies du joueur i et $\Sigma = \prod_{i\in N} \Sigma^i$ l'ensemble des profils de stratégies. Un profil de stratégies σ induit alors naturellement une probabilité sur l'ensemble des parties H_∞ (muni de la tribu produit), les tirages aléatoires effectués par les joueurs à chaque étape après une histoire donnée étant indépendants. Passons maintenant à l'évaluation des paiements dans le jeu répété.

Le paiement moyen espéré d'un joueur i jusqu'à une étape $T \geq 1$ est (a_t désignant la variable aléatoire du profil d'actions joué en date t) :

$$\gamma^i_T(\sigma) = I\!\!E_\sigma \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g^i(a_t) \right).$$

Le jeu (finiment) répété T fois est par définition le jeu $G_T = (N, (\Sigma^i)_{i\in N}, (\gamma^i_T)_{i\in N})$. On peut aussi considérer des paiements escomptés. Pour λ dans $(0,1]$, le jeu escompté au taux λ est $G_\lambda = (N, (\Sigma^i)_{i\in N}, (\gamma^i_\lambda)_{i\in N})$, où pour tout profil de stratégies σ :

$$\gamma^i_\lambda(\sigma) = I\!\!E_\sigma \left(\lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1-\lambda)^{t-1} g^i(a_t) \right).$$

Considérer $T = 1$ ou $\lambda = 1$ revient à considérer le jeu "en un coup" G. On s'intéresse ici aux aspects stratégiques de long terme, donc on considérera T grand ou λ proche de zéro. On peut aussi s'affranchir de tout paramètre exogène T ou λ (que les joueurs eux mêmes ne connaissent pas forcément), en définissant directement une notion d'équilibre de long terme dans le jeu infiniment répété G_∞. On contourne le fait que $\lim_T \gamma^i_T(\sigma)$ peut ne pas exister pour certaines stratégies, en disant qu'*un profil de stratégies σ est un équilibre (dit uniforme) de G_∞ si :*

1) $\forall \varepsilon > 0$, σ est un ε-équilibre de Nash de tout jeu finiment répété assez long, i.e. $\exists T_0$, $\forall T \geq T_0$, $\forall i \in N$, $\forall \tau^i \in \Sigma^i$, $\quad \gamma^i_T(\tau^i, \sigma^{-i}) \leq \gamma^i_T(\sigma) + \varepsilon$, et

2) $\left((\gamma^i_T(\sigma))_{i\in N}\right)_T$ converge vers un vecteur de $I\!\!R^N$, qui s'appelle alors un paiement d'équilibre (uniforme) de G_∞.

D'autres définitions d'équilibres sont possibles dans G_∞ (voir Aumann (1959), Sorin (1986), Sorin (1992), pour une présentation des jeux répétés à information complète).

Notons E_∞ l'ensemble des paiements d'équilibres de G_∞, et E_T (resp.E_λ) l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G_T (resp. G_λ). On peut appliquer le théorème de Nash/Glicksberg (ensembles de stratégies compacts et convexes, paiements multilinéaires et continus) à G_T et G_λ et en déduire que E_T et E_λ sont compacts non vides. On montre facilement que E_∞ est également compact, et on a pour k dans $\mathbb{N}^*$: $E_1 \subset E_T \subset E_{kT} \subset E_\infty$, et $E_1 \subset E_\lambda \subset E_{1-(1-\lambda)^{1/k}} \subset E_\infty$.

Les paiements réalisables et individuellement rationnels

On définit l'ensemble des paiements réalisables du jeu comme l'enveloppe convexe de $g(A)$. $\text{conv}g(A) = g(\Delta(A))$ est un polytope qui représente l'ensemble des paiements que l'on peut obtenir dans le jeu répété. Par convexité et compacité, il contient E_∞ (et donc E_T et E_λ).

Pour chaque joueur i de N, on définit le *niveau de punition du joueur i* comme le paiement maximum que peut obtenir ce joueur lorsque les autres joueurs ont décidé publiquement de le punir :

$$v^i = \min_{x^{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A^j)} \ \max_{x^i \in \Delta(A^i)} g^i(x^i, x^{-i}).$$

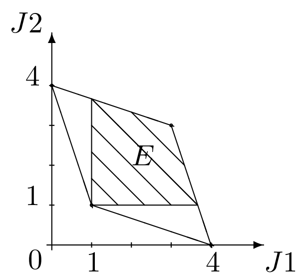
Remarquons que l'ensemble $\prod_{j \neq i} \Delta(A^j)$ correspond à l'ensemble des probabilités indépendantes jouées par les joueurs autres que i, et que s'il y a au moins 3 joueurs on peut avoir $\min\max \neq \max\min$. v^i s'appelle aussi le *min-max indépendant* du joueur i, et l'ensemble des paiements individuellement rationnels est par définition l'ensemble des paiements tels que chaque joueur a au moins son niveau de punition : $IR = \{u = (u^i)_{i \in N}, u^i \geq v^i \ \forall i \in N\}$.

Enfin, on note $E = (\text{conv}g(A)) \cap IR$ *l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels*. Etant donné un profil de stratégies σ^{-i} des joueurs autres que i, il est facile de construire, en utilisant le fait que les actions sont observées après chaque étape, une stratégie du joueur i telle que : $\forall T$, $\gamma_T^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) \geq v^i$. On en déduit que E_∞, E_T et E_λ sont des sous-ensembles de E.

L'exemple du "dilemme du prisonnier" :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C^2 & D^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C^1 \\ D^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a deux joueurs, le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne, $A^i = \{C^i, D^i\}$ pour tout i, et l'application g est représentée par les couples de la matrice, la première composante (resp. seconde) donnant le paiement du $J1$ (resp. $J2$). On a ici $v^1 = v^2 = 1$, et le seul paiement d'équilibre de Nash de G est (1,1). L'ensemble E est hachuré dans la figure ci-dessous :



2.2. **Les Folk théorèmes pour G_∞.**
Voici une version "du" Folk théorème, ou théorème de la communauté.

Folk théorème
L'ensemble des paiements d'équilibres de G_∞ est l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels : $E_\infty = E$.

A propos de la paternité de ce résultat, citons Aumann (1981) : The Folk theorem *"has been generally known in the profession for at least 15 or 20 years, but has not been published; its authorship is obscure."* On l'appelle encore le théorème du "tout est possible", car il montre qu'à peu près n'importe quel paiement raisonnable peut s'obtenir à l'équilibre.

La preuve est simple. Considérons un paiement u dans E. Comme u est réalisable, il existe une partie $h = (a_1, ..., a_t, ...)$ telle que pour tout joueur i, $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g^i(a_t) \xrightarrow[T\to\infty]{} u^i$. Nous appellerons h le plan principal de la stratégie, et jouer selon h pour un joueur i en date t signifie jouer la i-ème composante de a_t. Pour chaque couple de joueurs distincts (i, j), fixons $x^{i,j}$ dans $\Delta(A^j)$ de façon à ce que $(x^{i,j})_{j\neq i}$ réalise le min dans l'expression de v^i. Fixons maintenant un joueur i dans N, et définissons une stratégie σ^i. σ^i commence en date 1 par jouer selon le plan principal, et continue de jouer selon h tant que tous les autres joueurs le font. Si à une certaine date $t \geq 1$, pour la première fois un joueur j ne joue pas selon le plan principal, alors σ^i joue à toutes les dates ultérieures la probabilité $x^{j,i}$ (si pour la première fois à la même date plusieurs joueurs sortent du plan principal, on punit celui de ces joueurs qui est le plus petit, selon un ordre total sur N préalablement fixé). Il est facile de voir que $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N}$ est un équilibre de G_∞ de paiement u. ∎

