Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Variétés de Prym, conjecture de la trisécante et ensembles d'Andreotti et Mayer

Olivier Debarre

Présentée pour obtenir le grade de docteur ès sciences
Soutenue le 12 juin 1987

Michel Raynaud	Président du jury
Enrico Arbarello	Membre du jury
Arnaud Beauville	Membre du jury
Michel Herman	Membre du jury
Gerald Welters	Membre du jury

Édition française recomposée

À Rebecca

Table des matières

Note sur cette édition iv

Remerciements v

Introduction vii

Résumé ix

I Terminologie et notations 1
- I.1 Généralités . . . 1
- I.2 Courbes . . . 1
- I.3 Variétés abéliennes . . . 3
- I.4 Variétés de Prym . . . 5

II Conjecture de la trisécante, ensembles N_{g-4}^g et variétés de Prym 6
- II.A Introduction . . . 6
  - II.A.1 La conjecture de la trisécante . . . 6
  - II.A.2 Méthodes et résultats . . . 8
- II.B Réductibilité des intersections $\Theta \cdot \Theta_a$ pour les jacobiennes . . . 9
- II.C Une relation entre deux approches du problème de Schottky : une condition nécessaire de réductibilité de $\Theta \cdot \Theta_a$ dans une variété abélienne . . . 14
  - II.C.1 Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ dans $\operatorname{Pic}\Theta$ . . . 15
  - II.C.2 Application au problème de Schottky . . . 20
- II.D Variétés de Prym dans les lieux d'Andreotti–Mayer . . . 25
  - II.D.1 Étude des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$ . . . 27
  - II.D.2 Étude des familles $\mathcal{H}_{g+1,t}$ et de la famille $\mathcal{T}_6$ . . . 40
  - II.D.3 La construction de Recillas et la construction tétragonale de Donagi . . . 42
  - II.D.4 Le mot de la fin . . . 46
- II.E Compléments sur les variétés de Prym éléments de N_{g-4}^g . . . 47
  - II.E.1 Les familles $\overline{\mathcal{E}^2_{t,g-t}}$ . . . 48
  - II.E.2 Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{H}_g^2$ pour $g \geq 5$ . . . 50
  - II.E.3 Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ pour $g \geq 5$ . . . 51
  - II.E.4 Le cas de la dimension 4 . . . 52
- II.F La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym . . . 54
  - II.F.1 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{E}_g^2$, $g \geq 5$ . . . 55
  - II.F.2 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $g \geq 5$ . . . 57
  - II.F.3 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{H}_g^2$, $g \geq 5$ . . . 60

II.F.4 La conjecture de la trisécante en dimension quatre et pour les éléments de $\mathcal{D}^2_{t,g-t}$, $g \geq 5, 2 \leq t \leq g/2$ . . . 62
II.F.5 La conjecture de la trisécante pour H(2;1,g-1), g ≥ 5 . . . 79

III Annulation de thétaconstantes sur les variétés abéliennes de dimension 4 **83**

IV Problème de Schottky pour les variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6} **92**
IV.A Variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6} . . . 92
IV.A.1 Notations, conventions et rappels . . . 93
IV.A.2 Le théorème d'Andreotti et Mayer et son application aux variétés quasi-abéliennes de rang un . . . 93
IV.A.3 Quelques résultats sur les systèmes linéaires sur les courbes . . . 97
IV.A.4 Singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym généralisée . . . 103
IV.A.5 Les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour une variété de Prym . . . 105
IV.A.6 L'exemple fondamental . . . 109
IV.A.7 Le théorème principal . . . 114
IV.B Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym . . . 116
IV.B.1 Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ et plans quadrisécants . . . 116
IV.B.2 Singularités de $\Theta \cap \Theta_a$ . . . 120
IV.B.3 Le cas où a et b sont de torsion . . . 121

Appendices **125**

1 Construction de composantes irréductibles **125**
A1.1 Définition des lieux de décomposition . . . 125
A1.2 Les lieux T et U . . . 126
A1.3 Lieu singulier générique . . . 132
A1.4 Application du théorème d'Andreotti et Mayer . . . 133

2 Variétés abéliennes polarisées de degré deux et variétés de Prym **136**
A2.1 Résultats généraux . . . 136
A2.2 Les ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ . . . 137
A2.3 Les familles $\mathcal{D}^2_{g_1,\dots,g_r}$ . . . 140
A2.4 Les familles $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}$ . . . 144

