

## Von Neuman-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu : théories des jeux et équilibre général

In: Cahiers d'économie politique, n°35, 1999. pp. 7-17.

### Résumé

Cette note vise à préciser, dans une perspective historique, les liens entre la théorie des jeux et la théorie de l'équilibre général. On constate que sous un vocabulaire commun et des outils mathématiques semblables, des approches assez différentes apparaissent dans les travaux de von Neumann-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu. En particulier la notion d'équilibre a un statut très différent dans les deux champs.

### Abstract

The purpose of this note is to make more precise from an historical point of view the connection between game theory and general equilibrium theory. In fact, behind similar terminology and mathematical tools, quite different approaches are used by von Neumann- Morgenstern, Nash and Arrow-Debreu. In particular the equilibrium concept has a very different interpretation in both fields.

---

Citer ce document / Cite this document :

Sorin Sylvain. Von Neuman-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu : théories des jeux et équilibre général. In: Cahiers d'économie politique, n°35, 1999. pp. 7-17.

doi : 10.3406/cep.1999.1259

[http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/cep\\_0154-8344\\_1999\\_num\\_35\\_1\\_1259](http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/cep_0154-8344_1999_num_35_1_1259)

---

# VON NEUMANN-MORGENSTERN, NASH ET ARROW-DEBREU : THÉORIE DES JEUX ET ÉQUILIBRE GÉNÉRAL<sup>1</sup>

Sylvain SORIN<sup>2</sup>

## Résumé

Cette note vise à préciser, dans une perspective historique, les liens entre la théorie des jeux et la théorie de l'équilibre général. On constate que sous un vocabulaire commun et des outils mathématiques semblables, des approches assez différentes apparaissent dans les travaux de von Neumann-Morgenstern, Nash et Arrow-Debreu. En particulier la notion d'équilibre a un statut très différent dans les deux champs.

## Abstract: Von Neumann-Morgenstern, Nash and Arrow-Debreu : Game Theory and General Equilibrium

The purpose of this note is to make more precise from an historical point of view the connection between game theory and general equilibrium theory. In fact, behind similar terminology and mathematical tools, quite different approaches are used by von Neumann-Morgenstern, Nash and Arrow-Debreu. In particular the equilibrium concept has a very different interpretation in both fields.

**Classification JEL** : C 620, C 720

## 0. Introduction

En considérant les rapports entre théorie des jeux et économie dans une perspective historique, on constate que la première formalisation explicite d'un lien naturel remonte à la parution en 1944 de "Theory of Games and Economic Behavior" (cité désormais TGEB). Il y a eu auparavant utilisation en économie d'idées qui seront reprises et formalisées par la théorie des jeux (Cournot, Edgeworth,...), et de même des illustrations économiques de la théorie des jeux apparaissent chez Borel et von Neumann, mais il n'y a pas de relation privilégiée entre les deux domaines. Les développements initiaux de la théorie des jeux, déroulement des parties, formalisation des stratégies, introduction de l'aléa, portent sur l'habileté intrinsèque des joueurs: problèmes de paris, échecs, poker (Montmort (1713), Zermelo (1913), Borel (1924)).

---

1. Ce travail doit beaucoup à une recherche menée en commun avec Françoise Forges.

2. Université Paris X-Nanterre, THEMA, sorin@poly.polytechnique.fr

Il ne s'agit pas ici d'étudier l'interaction des deux champs (voir Schotter and Schwodiauer (1980), Aumann (1987), Schmidt (1990)), mais beaucoup plus modestement de confronter des textes fondateurs de la théorie des jeux d'une part, et de la théorie de l'équilibre général de l'autre.

Parmi les raisons qui poussent à cette comparaison j'en souligne trois:

- la coïncidence des concepts: on retrouve le mot "équilibre" dans le titre de la traduction anglaise de l'article de von Neumann (1945); à la suite des travaux de Nash (1950a), (1951), cette notion devient centrale en théorie des jeux et l'article d'Arrow-Debreu (1954) est considéré comme fondateur de l'approche mathématique de la théorie de l'équilibre général.
- la communauté des auteurs: Arrow et Debreu étaient largement au courant des travaux récents de von Neumann-Morgenstern et de Nash et le théorème crucial de Debreu (1952) a été présenté aux "Proceedings of the National Academy of Sciences" (U.S.A.) par von Neumann.
- l'unité des techniques: les outils essentiels utilisés dans les deux domaines relèvent de l'analyse convexe et de la théorie des points fixes.