Dans le dilemme du prisonnier, on a par exemple (3,3) dans E_∞, et l'équilibre ainsi construit est particulièrement simple : commencer et continuer de jouer C^i tant que l'autre joueur j joue C^j ; jouer D^i si l'autre joueur a déjà joué au moins une fois D^j. Dévier à une certaine date rapportera à cette étape 4 au lieu de 3 au joueur i, mais pour ensuite avoir un paiement inférieur à 1 à chaque étape ultérieure.
Certains des équilibres construits via le Folk théorème sont critiqués car rien n'assure qu'un joueur i aura intérêt, le cas échéant, à punir un joueur j qui vient de quitter le plan principal pour la première fois. On peut alors s'intéresser à la notion suivante d'équilibre sous-jeux parfait (ESJP pour aller vite). Etant donnés une histoire h de H et un profil de stratégies σ, on définit la stratégie de continuation $\sigma[h]$ comme le profil de stratégies $\tau = (\tau^i)_{i\in N}$, où : $\forall i \in N, \forall h' \in H$, $\tau^i(h') = \sigma^i(hh')$, où hh' est l'histoire h suivie de h'. Un ESJP de G_∞ est alors défini comme un profil de stratégies σ dans Σ tel que pour toute histoire h dans H, $\sigma[h]$ est un équilibre de G_∞ ; et on note E'_∞ l'ensemble des paiements de ces équilibres. Un équilibre sous-jeux parfait étant un équilibre de G_∞ (prendre $h = \emptyset$), on a : $E'_\infty \subset E_\infty = E$. En 1976, Aumann et Shapley, ainsi que Rubinstein, ont démontré indépendamment, avec de légères différences de formulation (voir les éditions de 1994), que ce raffinement d'équilibre ne changeait en fait absolument rien ici.

Folk théorème parfait
$E'_\infty = E_\infty = E$.

La preuve se résume là aussi à construire un ESJP à partir d'un paiement réalisable et individuellement rationnel. Par rapport à la preuve du Folk théorème, il faut modifier la phase de punition. L'idée est que si à une certaine date t, les joueurs jouaient selon le plan principal et le joueur j en sort, les joueurs $-j$ se mettent à punir le joueur j jusqu'à une certaine date $\bar{t}$, puis quoiqu'il arrive tout le monde oublie tout et revient, comme à l'étape 1, au début du chemin principal. Une possibilité est de calculer, à la fin de l'étape t, le nombre $\bar{t}$ de manière à ce que le paiement moyen espéré du joueur j jusqu'à la date $\bar{t}$, soit inférieur à $v^j + 1/t$. Une autre possibilité est de prendre simplement $\bar{t} = 2t$. ∎

2.3. **Les Folk théorèmes escomptés.**
Passons maintenant aux paiements d'équilibres escomptés. Dans le dilemme du prisonnier avec un taux d'escompte $\lambda \in (0, 1]$, réexaminons l'équilibre précédent de G_∞ de paiement $(3, 3)$. Se mettre à jouer D^i pour la première fois peut augmenter à une étape le paiement du joueur i de 1, pour perdre ensuite à chaque étape au moins 2. On aura donc un équilibre de paiement $(3, 3)$ dans G_λ si : $1 \leq 2\sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^t = 2(1-\lambda)/\lambda$, soit si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 2/3$. En général, on a toujours $E_\lambda \subset E_\infty = E$, et la question se pose de la convergence (au sens de la distance de Hausdorff) de E_λ vers E.

Le contre-exemple suivant à trois joueurs est dû à Forges, Mertens et Neyman (1986) : $\begin{pmatrix} (1,0,0) & (0,1,0) \\ (0,1,0) & (1,0,1) \end{pmatrix}$. Le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne et le joueur 3 n'a qu'une stratégie et donc ne choisit rien ici ! Ce jeu est essentiellement un jeu "à somme nulle" entre les joueurs 1 et 2, et dans tout équilibre de G_λ chacun de ces joueurs choisit, indépendamment à chaque étape, ses deux actions avec probabilité 1/2. Donc $E_\lambda = \{(1/2, 1/2, 1/4)\}$, alors que $(1/2, 1/2, 1/2) \in E$, on n'a pas en général la convergence de E_λ vers E. On a toutefois le résultat suivant, Sorin (1986).

Folk théorème escompté
Supposons qu'il y ait 2 joueurs, ou qu'il existe $u = (u^i)_{i \in N}$ dans E tel que pour tout i, $u^i > v^i$. Alors $E_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} E$.

On peut aussi définir les équilibres sous-jeux parfaits de G_λ comme des stratégies en équilibre de Nash dans tout sous-jeu de G_λ. Notons E'_λ l'ensemble (compact) des paiements de tels équilibres. On a $E_1 \subset E'_\lambda \subset E_\lambda \subset E$, et pour avoir la convergence, on ajoute une condition de dimension sur le polytope E, Fudenberg Maskin, (1986) et (1991) :

Folk théorème parfait escompté
Si E a un intérieur non vide, alors $E'_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} E$.

Les preuves des deux derniers théorèmes utilisent des punitions "strictes", et dans le cas sous-jeux parfait on utilise aussi des phases de récompense pour, le cas échéant, inciter les joueurs à punir. Un exemple où on n'a pas la convergence de E'_λ vers E est le jeu à deux joueurs : $\begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}$. Dans tout équilibre sous-jeux parfait escompté, le joueur 1 doit choisir la ligne du haut à chaque étape quoiqu'il se soit passé avant, et donc $E'_\lambda = \{(1, 1)\}$ pour tout λ.

Donnons maintenant un exemple économique d'équilibre sous-jeux parfait escompté (voir la première référence). Considérons un oligopole composé de n firmes identiques, produisant un seul bien avec un coût de production marginal constant $c > 0$. Chacune des entreprises doit choisir son prix de vente, et les consommateurs achètent uniquement à l'entreprise meilleur marché (ou en cas d'égalité, à parts égales aux entreprises les moins chères). On note $D(p)$ le nombre de consommateurs prêts à acheter une unité du bien au prix p, et on suppose la demande toujours satisfaite. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit, qui vaut $\pi(p) = D(p)(p - c)$ si l'entreprise propose seule le plus bas prix p, et qui vaut zéro si l'entreprise ne vend rien. Supposons que π admette un maximum en un prix $\hat{p} > c$.

Si on joue le jeu une fois, le seul prix d' équilibre sera égal au coût marginal c, les profits étant nuls. Afin de tenir compte des possibilités dynamiques d'ajustement des prix, considérons le jeu répété avec un taux d'escompte λ. Examinons le profil de stratégies où tout le monde joue $\hat{p}$ jusqu'au cas éventuel où quelqu'un dévie, et alors à partir de ce moment chacun joue le prix c. Le paiement d'une entreprise si tout le monde joue selon ce profil est $\pi(\hat{p})/n$, et une entreprise qui dévie de cette stratégie en jouant p à une certaine date, aura au plus à partir de là : $\lambda\pi(p) + (1 - \lambda)0 = \lambda\pi(p)$. Donc si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 1/n$, on aura un ESJP où le prix observé est le prix de collusion (ou de monopole) $\hat{p}$.

2.4. **Les Folk théorèmes finiment répétés.**

Concluons cette partie avec les équilibres des jeux finiment répétés. Dans le dilemme du prisonnier, on montre par récurrence que pour tout T, E_T se réduit à $\{(1,1)\}$, (Sorin, (1986)). Donc le "bon" paiement $(3,3)$ ne peut être approché par des équilibres du jeu finiment répété, et on n'a pas la convergence de E_T vers E.

Là encore, on définit les ESJP de G_T comme des profils de stratégies σ en équilibre de Nash dans tout sous-jeu : $\forall t \in \{0, ..., T-1\}, \forall h \in H_t$, $\sigma[h]$ est un équilibre de Nash du jeu restant, i.e. de G_{T-t}. On note E'_T l'ensemble (compact) des paiements d'ESJP de G_T, et on a : $E_1 \subset E'_T \subset E_T \subset E$. Citons deux derniers Folk théorèmes, dont les preuves utilisent là encore judicieusement plan principal, phases de punitions et phases de récompense. Les convergences sont au sens de Hausdorff.

Folk théorème finiment répété (Benoît et Krishna, 1987)
Supposons que pour chaque joueur i il existe x dans E_1 tel que $x^i > v^i$. Alors $E_T \xrightarrow[T\to\infty]{} E$.