3 Sous-variétés spéciales des variétés de Prym **145**
A3.1 Sous-variétés spéciales des variétés de Prym . . . 145
A3.2 Intersections de diviseurs thêta dans les variétés de Prym . . . 146

4 Quelques résultats sur les courbes superelliptiques **148**

Bibliographie **152**

Note sur cette édition

Cette recomposition conserve le texte et le contexte historique de la thèse de 1987. Les corrections de notation et de mathématiques, ainsi que les interventions éditoriales, sont détaillées dans le rapport qui accompagne cette édition. Les énoncés historiquement présentés comme des conjectures gardent ce statut dans le récit de l'auteur.

Remerciements

Lorsqu'on avoue exercer la profession de chercheur en mathématiques, on est en général confronté à une réaction d'étonnement, assortie d'un commentaire qui se limite généralement à un « Ah ? » peu enthousiaste.

Rares sont ceux qui poussent plus loin leur enquête : les mathématiques, que tout le monde connaît, ou croit connaître, suscitent plus fréquemment l'indifférence que la curiosité. Leur évocation ramène à la surface des souvenirs enfouis d'additions interminables et d'obscures propriétés du triangle, ou plus récemment de flèches entre formes patatoïdales affublées de noms bizarres. Car si les thèmes abordés et les méthodes d'enseignement ont souvent changé ces dernières années, le résultat est hélas souvent resté le même.

Ceci fait qu'il est bien difficile de communiquer la fascination que peuvent exercer les mathématiques. On se retrouve ainsi victime de la vieille image du savant un peu lunatique perdu dans son monde de symboles mystérieux et le plus souvent incapable de répondre à la simple question : « À quoi ça sert ? ».

S'il est vrai que les mathématiciens sont parfois plus à l'aise dans leurs équations que dans la vie, cette vision des choses ne reflète qu'une partie de la réalité : les mathématiques sont un monde en perpétuelle évolution où l'on est en contact avec des gens souvent prêts à vous consacrer leur temps sans compter et à s'enthousiasmer pour les progrès de leur discipline, des gens passionnés par leur travail.

C'est ainsi que j'ai eu la chance de rencontrer, par ordre chronologique, Daniel Bennequin, dont l'enthousiasme pour les *Principles of Algebraic Geometry* de Phillip Griffiths et Joseph Harris n'a sans doute pas été étranger à mon choix de cette spécialité. Joseph Le Potier m'a ensuite initié à un domaine qui lui est cher : les fibrés vectoriels sur les espaces projectifs. Arnaud Beauville, qui a dirigé cette thèse, a, depuis bientôt huit ans, toujours été disponible pour répondre avec compétence et précision à mes questions. Il a aussi su me proposer des thèmes de recherche passionnants, et abordables… Je le remercie sincèrement de son aide. J'ai ensuite pu, grâce à une bourse de Harvard University, profiter au cours de longues discussions des vastes connaissances de Phillip Griffiths, dont tous ceux qui le connaissent apprécient la gentillesse et la disponibilité. L'école italienne est personnifiée pour moi par Fabrizio Catanese. À l'époque des leçons de cuisine italienne dans sa maison de Princeton, « foreigners never put enough water for pasta », puis au cours de mes séjours à Pise, nous avons décortiqué ensemble les passionnantes propriétés des surfaces de type général avec $K^2 = 2$, $p_g = 1$ et $q = 0$. Je lui exprime ici toute mon amitié. À mon retour des États-Unis, j'ai fait connaissance avec le rude climat du plateau du Moulon au Centre de mathématiques de l'École polytechnique, dirigé par Michel Demazure. L'atmosphère y était heureusement réchauffée par l'entrain de Marie-Jo Lécuyer, qui m'a rendu service à de multiples occasions. J'ai ensuite déménagé au Centre d'Orsay de l'Université Paris-Sud ; si l'architecture est austère, le cadre est agréable et son personnel accueillant. Je remercie tout particulièrement Luc Illusie de m'avoir accepté dans son équipe.

Enrico Arbarello a accepté de venir de Rome pour faire partie du jury de cette thèse, et Gerald Welters, qui m'aide depuis longtemps sans le savoir par la clarté de ses articles, de Barcelone. Je les en remercie tous les deux. Je suis aussi reconnaissant à Michel Herman d'avoir

accepté de diriger ma seconde thèse. Il a su, avec Jean-Christophe Yoccoz, m'expliquer les subtiles propriétés des difféomorphismes du cercle. Merci aussi à Michel Raynaud, qui a accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont enfin à Mesdames Bonnardel et Le Bronnec qui ont, comme on peut le constater en feuilletant cette thèse, réussi brillamment le passage de l'antique machine à écrire au traitement de texte informatique.