## **1. Au sujet de TGEB**

### 1.1 Le contenu

On trouve essentiellement dans TGEB:

- une définition formelle du concept de jeu stratégique, aussi bien sous forme développée (extensive) que sous forme réduite (normale): ceci inclut bien sûr les notions de joueurs, mais aussi d'information, de coups, de stratégies, d'issues et de gain. Dans la première approche le déroulement du jeu est décrit explicitement alors que la seconde modélisation se concentre sur les paramètres pertinents: stratégies et paiements.
- une étude des jeux "déterminés", à deux joueurs et à somme nulle, où la validité d'un théorème de minmax revient à dissiper toute incertitude stratégique: le jeu a une valeur et il n'y a pas de conjecture à faire sur le comportement de l'adversaire pour choisir une stratégie qui la garantisse.
- une présentation des jeux sous forme caractéristique où la notion de base est celle de coalition. La détermination, pour chacune de celles-ci du gain qu'elle peut obtenir (quantité soit donnée a priori, soit obtenue à partir du théorème du minmax) permet ensuite de définir des imputations individuelles.
- la notion de "solution" (stable set) qui correspond à une forme de stabilité de contrats entre les agents. Elle est basée sur une relation de domination entre deux imputations mais s'accommode de plusieurs issues. Kuhn et Tucker (1958) citent à ce sujet une intervention de von Neumann à une table ronde en 1955: "the enormous variety of solutions which may obtain

for n-person games was not surprising in view of the corresponding enormous variety of observed stable social structures".

Par ailleurs, la deuxième édition de TGEB (1947) contient de plus une annexe où est construite la théorie de l'utilité espérée.

Enfin les applications explicites à l'économie sont plutôt rares et sommaires (voir les commentaires de Hurwicz (1945) par exemple). C'est surtout dans l'introduction que les auteurs insistent sur ce qui leur paraît essentiel, à savoir l'interaction stratégique entre les agents et par-là même la différence fondamentale avec un problème de maximisation usuel ou avec l'étude du comportement d'un agent isolé. Cependant l'objectif est de montrer "that the typical problems of economic behavior become strictly identical with the mathematical notions of suitable games of strategy" (TGEB, p.2).

## 1.2 Les réactions

La plupart des commentaires, aussi bien d'économistes que de mathématiciens sont extrêmement élogieux, mais souvent liés à une critique de l'état de développement du champ économique. En voici quelques échantillons:

Chevalley (1945): "I would like to express the hope that this book will be instrumental in helping economics to emerge from its actual condition of vagueness and confusion to the rank of a body of precise statements bearing on precisely defined situations".

Copeland (1945): "Posterity may regard this book as one of the major scientific achievements of the first half of the twentieth century. This will undoubtedly be the case if the authors have succeeded in establishing a new exact science = the science of economics".

Hurwicz (1945): "Had it merely called to our attention the existence and exact nature of certain fundamental gaps in economic theory, the TGEB by von Neumann and Morgenstern would have been a book of outstanding importance. But it does more than that. It is essentially constructive: where existing theory is considered to be inadequate, the authors put in its place a highly novel analytical apparatus designed to cope with the problem".

Marschak (1946): "Ten more such books and the progress of economics is assured".

Wald (1947): "In this book a fundamentally new and rigorous theory of economic behavior is developed".

Stone (1948): "Unquestionably for economists, the great work of von Neumann and Morgenstern is the most important contribution that appeared since Keynes".

Justman (1949): "Ouvrage fondamental pour la science économique".

Une exception parmi les critiques est celle de Kaysen (1946) pour qui la multiplicité des solutions (de von Neumann Morgenstern) empêche l'application aux problèmes économiques.

### 1.3 Le bilan

L'enthousiasme créé par la parution de TGEB retombe assez vite et dès 1953, Shubik remarque que l'on attend trop de la théorie des jeux et que les modèles généraux ne s'appliquent pas directement aux problèmes concrets. Kaldor (dans Dore et alii (1989)) parle de TGEB comme "an anti-climax for economics, for after all the complexities of the theory of games, its applications to economics were far-fetched and not very enlightening".

Dans les 15 années qui suivent la parution de TGEB, les progrès concerneront essentiellement la problématique interne de la théorie (avec un accent particulier mis sur les jeux à somme nulle d'une part, les solutions de von Neumann-Morgenstern de l'autre, jusqu'à la construction en 1969 par Lucas d'un jeu sans solution).