Folk théorème parfait finiment répété (Benoît et Krishna (1985), Gossner (1995))
Supposons que pour chaque joueur i, il existe x et y dans E_1 tel que $x^i > y^i$ et que E est d'intérieur non vide. Alors $E'_T \xrightarrow[T\to\infty]{} E$.

Notons enfin qu'un modèle de jeu répété avec perturbation et rationalité limitée permet de *réduire* l'ensemble des paiements d'équilibre (Aumann et Sorin (1989)).

3. Jeux répétés à information incomplète

L'essentiel des travaux d'Aumann concernant la théorie des jeux à information incomplète a été écrit avec M. Maschler et est reproduit dans Aumann and Maschler (1995). Il s'agit initialement d'une série de rapports de Mathematica (entreprise de consulting fondée par O. Morgenstern) pour United States Arms Control and Disarmament Agency entre 1966 et 1968.

Aumann apporte là au niveau du modèle, des concepts et des résultats, toutes les fondations de la théorie des jeux répétés à information incomplète, qui va connaître un développement considérable aussi bien au niveau théorique qu'à celui des applications.

3.1. **Le modèle.**

En suivant le modèle d' Harsanyi (1967-68), un jeu à information incomplète est représenté par une famille finie $G^\ell, \ell \in K$, de jeux stratégiques, où les joueurs et les ensembles de stratégies sont les mêmes, et par une probabilité p sur K. L'état de la nature, k, est une variable aléatoire sur K de loi p qui détermine le jeu joué G^k. Il reste à spécifier l'information initiale des joueurs.

Le cadre le plus simple est celui de 2 joueurs à *manque d'information d'un côté* : le joueur 1 connait k, le joueur 2 n'a aucune information. On considère de plus ici le cas de jeu à somme nulle (jusqu'en 3.8) : chaque G^ℓ est déterminé par une matrice réelle $I \times J$, notée A^ℓ.

La partie se déroule par étapes : à l'étape n le joueur 1 choisit l'action $i_n \in I$, le joueur 2 choisit $j_n \in J$, le résultat est $g_n = A^k_{i_n j_n}$ mais seul le couple (i_n, j_n) est annoncé. L'histoire après le coup n - ou avant le coup $n+1$ - est $h_n = (i_1, j_1, ..., i_n, j_n)$. Le paiement moyen correspondant est la moyenne de Césaro $\bar{g}_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^n g_m$.

La description de ce jeu $\Gamma(p)$ est connue des 2 joueurs.

On s'intéresse au jeu répéte un grand nombre de fois : le coeur du problème est la transmission d'information sur k, par le joueur informé, via ses actions, au joueur non informé.

3.2. **Utilisation de l' information : Lemme d'éclatement et opérateur de concavification.**

Un premier résultat fondamental (et de portée beaucoup plus générale) est qu'il est nécessaire d'étudier simultanément tous les jeux $\Gamma(p), p \in P$ où $P = \Delta(K)$ désigne l'ensemble des probabilités sur l'ensemble K. Il est basé sur le lemme suivant :

Lemme 1

Soit $\{p_r, r \in R\}$ une famille de points de P, dont l'enveloppe convexe contient p. Alors il existe une probabilité de transition θ de K vers R qui représente l'éclatement de p sur $\{p_r, r \in R\}$.

Explicitement, si on a la décomposition barycentrique :

$$p = \sum\nolimits_r \lambda_r p_r, \quad \sum\nolimits_r \lambda_r = 1, \quad \lambda_r \geq 0,$$

θ est donné par :

$$\theta(r|k) = \lambda_r \frac{p^k_r}{p^k}$$

et l'on a $Prob(r) = \lambda_r$ et $Prob(k|r) = p_r^k$. ∎

Soit `Cav` l'opérateur de concavification sur P : étant donné f de P dans $I\!R$, `Cav` f est la plus petite fonction, concave et plus grande que f, sur P.

On déduit aisément du lemme précédent le résultat suivant qui exprime l'utilisation stratégique de l'information. (Ici $\Gamma(p)$ correspond à un jeu long et différentes versions des paiements sont possibles (cf. 2.1)).

Corollaire 2

Si, pour tout p dans P, le joueur 1 peut obtenir $f(p)$ dans $\Gamma(p)$, il peut également obtenir `Cav` *$f(p)$.*

En effet si, à ε près, `Cav` $f(p)$ s'écrit $\sum_r \lambda_r f(p_r)$ avec $p = \sum_r \lambda_r p_r$, $\sum_r \lambda_r = 1, \lambda_r \geq 0$, le joueur 1 utilise, si son information est k, la loterie $\theta(.|k)$ et joue avec probabilité $\theta(r|k)$ la stratégie α_r qui garantit $f(p_r)$ dans $\Gamma(p_r)$. ∎

Introduisons alors le jeu "non révélateur" $D(p)$ où le joueur informé ignore son information et joue chaque jour dans $X = \Delta(I)$ (plutôt que dans X^K, en utilisant sa connaissance de k). Sa valeur est $u(p)$ avec

$$u(p) = \mathtt{val} \sum_{\ell} p^{\ell} A^{\ell}.$$

(où `val` est l'opérateur $\max\min = \min\max$). On obtient donc :

Théorème 3

Le joueur 1 peut obtenir `Cav` *$u(p)$ dans $\Gamma(p)$.*

3.3. **Martingale des probabilités a posteriori.**

On fait ici une analyse duale de la précédente en calculant la quantité d'information transmise par le joueur 1. Soit p la probabilité initiale et $x_\ell \in \Delta(I), \ell \in K$, une stratégie du joueur 1 dans le jeu en une étape. Il joue donc l'action $i \in I$ avec la probabilité x_k^i. La probabilité a posteriori sur K, si i est joué, est $p(i)$ avec

$$p(i)^{\ell} = \frac{p^{\ell} x_{\ell}^{i}}{\sum_m p^m x_m^i}.$$

La propriété fondamentale est le lien entre la distance d aux stratégies non révélatrices et la variation d'information.

Lemme 4

$$d[(x,p), X] \leq E(||p - p(i)||_1).$$

En effet avec $\bar{x} = \sum_k p^k x_k \in X$ on obtient

$$\sum_k p^k || \, x_k - \bar{x}||_1 = \sum_i \bar{x}^i ||p - p(i)||_1.$$

∎

3.4. **Lim v_n.**

Dans le jeu $\Gamma_n(p)$ répété n fois le théorème du minmax s'applique : ce jeu a une valeur $v_n(p)$ et on peut supposer la stratégie σ du joueur 1 connue du joueur 2 ($\max\min$). Celui-ci est donc en mesure de calculer à chaque étape $n+1$ l'élément $\sigma(h_n) \in X^K$ utilisé par 1 puis, après l'action i_{n+1}, la variation de p_n à p_{n+1} de la probabilité conditionnelle sur K. p_n joue le rôle d'une variable d'état du processus et la suite $\{p_n\}$ est une martingale. Si à chaque étape n le joueur non informé joue optimal dans le jeu non révélateur $D(p_n)$ son gain est $u(p_n)$, modulo le fait que le joueur 1 ne joue pas non révélateur.

Le paiement étant Lipschitz (de constante L) cet écart est donc contrôlé par le Lemme 4. Cela permet d'obtenir une majoration du paiement dans le jeu en n étapes :

Théorème 5
La valeur v_n de $\Gamma_n(p)$ satisfait :

$$v_n(p) \leq \texttt{Cav}\ \ u(p) + O(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Introduisons E_n, l'opérateur d'espérance conditionnelle après l'histoire h_n. Alors

$$E_n(g_n) \leq u(p_n) + L\ E_n(||p_{n+1} - p_n||)$$

d'après l'étude précédente. En faisant la moyenne, en prenant l'espérance et en utilisant l'inégalité de Jensen on obtient l'inégalité cherchée car $\{p_n\}$ étant une martingale bornée, sa variation totale en norme L^1 est $O(\sqrt{n})$. ■
On obtient finalement le résultat suivant :

Théorème 6

$$Lim\ v_n = \texttt{Cav}\ \ u.$$

3.5. **Valeur asymptotique et valeur uniforme.**
L'étude développée plus haut utilise le théorème du minmax : on considère un jeu de durée fixée n, on calcule sa valeur v_n puis on étudie sa limite. On parle alors de valeur asymptotique et d'autres critères peuvent être utilisés (par exemple paiement escompté) conduisant au même résultat.