Introduction

Une variété abélienne principalement polarisée est un couple (A, Θ), où A est un tore complexe et Θ un diviseur ample sur A, défini à translation près, tel que $H^0(A, O_A(\Theta))$ soit de dimension 1. La variété de Kummer associée est l'image du morphisme défini par les sections globales du faisceau inversible $O_A(2\Theta)$. Elle est donc plongée dans l'espace projectif $\mathbf{P}H^0(A, O_A(2\Theta))^\vee$, de dimension $2^{\dim A} - 1$.

Un exemple de variétés abéliennes principalement polarisées est celui des jacobiennes de courbes lisses projectives. On a remarqué que, dans ce cas, beaucoup de droites de l'espace projectif coupaient la variété de Kummer associée en au moins trois points ; on les appellera des *trisécantes*. Ce phénomène a conduit Mumford à conjecturer que l'existence de suffisamment de trisécantes à la variété de Kummer pourrait caractériser les jacobiennes de courbes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées.

Cette question a suscité de nombreux travaux, dus entre autres à E. Arbarello, C. De Concini, B. A. Dubrovin, R. C. Gunning, Z. Ran, T. Shiota et G. Welters, d'où il ressort en particulier qu'on ne connaît aucune variété abélienne principalement polarisée indécomposable dont la variété de Kummer admette une trisécante et qui ne soit pas une jacobienne de courbe. Ceci a conduit G. Welters à préciser la formulation de Mumford en conjecturant qu'une variété abélienne principalement polarisée *indécomposable* est une jacobienne de courbe si et seulement si la variété de Kummer associée admet une trisécante. La version infinitésimale de ce problème est la conjecture de Novikov, démontrée récemment par T. Shiota. Il est utile de remarquer que l'existence d'une trisécante équivaut à celle d'une inclusion du type

$$\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y,$$

où Θ_a désigne le translaté de Θ par l'élément a de la variété abélienne A et où x, y et a sont distincts non nuls. Ceci entraîne en particulier que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible.

Après un premier chapitre consacré à la terminologie et aux notations, on démontre dans le second la conjecture de la trisécante pour une classe de variétés abéliennes principalement polarisées plus large que celle des jacobiennes : celle des variétés de Prym, attachées à des revêtements doubles de courbes lisses (ou éventuellement stables). En dimension inférieure ou égale à 5, toute variété abélienne principalement polarisée est une variété de Prym : on a donc démontré la conjecture dans ce cas.

Notre démarche est la suivante. Après une brève introduction (II.A), on reprend en II.B, en la simplifiant, la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes, basée sur la détermination des cas où l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible dans une jacobienne.

Dans la partie II.C, écrite en collaboration avec A. Beauville, nous montrons que l'existence d'une trisécante entraîne la condition d'Andreotti et Mayer $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq \dim A - 4$. Ces deux auteurs ont montré en 1963 que la famille des jacobiennes était une composante irréductible de la famille N_{g-4}^g des variétés abéliennes principalement polarisées vérifiant cette condition. On en déduit donc une forme faible de la conjecture de la trisécante, à savoir que les jacobiennes forment une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer admet une trisécante.

On se tourne alors, en II.D et II.E, vers l'étude de la variété N_{g-4}^g. Les travaux de Beauville

permettent de décrire les variétés de Prym qui sont dans N_{g-4}^g. Certaines d'entre elles sont des cas particuliers d'une construction très simple (détaillée dans l'Appendice 1), qui fournit de nouvelles composantes irréductibles de N_{g-4}^g, formées de variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à des produits ; l'étude fine de Sing Θ pour les autres permet de montrer qu'elles forment aussi des composantes de N_{g-4}^g, composées donc de variétés de Prym.

On a alors réuni tous les ingrédients pour montrer, en II.F, la conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym. On procède par récurrence sur la dimension, en s'appuyant pour démarrer sur des travaux de Z. Ran en dimension 4.