Dans son article du *Palgrave*, Debreu (1987) résume l'apport de TGEB en parlant de "new level of logical rigour for economic reasoning" et indiquant que l'ouvrage "introduced convex analysis in economic theory".

## 2. Équilibre et jeux

### 2.1 Définition

La notion d'équilibre n'existe pas dans TGEB et apparaît chez Nash (1950) quelques années plus tard. Elle s'applique à toute situation où l'on a identifié les joueurs (individus ou coalitions), leurs stratégies, les issues comme fonction des stratégies et les préférences des joueurs sur celles-ci.

Cette description correspond à des agents et à des choix indépendants.

Un équilibre est un profil de stratégies où aucun changement unilatéral n'est avantageux.

L'existence d'un équilibre est montrée par Nash (1951) dans le cas d'espaces d'actions finis grâce au théorème de point fixe pour les fonctions de Brouwer (ou plus généralement (1950a) en utilisant le théorème de point fixe pour les correspondances de Kakutani et la démonstration s'étend alors au cas où les espaces d'actions sont compacts et les paiements continus).

### 2.2 Justifications

Les articles de Nash n'apportent pas de justifications à sa notion d'équilibre. Il est plus prolix dans sa thèse (voir Leonard (1994)) où il suggère deux interprétations:

- l'une dans l'esprit d'un équilibre de population: une stratégie mixte correspond à une population diversifiée et un équilibre décrit une composition stable dans une optique dynamique: tous les "types" représentés dans la population obtiennent le même paiement donc possèdent le même taux de croissance et les proportions des types sont stationnaires.
- l'autre en terme de concept auto-réalisant au niveau théorique: si une norme publique de comportement apparaît et est suivie, ce doit être un équilibre.

Il n'y a pas d'évocation de procédure de convergence ni a fortiori d'étude de l'émergence d'un équilibre particulier en cas de multiplicité.

Enfin, le lien avec l'économie apparaît explicitement chez Nash de manière indépendante à l'occasion de l'étude des problèmes de négociation (Bargaining problem, 1950b).

### 2.3 Réactions et applications

L'importance de l'équilibre a été reconnue aussitôt mais le concept a été également vivement critiqué comme ayant "some grave deficiencies and certainly cannot be regarded as a definitive solution of the conceptual problems of this domain" (Mc Kinsey, 1952).

En fait, il faudra attendre les années 60 avec l'introduction des équilibres forts d'Aumann, la caractérisation des équilibres dans les jeux répétés (Folk Theorem), puis les travaux sur les enchères, l'information incomplète et les équilibres parfaits (Harsanyi (1967-68), Selten (1975), Vickrey (1961), Wilson (1969)), pour que la notion d'équilibre soit largement utilisée. Survient alors dans les années 80 la multiplication des résultats théoriques aussi bien que des applications (surtout en économie industrielle), voir par exemple Aumann (1985, 1987) et Schotter and Schwodiauer (1980).

Depuis les principaux développements portent:

- sur le concept d'équilibre lui-même: extension et/ou sélection,
- sur les procédures de convergence: algorithme de meilleure réponse, dynamique du réplicateur, procédures d'apprentissage,
- sur le lien avec les hypothèses sur le raisonnement (rationalité limitée) et la connaissance (factuelle ou structurelle).

### 2.4 TGEB et équilibre de Nash

Sans remonter à Cournot et au concept de "conjectural variation" de Bowley ou Frisch, il semble probable que von Neumann et Morgenstern ont pu discuter une notion dans l'esprit de l'équilibre de Nash (surtout compte tenu des travaux préalables de Morgenstern sur les anticipations rationnelles), mais leur approche est très largement différente.

Pour les jeux stratégiques (non-coopératifs) la notion de minmax (de niveau garanti) ne relève pas d'une maximisation bayésienne. Aucune hypothèse sur le

comportement de l'autre agent n'est nécessaire, ce qui permet précisément d'éviter le raisonnement circulaire qui mène à une "logical impasse", comme le fait remarquer Hurwicz (1945). On trouve explicitement dans TGEB, p.32 le principe suivant: "Second, and this is even more fundamental, the rules of rational behavior must provide definitely for the possibility of irrational conduct on the part of others ... In whatever way we formulate the guiding principles and the objective justification of "rational behavior", provisos will have to be made for every possible conduct of "the others"".

En ce qui concerne les jeux coalitionnels (coopératifs), von Neumann et Morgenstern sont intéressés par les formations de coalitions et les problèmes institutionnels qui leur sont liés (leur expression est "standards of behavior").