Une approche alternative repose sur les propriétés des stratégies définies indépendamment de la longueur du jeu (voir la section 2.1). On dira que le jeu $\Gamma_\infty(p)$ possède une valeur $v_\infty(p)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une stratégie σ du joueur 1 et un nombre d'étapes N tels que pour tout $n \geq N$ et toute stratégie τ du joueur 2 on ait

$$E_{p,\sigma,\tau}(\bar{g}_n) \geq v_\infty(p) - \varepsilon$$

(on dit que le joueur 1 se garantit v_∞) et la propriété duale pour le joueur 2. On définit de manière analogue les notions de minmax et maxmin pour Γ_∞.

La preuve du théorème 3 montre que le joueur informé peut se garantir $\texttt{Cav}\ \ u$. On remarque qu'une stratégie du joueur 2 construite par concaténation de stratégies optimales dans des jeux Γ_n de durées croissantes permet également, via le théorème 5 de garantir $\texttt{Cav}\ \ u$ d'où le résultat :

Théorème 7
$\Gamma_\infty(p)$ possède une valeur et

$$v_\infty(p) = \texttt{Cav}\ \ u(p).$$

3.6. **Le jeu à paiement vectoriels.**
La preuve proposée ci-dessus ne construit pas explicitement de stratégie optimale du joueur non informé. Une utilisation du théorème d'approchabilité de Blackwell (1956) pour les jeux à paiements vectoriels permet d'y remédier. On considère le jeu répété joué comme Γ et où le paiement de l'étape est le vecteur $R_n = \{A^\ell_{i_n j_n}, \ell \in K\}$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème 8
Soit $\alpha \in I\!R^K$. L' orthant $\alpha + I\!R^K_-$ est approchable par le joueur 2 si et seulement si :

$$\langle \alpha, q \rangle \geq u(q), \quad \forall q \in P.$$

Une stratégie d'approchabilité garantit donc $\mathtt{Cav}\ u$.

3.7. La structure de signaux.

Une extension naturelle du modèle (en particulier pour couvrir le cas de jeux sous forme extensive) est de considérer le cas où les coups ne sont pas annoncés. On se donne donc 2 familles de matrices $I \times J$, H_1^ℓ et H_2^ℓ à valeurs dans des espaces de signaux (éventuellement aléatoires) et si (i, j) est joué le signal du joueur 1 (resp. 2) est $H_1^\ell(i, j)$ (resp. $H_2^\ell(i, j)$). Le point crucial est que utiliser ou transmettre son information ne sont plus des notions équivalentes pour le joueur 1. Le concept pertinent est le second, conduisant à la définition de stratégie non révélatrice.

Formellement $x \in X^K$ est non révélatrice si les lois $x_\ell H_2^\ell(j) = \sum_i x_\ell^i H_2^\ell(i, j)$ sont, pour tout $j \in J$, indépendantes de $\ell \in K$ (ou de manière équivalente si la probabilité conditionnelle à tout signal s, $p(s)$, est égale à p). On définit alors $u(p)$ comme la valeur du jeu non révélateur à p et le théorème 7 s'étend (avec une preuve significativement plus complexe).

3.8. Manque d'information des 2 côtés.

Toujours dans le cadre de jeux à somme nulle considérons le modèle avec *manque d'information des 2 côtés* (et avec signaux standards : les coups sont annoncés). On se donne 2 ensembles finis K et M et une probabilité produit $p \times q$ sur $K \times M$ ainsi qu'une famille de matrices $I \times J$, A^{km}, $k \in K, m \in M$. Le couple (k, m) est tiré suivant $p \times q$ et le joueur 1 (resp. 2) est informé de k (resp. m). On définit comme plus haut le jeu $\Gamma_\infty(p, q)$.

On introduit le jeu non révélateur de valeur $u(p, q) = \mathtt{val} \sum_{k,m} p^k q^m A^{km}$ et l'on montre que le joueur 1 possède une stratégie non révélatrice lui garantissant $\mathtt{Vex}_q\ u(p, q)$ (la plus grande fonction définie sur $\Delta(K) \times \Delta(M)$, convexe en q et inférieure à u).

Une application du Corollaire 2 implique qu'il peut se garantir également $\mathtt{Cav}_p \mathtt{Vex}_q\ u(p, q)$. Un résultat de Stearns (1967) (voir Aumann and Maschler (1995), Chapter 3) permet alors d'obtenir la caractérisation suivante :

Théorème 9

$$Maxmin\ \Gamma_\infty(p, q) = \mathtt{Cav}_p \mathtt{Vex}_q\ u(p, q)$$
$$Minmax\ \Gamma_\infty(p, q) = \mathtt{Vex}_q \mathtt{Cav}_p\ u(p, q)$$

En particulier, contrairement au cas manque d'information d'un côté, il existe des jeux sans valeur. Une explication heuristique est la suivante : une meilleure réponse d'un joueur consiste d'abord à extraire le maximum d'information de la stratégie de son adversaire puis d'utiliser son information privée.

3.9. Somme non nulle.

Les contributions concernant le cas à somme non nulle et manque d'information d'un côté sont plus préliminaires mais toutes aussi fondamentales. Pour décrire des stratégies d'équilibre on introduit des notions de “joint plans”, qui correspondent à des suites alternées d'étapes de "signalling" (où le joueur informé révèle partiellement son information : la martingale des a posteriori évolue) et d'étapes de "jointly controlled lottery" où les joueurs génèrent, via leurs coups, des variables aléatoires controllées, qui déterminent l'histoire future.

Les résultats de base du domaine sont exposés dans Zamir (1992), pour le cas à somme nulle, et dans Forges (1992), pour le cas à somme non nulle.

De nombreuses extensions sont établies dans Mertens, Sorin and Zamir (1994). On trouvera dans Sorin (2002) une présentation récente, pour le cas à somme nulle, faisant le lien avec les jeux stochastiques.

4. Equilibre corrélé

Le jeu de base $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ consiste en un ensemble de joueurs N ainsi que, pour chaque joueur $i \in N$, un ensemble d'actions A^i et une fonction de paiement $g^i : A \to \mathbb{R}$, où $A = \prod_{j\in N} A^j$. On suppose les ensembles N et A^i finis.

4.1. Distribution d'équilibre corrélé.

Une *distribution d'équilibre corrélé* (Aumann (1974)) est une distribution de probabilité sur A, $q \in \Delta(A)$, qui satisfait une liste d'inégalités linéaires. Supposons que $a = (a^i)_{i\in N}$ soit sélectionné suivant q et que chaque joueur i soit seulement informé de a^i. Les inégalités expriment que a^i maximise le paiement espéré du joueur i suivant la distribution conditionnelle[1] $q(.|a^i)$ sur $A^{-i} = \prod_{j\neq i} A^j$ étant donné a^i :

$$\sum_{a^{-i}\in A^{-i}} q(a^{-i}|a^i)g^i(a^i, a^{-i}) \quad \geq \quad \sum_{a^{-i}\in A^{-i}} q(a^{-i}|a^i)g^i(b^i, a^{-i})$$

$$\forall i \in N, \forall a^i \in A^i : q(a^i) > 0, \forall b^i \in A^i$$

ou, de façon équivalente,

$$\sum_{a^{-i}\in A^{-i}} q(a^i, a^{-i})g^i(a^i, a^{-i}) \quad \geq \quad \sum_{a^{-i}\in A^{-i}} q(a^i, a^{-i})g^i(b^i, a^{-i}) \tag{1}$$

$$\forall i \in N, \forall a^i, b^i \in A^i$$

L'interprétation la plus simple est que q caractérise un système de corrélation mis au point par les joueurs avant le début du jeu G. Ce système sélectionne une *recommandation* $(a^i)_{i\in N}$ suivant q et transmet a^i en secret à chaque joueur i. Les joueurs choisissent ensuite simultanément une action, qui peut être différente de la recommandation. Seules les actions effectivement choisies déterminent les paiements. Si q satisfait les inégalités ci-dessus, aucun joueur n'a intérêt à dévier *unilatéralement* de la recommandation qui lui est faite.