### **3. Équilibre général**

#### **3.1 Aux origines de l'équilibre général**

Dans le modèle d'économie d'échange de Walras, la demande vient de la maximisation de fonctions d'utilité individuelles, étant donné les prix et les dotations initiales des agents. Les extensions au cadre avec production sont diverses et complexes avec une demande plus ou moins exogène (voir Weintraub, 1983).

Le modèle de "reproduction élargie" de von Neumann est initialement paru en 1937 sous le titre "Sur un système d'équations économiques et une généralisation du théorème de point fixe de Brouwer" et est clairement dans l'esprit des modèles de croissance et non d'équilibre général (Kurz and Salvadori, 1993). Arrow (dans Dore et alii, 1989) parle à ce sujet de "complete omission of final demand" et von Neumann évoque un "typical economic equation system" en début d'article pour ne plus ensuite donner aucune référence économique mais souligner le lien avec son théorème de minmax de 1928. La traduction sous le titre "A model of general economic equilibrium" (1945) est ici particulièrement trompeuse.

C'est au contraire du côté de Wald (1935, 1936a,b) que l'on peut trouver la source du modèle Arrow-Debreu, le lien entre les travaux de Wald et de von Neumann étant leur présentation au Colloquium de Menger à Vienne dans les années 30.

#### **3.2 Équilibre général et jeux: les outils**

La démonstration de l'existence d'équilibre général dans l'article d'Arrow-Debreu (1954) utilise un jeu généralisé (ou contraint) où l'espace des stratégies d'un joueur dépend des choix des autres, et un résultat de Debreu (1952) étendant l'existence d'équilibre de Nash à ce cadre. La démarche est donc, partant d'une économie E:

- i) de construire un jeu  $G(E)$  associé à E
- ii) de montrer que  $G(E)$  possède un équilibre (au sens de Nash)

iii) d'établir que cet équilibre induit un équilibre (au sens de Walras) dans E.

D'autres démonstrations (Mc Kenzie (1954), Gale (1955), Nikaido (1956)) utiliseront la correspondance d'excès de demande mais l'intérêt de l'approche en terme de jeu est de permettre de faire des hypothèses explicites sur les comportements et les utilités individuels.

Dans tous les cas, la preuve utilise une version du théorème de point fixe (de Kakutani) et cet outil apparaît comme un invariant caractéristique qui traverse tout le champ considéré depuis le théorème de minmax de von Neumann jusqu'à son modèle de croissance puis l'équilibre de Nash et enfin l'équilibre Walrasien.

Cette unité des outils techniques est en fait trompeuse, car dès Ville (1936) on a réalisé qu'une application d'un théorème de séparation suffisait pour obtenir le théorème du minmax (et c'est le même outil qui est utilisable pour le modèle de croissance). Debreu (voir Leonard, 1994) parlera alors des rapports de von Neumann et du théorème de point fixe comme d'un "accident within an accidental paper". Il n'y a au fond aucun lien, ni technique, ni conceptuel entre les travaux de von Neumann et la théorie de l'équilibre général. Par contre on sait depuis Uzawa (1962) que l'existence d'équilibre de Walras est en fait équivalente au théorème de point fixe.

### 3.3 Équilibre général et jeux: les concepts

L'utilisation d'une modélisation en terme de jeu contraint chez Arrow et Debreu ne doit pas masquer l'aspect assez arbitraire du jeu lui-même: d'une part le jeu généralisé impose par hypothèse le respect par tous les joueurs des contraintes budgétaires, d'autre part en plus des agents de l'économie apparaît un joueur appelé "fictitious price setting agent", "market participant" ou explicitement "market mechanism" dont l'espace de stratégies est le simplexe des prix et dont la fonction de gain est l'excès de demande.

Cette approche correspond plus à la description d'une économie centralisée où l'on cherche à établir l'existence d'un système de prix cohérents qu'à une description explicite d'un mécanisme de marché. ("Paradoxically, the competitive equilibrium involves no interplay between the "competitors", and might better be described as an "administered-price" solution", Shapley et Shubik, 1967).

Explicitement, chaque agent sait qu'il ne peut pas influencer le marché, i.e. les prix, et son comportement revient donc simplement à un problème de maximisation individuel, comme dans le cas d'un agent unique.