En ajoutant la condition (non-linéaire) que q soit une distribution indépendante ($q((a^i)_{i\in N}) = \prod_{i\in N} q(a^i)\ \forall (a^i)_{i\in N}$), on retrouve l'*équilibre de Nash*

[1] On utilise la même notation q pour la distribution de probabilité sur A, ses marginales sur A^i et ses conditionnelles.

en stratégies mixtes (Nash (1951)). Dans ce cas, chaque joueur choisit son action individuellement, sans qu'aucun système de corrélation ne soit nécessaire.

4.2. **Fondements.**
Plongeons le jeu G dans un environnement *bayésien* : soit Ω l'ensemble (fini) des états du monde et pour chaque joueur i, une distribution de probabilité p^i sur Ω et une partition $\mathcal{P}^i$ de Ω. On note E_{p^i} l'espérance associée à p^i. Un élément ω de Ω spécifie tous les paramètres pertinents qui peuvent être inconnus des joueurs[2] ; p^i représente les croyances a priori du joueur i sur Ω, et $\mathcal{P}^i$, son information : le joueur i est informé de l'élément $P(\omega)$ de $\mathcal{P}^i$ qui contient l'état du monde ω.

Soit $\alpha^i(\omega)$ l'action choisie par le joueur i en ω ; on suppose que $\alpha^i(.) : \Omega \to A^i$ est mesurable par rapport à $\mathcal{P}^i$, c'est-à-dire que le joueur i connaît son action. Le joueur i est *Bayes-rationnel* en ω si

$$E_{p^i}(g^i(\alpha)|\mathcal{P}^i)(\omega) \geq E_{p^i}(g^i(a^i, \alpha^{-i})|\mathcal{P}^i)(\omega) \ \forall a^i \in A^i \tag{2}$$

c'est-à-dire si l'action $\alpha^i(\omega)$ qu'il choisit effectivement maximise son paiement espéré étant donné son information. Aumann (1987) démontre le résultat suivant :

Théorème
Sous l'hypothèse de probabilité a priori commune ($p^i = p, i \in N$), si chaque joueur est Bayes-rationnel en chaque état du monde, la distribution du profil d'actions α est une distribution d'équilibre corrélé.

D'un point de vue bayésien, l'équilibre corrélé apparaît donc comme un concept de solution plus naturel que l'équilibre de Nash. Les joueurs conditionnent leurs décisions à toutes les informations dont ils disposent sur le jeu, et il n'y a aucune raison d'exclure que ces informations puissent être corrélées.

4.3. **Equilibre corrélé et représentation canonique.**
En oubliant le point de vue bayésien et en conservant l'hypothèse de probabilité a priori commune, on peut voir Ω comme un ensemble d'événements aléatoires quelconques. Le jeu originel G et $(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i\in N})$ définissent alors un jeu *étendu* dans lequel un élément $\omega \in \Omega$ est d'abord sélectionné suivant p et chaque joueur i apprend quel élément de sa partition $\mathcal{P}^i$ contient ω. Les joueurs choisissent ensuite simultanément leurs actions, qui déterminent leurs paiements. Une stratégie (déterministe, ou "pure") du joueur i dans le jeu étendu est une fonction $\alpha^i(.) : \Omega \to A^i$ mesurable par rapport à $\mathcal{P}^i$. Un *équilibre corrélé* est la donnée de $(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i\in N})$ et d'un équilibre de Nash du jeu étendu, c'est-à-dire d'un profil de stratégies $(\alpha^i)_{i\in N}$ telles qu'aucun joueur ne profite d'une déviation unilatérale. Formellement, les inégalités (2) doivent être satisfaites, pour chaque $i \in N$. Le théorème précédent peut alors se relire de la façon suivante : la distribution sur A induite par un équilibre corrélé $[(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i\in N}), (\alpha^i)_{i\in N}]$ est une distribution d'équilibre corrélé, au

[2]Le caractère fini de Ω n'est pas sans perte de généralité si les "paramètres pertinents" couvrent les hiérarchies de croyance des joueurs sur leurs actions mutuelles (voir Mertens et Zamir (1985) et les commentaires d'Aumann (1987, section 4.c)).

sens de (1). On se réfère à ce dernier résultat comme à la *représentation canonique* des équilibres corrélés : sans perte de généralité, on peut supposer que $\Omega = A$, $\mathcal{P}^i$ est la partition engendrée par A^i et α^i est l'identité ($i \in N$).

Exemple

$N = \{1, 2\}$, $A^i = \{C^i, D^i\}$ où C^i est une action "pacifique" et D^i, une action "agressive" ; les fonctions de paiements (g^1, g^2) sont décrites par la matrice suivante :

$$\begin{array}{ccc} & C^2 & D^2 \\ C^1 & (6,6) & (2,7) \\ D^1 & (7,2) & (0,0) \end{array}$$

Supposons qu'un signal aléatoire ω soit sélectionné dans $\Omega = \{$faible, moyen, intense$\}$ de façon uniforme et que chaque joueur observe un aspect différent du signal : $\mathcal{P}^1 = \{$non intense, intense$\}$ et $\mathcal{P}^2 = \{$faible, non faible$\}$. Considérons les stratégies $\alpha^1(\text{non intense}) = C^1$, $\alpha^1(\text{intense}) = D^1$, pour le joueur 1 et $\alpha^2(\text{faible}) = D^2$, $\alpha^2(\text{non faible}) = C^2$, pour le joueur 2. On vérifie aisément que ces quantités définissent un équilibre corrélé. La distribution correspondante est

$$\begin{array}{ccc} & C^2 & D^2 \\ C^1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ D^1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \tag{3}$$

et le paiement espéré de chacun des deux joueurs est 5. Cette distribution peut être utilisée directement pour faire des recommandations aux joueurs avant le début du jeu. Quand les joueurs sont contraints à jouer indépendamment, le jeu a trois équilibres de Nash : deux équilibres purs (C^1, D^2), (D^1, C^2) et un équilibre mixte où chaque joueur recourt à la stratégie $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, de paiement espéré $\frac{14}{3}$ pour chacun d'eux. L'équilibre corrélé décrit par (3) est en dehors de l'enveloppe convexe des équilibres de Nash et améliore le paiement espéré $\frac{14}{3}$ tout en restant équitable.

4.4. **Existence.**

Tout équilibre de Nash est un équilibre corrélé et l'existence d'un équilibre de Nash mixte est garantie dans tout jeu fini, par un théorème de point fixe (Nash (1951)). L'existence d'un équilibre corrélé ne pose donc pas de problème. Cependant, la linéarité du système d'inégalités (1) permet d'obtenir une démonstration directe d'existence d'équilibre corrélé, qui ne repose que sur un théorème de séparation (Hart et Schmeidler (1989), Nau et McCardle (1990)). L'ensemble des distributions d'équilibre corrélé forme un polyèdre convexe ; les propriétés géométriques de l'ensemble des équilibres de Nash au sein de ce polyèdre ont été étudiées (voir notamment Nau et al. (2004)).

4.5. **Complexité.**

Le paragraphe précédent suggère que les équilibres corrélés sont plus maniables que les équilibres de Nash. Gilboa et Zemel (1989) donnent un contenu précis à cette intuition en montrant que la complexité de nombreux problèmes calculatoires est "NP-hard" pour l'équilibre de Nash et *polynomiale* pour l'équilibre corrélé. Parmi ces problèmes, citons par exemple : "le jeu G possède-t-il un équilibre de Nash (resp., un équilibre corrélé) qui donne un paiement au moins égal à r à chaque joueur (pour un nombre r donné) ?" et "le jeu G possède-t-il un équilibre de Nash (resp., un équilibre corrélé) unique ?"

4.6. **Mise en œuvre.**
Les joueurs de G peuvent-ils mettre en œuvre un équilibre corrélé en l'absence d'un système de corrélation, c'est-à-dire d'un médiateur fiable ? Barany (1992) donne une première réponse positive pour les jeux qui comptent au moins quatre joueurs : les équilibres corrélés coïncident alors avec les équilibres de Nash d'un jeu étendu où les joueurs échangent des messages sans coût avant le début de G. De nombreuses variantes et extensions de ce résultat ont suivi (voir par exemple Ben Porath (1998), Gerardi (2004), Lehrer (1996), Lehrer et Sorin (1997), Urbano et Vila (2002)).

4.7. **Apprentissage.**
Les décideurs bayésiens d'Aumann (1987) sont parfaitement rationnels. Les modèles d'apprentissage permettent d'étudier le comportement de long terme de joueurs dont la rationalité est limitée. De multiples dynamiques ont été considérées pour rendre compte de l'optimisation plus ou moins myope des joueurs. Sous certaines procédures d'adaptation spécifiques, qui traduisent typiquement que les agents limitent le regret de leurs choix stratégiques, les distributions empiriques des actions convergent vers les distributions d'équilibre corrélé (voir par exemple Foster et Vohra (1997), Hart et Mas Colell (2000)). Cependant, les dynamiques d'évolution classiques, comme celle du "réplicateur", peuvent très bien *éliminer* toutes les stratégies qui ont probabilité positive dans un équilibre corrélé (voir par exemple Viossat (2005)).

4.8. **Equilibre corrélé subjectif, fondements (suite).**
Le point de vue bayésien adopté ci-dessus laisse la possibilité de probabilités a priori p^i *subjectives*, différentes suivant les joueurs. Le concept de solution correspondant est l'équilibre corrélé subjectif, déjà considéré dans Aumann (1974). L'équilibre corrélé subjectif est peu restrictif : il peut par exemple donner un paiement espéré positif aux deux joueurs d'un jeu à somme nulle. Cependant, c'est le concept de solution approprié si on applique un principe de rationalité minimale à l'analyse introspective des joueurs avant le début du jeu (voir Brandenburger et Dekel (1987)).

4.9. **Extensions : étapes multiples, information incomplète, coalitions, raffinements, etc.**
Jusqu'ici, on s'en est tenu à un jeu G sous forme stratégique, dans lequel les joueurs ont la même information et prennent leurs décisions simultanément. Si le jeu comporte plusieurs étapes, en particulier des choix du hasard à l'origine de différences d'information des joueurs, l'approche précédente est toujours valable, car elle s'applique à la forme stratégique du jeu. On parle alors d'*équilibres corrélés en forme stratégique*. Mais d'autres extensions du concept d'Aumann sont concevables : le système de corrélation peut intervenir tout au long du jeu, les joueurs peuvent transmettre de l'information au médiateur qui incarne le système de corrélation, etc. (voir Forges (1986), Myerson (1986a)).

On s'est aussi limité aux déviations unilatérales. Mais on peut envisager des *équilibres corrélés résistant aux coalitions* (voir par exemple Ray (1996)).

Enfin, on a défini un équilibre corrélé comme un équilibre de Nash d'une extension du jeu. Dans ce type de définition, on peut faire appel à des raffinements de l'équilibre de Nash (suivant le modèle, équilibre parfait, sous-jeux parfait...). L'une des difficultés est que le théorème de représentation canonique n'est plus nécessairement valide (voir Dhillon et Mertens (1996), Myerson (1986a, 1986b), Gerardi (2004)).

5. Connaissance commune et consensus

5.1. **Connaissance mutuelle et commune.**

Un événement est *connaissance commune* de plusieurs personnes si chacun sait que cet événement se réalise, chacun sait que chacun le sait, chacun sait que chacun sait que chacun le sait, etc... Un exemple simple et célèbre, qui apparaît notamment dans les Littlewood's miscellany (Bollobas (1953)), permet de cerner cette notion. Imaginons trois personnes dans une même salle, portant chacune un chapeau pouvant être vert ou rouge – soit 8 configurations possibles. Supposons un instant que les trois chapeaux soient rouges et qu'aucune des 3 personnes ne connaisse la couleur de son propre chapeau. La personne $i = 1$ (resp. $i = 2, 3$) sait qu'au moins un des chapeaux est rouge, puisqu'elle en voit deux rouges, et sait que les personnes 2 et 3 le savent aussi – ce fait est donc connaissance *mutuelle*. Imaginons qu'un observateur externe annonce qu'un des chapeaux est rouge, ce que tout le monde sait. La seule différence est que cette information est maintenant connaissance *publique* (ou commune). Si l'observateur demande maintenant successivement (et publiquement) aux personnes 1, 2 et 3 si elles sont en mesure de déduire la couleur de leur chapeau, la personne 3 pourra répondre par l'affirmative, ce qui était impossible avant l'annonce publique. De fait : (i) l'annonce publique n'apprend rien à la personne 1 quant à la couleur de son chapeau, (ii) du point de vue de 2, l'annonce de la personne 1 est compatible avec le fait qu'il ait un chapeau rouge ou vert, car 2 voit le chapeau rouge de 3, (iii) les annonces de 1 et 2 sont incompatibles avec le fait que le joueur 3 ait un chapeau vert, car sinon, 2 aurait été en mesure de déduire de l'annonce de 1 que son propre chapeau était rouge.

5.2. **Le théorème du consensus.**

Le théorème du consensus (Aumann (1976)) est mathématiquement élémentaire, mais déroutant sous l'angle conceptuel. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, muni de deux partitions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, telles qu'aucun des atomes de $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ ne soit de probabilité nulle. Sur le plan de l'interprétation, Ω est l'ensemble des états du monde considérés comme possibles, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ représentent l'information de deux agents 1 et 2 – si $\omega \in \Omega$ se réalise, l'agent i reçoit comme "signal" l'atome $P_i(\omega)$ de $\mathcal{P}_i$ contenant ω : $\mathcal{P}_i$ décrit la capacité de i à distinguer les états de Ω – et p est la distribution *a priori* de l'état du monde, supposée commune aux deux agents.

Un événement $E \in \mathcal{A}$ est connaissance commune en $\omega \in \Omega$, si l'atome de $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ contenant ω est inclus dans E. On peut aisément se convaincre que cette notion correspond à la définition informelle du paragraphe précédent (ainsi, l'agent 1 sait que l'agent 2 sait que E se réalise, puisque pour chaque état $\omega' \in P_1(\omega)$ que 1 considère comme possible, on a $P_2(\omega') \subset E$; etc...).

Fixons un événement $A \in \mathcal{A}$ arbitraire, et notons $q_i = p(A|\mathcal{P}_i)$ la probabilité *a posteriori* que i assigne à A sur la base de l'information dont il dispose : $q_i(\omega) = p\left(A \cap P_i\left(\omega\right)\right)/p\left(P_i\left(\omega\right)\right)$.

Théorème 1
Supposons que, pour $\pi_1, \pi_2 \in [0,1]$, l'événement $E = \{q_1 = \pi_1, q_2 = \pi_2\}$ soit connaissance commune en un état $\omega \in \Omega$. Alors $\pi_1 = \pi_2$.
Si les croyances a posteriori des deux agents sont connaissance commune, elles ne peuvent qu'être égales.

Preuve. Notons F l'atome de $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ contenant ω. Ainsi, F est une union (disjointe) d'atomes de $\mathcal{P}_1$: $= \cup_j P_1^j$. Comme $q_1(\omega) = \pi_1$ en tout point de F, on a $\pi_1 = \dfrac{p\left(A \cap P_1^j\right)}{p\left(P_1^j\right)}$, soit $p\left(A \cap P_1^j\right) = \pi_1\ p\left(P_1^j\right)$ pour chaque j. En sommant sur j, on obtient $p\left(A \cap F\right) = \pi_1 p(F)$. Le même raisonnement appliqué au joueur 2, conduit à $\pi_1 = \pi_2$. ∎

5.3. Une application : les résultats de no-trade.

L'échange entre agents économiques est souvent attribuée à deux sources possibles : des différences de "goûts" (avec pour conséquence que l'acheteur est prêt, pour posséder le bien, à payer un prix supérieur au prix auquel le vendeur sera prêt à s'en défaire), ou des différences "d'opinion" (notamment sur les marchés financiers où certaines transactions apparaissent comme des paris sur l'évolution des cours). Le premier cas de figure correspond à l'existence de gains objectifs à l'échange, tandis que dans le second, l'échange repose sur le fait qu'une des parties dispose d'une information de meilleure qualité.