Il semble que ce soit précisément le cas intermédiaire (si suivant Aumann, l'on associe compétition parfaite et continuum d'agents) qui intéresse von Neumann et Morgenstern. Ils précisent qu'il y a une différence fondamentale entre un Robinson, plusieurs Robinson et une myriade de Robinson et que l'élimination de l'aspect stratégique soit, de la possibilité pour un agent d'agir par sa demande sur les prix,



doit être un résultat de la théorie pour les économies avec un grand nombre d'agents et non une hypothèse. (Il faudrait ici citer tout le § 2.4.2 de TGEB).

D'où l'intérêt chez von Neumann et Morgenstern pour le rôle des institutions et l'étude de la stabilité des règles de comportement.

Au contraire, comme le font remarquer Duffie et Sonnenschein (1989) l'approche en terme d'équilibre général laisse dans l'ombre la question de savoir quand l'approche à prix fixes se justifie, le problème de la formation effective des prix ainsi que le traitement de la multiplicité des équilibres, sans parler des procédures réelles d'échange et du rôle de la monnaie.

Paradoxalement, c'est avec les jeux coalitionnels que la liaison équilibre général/théorie des jeux a été la plus féconde (voir par exemple, Mertens et Sorin (1994)). D'une part, la notion de cœur (devinée par Edgeworth et liée à la relation de domination de von Neumann et Morgenstern) est bien définie et justifiable quelque soit le nombre d'agents dans l'économie, d'autre part deux résultats fondamentaux ont été obtenus: l'équivalence du cœur et de l'équilibre Walrasien pour les économies non-atomiques (propriété étendue ensuite à la valeur de Shapley, puis à l'ensemble de marchandage et enfin caractérisée axiomatiquement) et la convergence du cœur pour des économies répliquées.

Une approche alternative qui vise à une description explicite des mécanismes de marché et des comportements stratégiques des agents a été entreprise depuis une vingtaine d'années par Shapley et Shubik, entre autres, (Shapley (1976) Shapley et Shubik (1977)) et ne me semble toujours pas avoir l'audience qu'elle mérite.

#### **4. Conclusion**

En définitive les liens initiaux entre la théorie des jeux et la théorie de l'équilibre général ont plus reposé sur des outils mathématiques et une volonté de rigueur que sur des relations conceptuelles.

La parution de TGEB a été parfois perçue comme à l'antipode de la tradition économique néoclassique (Stone (1948), Lagache (1950)) et il est clair que von Neumann et Morgenstern n'étaient pas concernés par la théorie de l'équilibre général.

Au sein de la théorie des jeux elle-même, l'écart est également important entre TGEB et l'approche de Nash, qui reste ignoré par Morgenstern (1976).

Enfin il est à noter que l'approche stratégique de l'équilibre compétitif, avec une description explicite de la manière dont les prix réagissent aux "déséquilibres" du marché reste embryonnaire.

## BIBLIOGRAPHIE

- Arrow K. et Debreu G. (1954), "Existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica*, 22, 265-290.
- Aumann R.J. (1985), "What is game theory trying to accomplish ?" in Arrow K. and Honkapohja (eds), *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, 28-76.
- Aumann R.J. (1987), "Game Theory", in J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman eds., *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Mac Millan, 460-482.
- Borel E. (1924), *Éléments de la théorie des Probabilités*, Note IV: Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs, Hermann, 204-224.
- Chevalley C. (1945), "Theory of Games", *View*, 5, 43.
- Copeland A. (1945), "Book review: Theory of games and economic behavior", *Bulletin of the A.M.S.*, 51, 498-504.
- Debreu G. (1952), "A social equilibrium existence theorem", *P.N.A.S. USA*, 38, 886-893.
- Debreu G. (1987), "Mathematical Economics", in J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman eds., *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Mac Millan, 399-404.
- Dore M., Chakravarty S. and R. Goodwin eds. (1989), *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press.
- Duffie D. and H. Sonnenschein (1989), "Arrow and general equilibrium theory", *Journal of Economic Literature*, XXVII, 565-598.
- Gale D. (1955), "The law of supply and demand", *Mathematica Scandinavica*, 3, 155-169.
- Harsanyi J.C. (1967-68), "Games with incomplete information played by `Bayesian players'", Parts I-III, *Management Science*, 14, 159-182, 320-334, 486-502.
- Hurwicz L. (1945), "The theory of economic behavior", *The American Economic Review*, XXXV, 909-925.
- Justman E. (1949), "La théorie des jeux", *Revue d'Économie Politique*, 59, 616-633.
- Kaysen C. (1946-47), "A revolution in economic theory ?", *Review of Economic Studies*, XIV, 1-15.
- Kuhn H.W. and A.W. Tucker (1958), "John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economic", *Bulletin of the A.M.S.*, 64, 100-122.
- Kurz H. and Salvadori N. (1993), "von Neumann's growth model and the `classical tradition'", *European Journal of the History of Economic Thought*, 1, 129-160.
- Lagache M. (1950), "L'analyse structurale en économie: la théorie des jeux", *Revue d'Économie Politique*, 60, 399-418.
- Leonard R.J. (1994), "Reading Cournot, reading Nash: the creation and stabilisation of the Nash equilibrium", *The Economic Journal*, 104, 492-511.

- Lucas W.F. (1969), "The proof that a game may not have a solution", *Transactions of the American Mathematical Society*, 137, 219-29.
- Marschak J. (1946), "Neumann's and Morgenstern's new approach to static economics", *The Journal of Political Economy*, LIV, 97-115.
- McKenzie L. (1954), "On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems", *Econometrica*, 22, 147-161.
- McKinsey J.C.C. (1952), "Some notions and problems of Game Theory", *Bulletin of the A.M.S.*, 58, 591-611.
- Mertens J.-F. and S. Sorin eds. (1994), *Game theoretic methods in general equilibrium analysis*, Kluwer Academic Publishers.
- Montmort P. de (1713), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, chez J.Quillau, Paris.
- Morgenstern O. (1976), "The collaboration between O.Morgenstern and J.von Neumann on the theory of games", *Journal of Economic Literature*, 14, 805-816.
- Nash J.F. (1950a), "Equilibrium points in n-person games", *P.N.A.S. USA*, 36, 48-49.
- Nash J.F. (1950b), "The bargaining problem", *Econometrica*, 18, 155-162.
- Nash J.F. (1951), "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- Nikaido H. (1956), "On the classical multilateral exchange problem", *Metroeconomica*, 8, 135-145.
- Schmidt Ch. (1990), "Game theory and economics: an historical survey", *Revue d'Economie Politique*, 100, 589-618.
- Schotter A. and G. Schwodiauer (1980), "Economics and the theory of games: a survey", *Journal of Economic Literature*, XVIII, 479-527.
- Selten R. (1975), "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", *International Journal of Game Theory*, 4, 25-55.
- Shapley L.S. (1976), "Non cooperative general exchange" in A.Y. Lin ed., *Theory and measurement of economic externalities*, Academic Press, 155-175.
- Shapley L.S. and M. Shubik (1967), "Concepts and theories of pure competition" in M. Shubik ed., *Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, Princeton U.P., 63-79.
- Shapley L.S. and M. Shubik (1977), "Trade using one commodity as a means of payment", *Journal of Political Economy*, 85, 937-968.
- Shubik M. (1953), "The role of game theory in economics", *Kyklos*, 6, 21-34.
- Stone R. (1948), "The theory of games", *The Economic Journal*, LVIII, 185-201.
- Uzawa H. (1962), "Walras' existence theorem and Brouwer's fixed point theorem", *Economic Studies Quarterly*, 12, 52-60.
- Vickrey W. (1961), "Counter speculation, auctions, and sealed tenders", *Journal of Finance*, XVI, 8-37.
- Ville J. (1938), "Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs", in E. Borel ed., *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, vol 4, Gauthiers-Villars, 105-113.

- von Neumann J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftspiele", *Matematische Annalen*, 100, 295-320.
- von Neumann J. (1937), "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 8, 73-83; traduction (1945), "A model of general economic equilibrium", *Review of Economic Studies*, 13, 1-9.
- von Neumann and O. Morgenstern (1944), *Theory of games and economic behavior*, Princeton U.P. (cité d'après la troisième édition, 1953).
- Wald A. (1935), "Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen (I)", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 6, 12-18.
- Wald A. (1936a), "Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre (II)", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, 1-6.
- Wald A. (1936b), "Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 7, 637-670 ; traduction (1951) "On some system of equations of mathematical economics", *Econometrica*, 19, 368-403.
- Wald A. (1947), "Book review: Theory of games and economic behavior", *The Review of Economic Statistics*, XXIX, 47-52.
- Weintraub E. R. (1983), "On the existence of a competitive equilibrium: 1930-1954", *Journal of Economic Literature*, XXI, 1-39.
- Weintraub E. R. (1992), "Towards a history of Game Theory", Annual supplement to vol.24, *History of Political Economy*, Duke University Press, Durham.
- Wilson R. (1969), "Competitive bidding with asymmetric information", *Management Science*, 13, 816-820.
- Zermelo E. (1913), "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Vol. II, Cambridge U.P., 501-504.