Le théorème du paragraphe précédent offre un éclairage nouveau sur cette question, au travers des résultats dits de "no-trade", dont nous présentons maintenant une version simple, dans le cadre du modèle décrit ci-dessus.

Supposons ainsi que l'ensemble des états du monde possibles et pertinents soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ fini, doté de deux partitions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Deux joueurs interagissent au sein d'un jeu (à information incomplète), où les ensembles d'actions disponibles sont notés A_1 et A_2. De façon plus précise, les deux joueurs reçoivent au préalable une information sur l'état ω au travers de leurs partitions, et choisissent simultanément des actions $a_1(\omega)$ et $a_2(\omega)$ (mesurables par rapport à l'information dont ils disposent), et reçoivent alors un paiement (utilité) $u_i\left(\omega, a_1\left(\omega\right), a_2\left(\omega\right)\right)$, qui dépend du véritable état du monde ainsi que des actions choisies par chacun d'eux.

Parmi les actions disponibles, on distingue une action $\bar{s}_i \in A_i$ – *statu quo* – qui correspond à l'option de ne pas participer à l'échange.[3]

Dans ce contexte, une stratégie du joueur i est une fonction $a_i(\omega)$ (mesurable par rapport à $\mathcal{P}_i$), décrivant l'action prise en fonction de l'information disponible. Un équilibre (de Nash) est un couple de stratégies $\left(a_1\left(\cdot\right), a_2\left(\cdot\right)\right)$,

[3]Dès qu'un joueur choisit cette option, le paiement ne dépend plus que de ω, puisqu'aucun échange n'a lieu.

tel qu'aucun des deux joueurs ne peut améliorer son utilité espérée en changeant unilatéralement de stratégie. Formellement, pour toute stratégie $b_1(\cdot)$, on a alors

$$\sum\nolimits_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_1\left(\omega, b_1\left(\omega\right), a_2\left(\omega\right)\right) \leq \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_1\left(\omega, a_1\left(\omega\right), a_2\left(\omega\right)\right)$$

(ainsi que la propriété symétrique).

L'hypothèse d'absence de gains objectifs à l'échange peut se formaliser en supposant que le statu quo $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ est un optimum *ex ante*, au sens où toute paire de stratégie $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$ telle que

$$\sum\nolimits_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i\left(\omega, a\left(\omega\right)\right) \geq \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i\left(\omega, \bar{s}\right), \text{ pour } i = 1, 2,$$

vérifie nécessairement $a_i(\omega) = \bar{s}_i$, pour tout $i = 1, 2$ et $\omega \in \Omega$.

On a alors le résultat suivant (voir Milgrom et Stokey (1982)).

Théorème 2
En l'absence de gains objectifs à l'échange, le statu quo $(a_1(\cdot), a_2(\cdot)) = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ *est le seul équilibre du jeu.*
Ainsi, en l'absence de gains à l'échange, et dès que les croyances des joueurs sont déduites d'une distribution a priori commune, il n'y a pas d'échange possible.

5.4. Systèmes sémantique et syntaxique.

Le théorème du consensus crée des difficultés de nature conceptuelle. La preuve suppose implicitement que l'ensemble Ω, ainsi que les partitions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, sont eux-même connaissance commune des agents. D'autre part, les états du monde sont supposés décrire dans leur intégralité les aspects pertinents de la situation étudiée. Ces aspects incluent notamment les croyances des joueurs relatives aux croyances des autres joueurs. Peut-on décrire ces états du monde ? Que connaissent les joueurs du modèle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$, aussi appelé *système sémantique de croyances* ? La perception de ces difficultés a conduit au développement de travaux, dont nous proposons ici un bref aperçu.

La première façon de traiter de ces problèmes conceptuels consiste à se cantonner à un niveau verbal ou conceptuel. Une seconde façon, décrite ci-dessous, consiste à construire de manière explicite le système sémantique à partir d'un autre formalisme plus primitif.

Cette approche – dite syntaxique – est essentiellement de nature hiérarchique. L'approche de Mertens et Zamir (1985) consiste à se donner un ensemble d'*états de la nature* (incompatibles entre eux) relatifs à la "réalité objective" (le temps qu'il fait,..). Le premier niveau de la hiérarchie spécifie les croyances (distributions de probabilité) des joueurs sur les états de la nature. Le second niveau spécifie les croyances des joueurs relatives aux états de la nature ainsi qu'aux croyances de niveau 1.[4] Et ainsi de suite... Le système sémantique est alors obtenu comme limite (projective) de ces croyances de niveaux successifs. Un état du monde est identifié à un état de la nature et à la suite infinie des croyances de tous niveaux de chacun des joueurs.

[4] Ces croyances de niveau 2 doivent satisfaire à quelques propriétés de cohérence avec les croyances de niveau 1.

Une construction syntaxique pour l'essentiel équivalente repose sur l'utilisation de "formules" et non de probabilités, et relève de la logique modale (cf. Hintikka (1962), Kripke (1959), Fagin et *al.* (1995)). On se donne un "alphabet", dont les lettres peuvent représenter des événements "naturels" élémentaires. Sur cet alphabet, on construit des formules (de longueur finie) en utilisant les opérateurs logiques ("non", "et") ainsi que des opérateurs notés p_i^α, qui s'interprètent comme "i attribue une probabilité au moins α à...", et en respectant des règles classiques de syntaxe. Un état du monde est alors défini comme une liste L de formules, *complète* et *cohérente* (pour toute formule f, L contient f ou sa négation, mais une seule des deux), ainsi que *fermée* (L contient toutes les conséquences logiques des formules de L). Un état apparaît alors comme l'ensemble des "propositions vraies" dans cet état. La perception des relations entre approches syntaxique et sémantique remonte à Harsanyi (1967-68), auquel ces travaux ont valu le premier prix Nobel de théorie des jeux en 1994.

6. Conclusion

Les thèmes présentés ici sont loin de couvrir toute la production d' Aumann dans le cadre des jeux stratégiques (ou non coopératifs) : il faudrait également citer les résultats sur les jeux presque compétitifs (§27)[5], l'extension du théorème de Kuhn aux jeux infinis (§28), les techniques de purification (§30) ainsi que les travaux sur la rationalité limitée (§24, §25, §34, §35), rationalité et connaissance (§36, §37) et les articles depuis 1995 en particulier sur "epistémologie interactive" et "communication gratuite".

Par ailleurs l'interaction théorie des jeux/économie s'opère essentiellement chez Aumann (comme chez beaucoup de théoriciens de sa génération) au niveau des jeux coalitionnels (ou coopératifs) qui constituent l'essentiel du volume II des *Collected Papers*. On doit y ajouter l' ouvrage fondamental *Values of Non-Atomic Games* (1974), écrit avec L.S. Shapley. Une des contributions majeures d'Aumann dans ce champ a été le modèle d'économie avec un continuum d'agents - et les théorèmes d'équivalence dans le cadre de la théorie d'équilibre général qui y sont liés (§46, §47, §51). Une présentation de certains aspects apparait dans son exposé à l' International Congress of Mathematicians (Helsinski, 1978) (§63).

Parmi les autres domaines auquels Aumann a contribué, citons, en particulier : la théorie des noeuds (sa thèse, §10), l'analyse fonctionnelle (§65 - §73), la théorie de l'utilité (§14, §15, §17)...

Une présentation d'ensemble de ses travaux peut être trouvée dans l'introduction de Hart and Neyman (1995).

Références

[1] Advanced information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel : Robert Aumann's and Thomas Schelling's Contributions to Game Theory (2005) Analyses of Conflict and Cooperation. http ://nobelprize.org/economics/laureates/2005/adv.html

[2] Aumann, R. J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics*, **1**, 67-96.

[5] le § renvoie à la numérotation des *Collected Papers*.

[3] Aumann, R.J. (1976) Agreing to disagree, *Annals of Statistics*, **4**, 1236–1239.

[4] Aumann, R.J. (1981) Survey of repeated games, *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, Mannheim : Bibliographisches Institüt, 11-42.

[5] Aumann, R. J. (1987) Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality, *Econometrica*, **55**, 1-18.

[6] Aumann, R.J. (1999) Interactive epistemology I : knowledge, *International Journal of Game Theory*, **28**, 263–300.

[7] Aumann, R.J. (1999) Interactive epistemology II : probability, *International Journal of Game Theory*, **28**, 301–314.

[8] Aumann, R.J. (2000) *Collected Papers*, M.I.T. Press.

[9] Aumann, R.J. and S. Hart (1992, 1994, 2002) (eds.) *Handbook of Game Theory I, II, III*, North-Holland.

[10] Aumann, R.J. and A. Heifetz (2002) Incomplete information, *Handbook of Game Theory, III*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 43, North-Holland.

[11] Aumann, R.J. and M. B. Maschler (1995) *Repeated Games with Incomplete Information*, (with the collaboration of R.E. Stearns), MIT Press.

[12] Aumann, R.J. and L. Shapley (1974) *Values of Non-Atomic Games*, Princeton U.P..

[13] Aumann, R.J. and L. Shapley (1994) Long term competition - A game theoretic analysis, *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Meggido (ed.), Springer-Verlag, 1-15.

[14] Aumann, R.J. and S. Sorin (1989) Cooperation and bounded recall, *Games and Economic Behavior*, **1**, 5-39.

[15] Barany, I. (1992) Fair distribution protocols or how players replace fortune, *Mathematics of Operations Research*, **17**, 327-340.

[16] Ben-Porath, E. (1998) Correlation without mediation : expanding the set of equilibrium outcomes by cheap pre-play procedures, *Journal of Economic Theory*, **80**, 108-122.

[17] Benoît, J.P. and V. Krishna (1985) Finitely repeated games, *Econometrica*, **53**, 905-922.

[18] Benoît, J.P. and V. Krishna (1987) Nash equilibria of finitely repeated games, *International Journal of Game Theory*, **16**, 197-204.

[19] Blackwell, D. (1956) An analog of the minmax theorem for vector payoffs, *Pacific Journal of Mathematics*, **6**, 1-8.

[20] Bollobás, B., ed. (1953) *Littlewood's miscellany.* Cambridge : Cambridge University Press

[21] Brandenburger, A. and Dekel, E. (1987) Rationalizability and correlated equilibria, *Econometrica*, **55**, 1391-1402.

[22] Dhillon, A. and Mertens, J. F. (1996) Perfect correlated equilibria, *Journal of Economic Theory*, **68**, 279-302.

[23] Fagin, R, J.Y. Halpern, M. Moses and M.Y. Vardi (1995) *Reasoning About Knowledge.* MIT Press, Cambridge

[24] Forges, F. (1986) An approach to communication equilibrium, *Econometrica*, **54**, 1375-1385.

[25] Forges, F. (1992) Repeated games of incomplete information : non-zero-sum, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 6, North-Holland.

[26] Forges, F., J.-F. Mertens and A. Neyman (1986) A counterexample to the Folk theorem with discounting, *Economic Letters*, **20**, 7.

[27] Foster, D. and Vohra, R. (1997) Calibrated learning and correlated equilibrium, *Games and Economic Behavior*, **21**, 40-55.

[28] Fudenberg, D. and E. Maskin (1986) The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica*, **54**, 533-554.

[29] Fudenberg, D. and E. Maskin (1991) On the dispensability of public randomization in discounted repeated games, *Journal of Economic Theory*, **53**, 428-438.

[30] Geanakoplos, J. (2002) Common knowledge, *Handbook of Game Theory with Economic Applications, II*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 40, North-Holland.

[31] Gerardi, D. (2004) Unmediated communication in games with complete and incomplete information, *Journal of Economic Theory*, **114**, 104-131.

[32] Gilboa, I. and E. Zemel (1989) Nash and correlated equilibria : some complexity considerations, *Games and Economic Behavior*, **1**, 80-93.

[33] Gossner, O. (1995) The Folk theorem for finitely repeated games with mixed strategies, *International Journal of Game Theory*, **24**, 95-107.

[34] Harsanyi, J. (1967-68) Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, parts I–III, *Management Science*, **8**, 159–182, 320–334, 486–502.

[35] Hart, S. and A. Mas-Colell (2000) A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium, *Econometrica*, **68**, 1127-1150.

[36] Hart, S. and D. Schmeidler (1989) Existence of correlated equilibria, *Mathematics of Operations Research*, **14**, 18-25.

[37] Hart, S. and A. Neyman (1995) (eds.) *Game and Economic Theory : Selected Contributions in Honor of Robert J. Aumann*, University of Michigan Press.

[38] Hintikka, J. (1962) *Knowledge and Belief*, Cornell University Press,Ithaca.

[39] Kripke, S. (1959) A completeness theorem in modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, **24**, 1–14.

[40] Lehrer, E. (1996) Mediated talk, *International Journal of Game Theory*, **25**, 177-188.

[41] Lehrer, E. and S. Sorin (1997) One-shot public mediated talk, *Games and Economic Behavior*, **20**, 131-148.

[42] Lewis, D. (1969) *Convention*, Harvard University Press, Cambridge.

[43] Mertens, J.-F. (1987) Repeated Games, *Proceedings of the I.C.M. Berkeley, 1986*, Gleason, A.N. (ed.), Providence, A.M.S., 1528-1577.

[44] Mertens, J.-F., Sorin S. and S. Zamir (1994) *Repeated Games*, Core D.P 9420, 9421, 9422.

[45] Mertens, J.F. and S. Zamir (1985) Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information, *International Journal of Game Theory*, **14**, 1–29.

[46] Milgrom, P. and N. Stokey (1982) Information, trade and common knowledge, *Journal of Economic Theory*, **26**, 17–27.

[47] Myerson, R. B. (1986a) Multistage games with communication, *Econometrica*, **54**, 323-358.

[48] Myerson, R. B. (1986b) Acceptable and predominant correlated equilibria, *International Journal of Game Theory*, **15**, 133-154.

[49] Nau, R.F. and K. F. McCardle (1990) Coherent behavior in noncooperative games, *Journal of Economic Theory*, **50**, 424-444.

[50] Nau, R. F., S. Gomez Canovas and P. Hansen (2004) On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria, *International Journal of Game Theory*, **32**, 443-453.

[51] Ray, I. (1996) Coalition-proof correlated equilibrium : A definition, *Games and Economic Behavior*, **17**, 56-79.

[52] Rubinstein, A. (1994) Equilibrium in supergames, *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Meggido (ed.), Springer-Verlag, 17-28.

[53] Sorin, S (1986) On repeated games with complete information, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 147-160.

[54] Sorin, S (1992) Repeated games with complete information, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 4, North-Holland.

[55] Sorin, S (2002) *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer.

[56] Urbano, A. and J. E. Vila (2002) Computational complexity and communication : coordination in two-player games, *Econometrica*, **70**, 1893-1927.

[57] Viossat, Y.(2005) Replicator dynamics and correlated equilibrium : elimination of all strategies in the support of correlated equilibria, *Cahier du Laboratoire d'Econométrie, Ecole Polytechnique*, 2005-014.

[58] Zamir, S. (1992) Repeated games of incomplete information : zero-sum, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 5, North-Holland.

Françoise Forges, CEREMADE, Université Paris-Dauphine
E-mail address: `Francoise.Forges@dauphine.fr`

Jérôme Renault, CEREMADE, Université Paris-Dauphine
E-mail address: `renault@ceremade.dauphine.fr`

Sylvain Sorin, Equipe Combinatoire et Optimisation, Université P. et M. Curie - Paris 6 et Laboratoire d'Econométrie, Ecole Polytechnique
E-mail address: `sorin@math.jussieu.fr`

Nicolas Vieille, Département Economie et Finance, HEC
E-mail address: `vieille@hec.fr`