Dans le chapitre III, on exploite les résultats de II.D et II.E en dimension 4. Plus précisément, on obtient pour cette dimension des descriptions des sous-variétés de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées où un certain nombre de thêtaconstantes s'annulent. Le fait le plus remarquable est qu'en dehors des jacobiennes hyperelliptiques, il existe une seule variété abélienne principalement polarisée indécomposable de dimension 4 avec 10 thêtaconstantes nulles. Elle avait été découverte par R. Varley. On décrit aussi les variétés abéliennes principalement polarisées qui ont respectivement 2, 3 ou 9 thêtaconstantes nulles.

On passe dans le quatrième et dernier chapitre aux relations entre variétés de Prym, ensembles N_{g-6}^g des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) de dimension g avec $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-6$, et existence d'un plan quadrisécant à la variété de Kummer. On adapte tout d'abord la méthode d'Andreotti et Mayer pour montrer en IV.A que la famille des variétés de Prym est une composante de N_{g-6}^g pour $g \geq 7$. La partie IV.B est le pendant de II.C pour les variétés de Prym. La variété de Kummer d'une variété de Prym n'a pas en général de droite trisécante, mais des plans quadrisécants. Puisqu'on dispose d'un théorème du type Andreotti–Mayer (IV.A), on peut prouver que les variétés de Prym forment une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer admet un plan quadrisécant. On peut noter pour finir que si on ne connaît aucun contre-exemple à la conjecture de la trisécante, on sait construire des variétés abéliennes qui ne sont pas des variétés de Prym, mais dont la variété de Kummer admet néanmoins un plan quadrisécant (elle contient en fait une conique).

Résumé

La conjecture de la trisécante affirme qu'une variété abélienne complexe principalement polarisée indécomposable est la jacobienne d'une courbe algébrique si et seulement si la variété de Kummer associée (c'est-à-dire l'image du morphisme associé au système linéaire des diviseurs linéairement équivalents au double du diviseur thêta), plongée dans l'espace projectif, possède une droite qui la rencontre en au moins trois points. Nous démontrons cette conjecture lorsque la variété abélienne principalement polarisée considérée est une variété de Prym (généralisée). Ceci démontre en particulier la conjecture en dimension inférieure ou égale à 5. Nos techniques fournissent aussi une description de la famille des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 4 dont le diviseur thêta possède un nombre donné de points singuliers d'ordre 2 (les « thêtaconstantes nulles »). En particulier, nous montrons qu'il existe une seule variété abélienne principalement polarisée indécomposable de dimension 4 possédant 10 thêtaconstantes nulles, à l'exception bien sûr des jacobiennes hyperelliptiques. Enfin, nous montrons qu'en dimension au moins 7, les variétés de Prym forment une composante irréductible de la famille des variétés abéliennes principalement polarisées pour lesquelles le lieu singulier du diviseur thêta est de codimension au plus 6. Il en résulte que, toujours en dimension au moins 7, les variétés de Prym forment une composante irréductible de la famille des variétés abéliennes principalement polarisées dont la variété de Kummer possède un plan quadrisécant (résultat obtenu en collaboration avec A. Beauville).

CHAPITRE I

Terminologie et notations

Dans ce chapitre, on se propose de fixer les notations qui seront employées dans la suite de ce travail. On passe aussi en revue les quelques résultats de base relatifs aux courbes algébriques et aux variétés abéliennes dont nous aurons besoin.

I.1 Généralités

1.1. Nous travaillerons uniquement sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, sauf dans la partie II.C, où il est précisé que le corps de base est seulement algébriquement clos. On adoptera la convention qu'un ensemble de dimension < 0 est vide.

1.2. Le lieu singulier d'un schéma X est noté $\operatorname{Sing} X$, le lieu des points de multiplicité n, $\operatorname{Sing}_n X$.

On notera aussi $X^{(d)}$ le produit symétrique de d copies de X, c'est-à-dire le quotient de X^d par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$.

1.3. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur une variété projective X, on notera $h^i(X, \mathcal{F}) = \dim H^i(X, \mathcal{F})$ pour $i \geq 0$.

1.4. Si $\mathcal{F}$ est de plus inversible et si X est réduite, on note $|\mathcal{F}|$ l'ensemble des diviseurs de Cartier effectifs D tels que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{F}$; c'est un ouvert de $\mathbf{P}H^0(X, \mathcal{F})$, qui peut en être distinct si X est réductible.

On peut associer à $\mathcal{F}$ une application rationnelle

$$\phi_{|\mathcal{F}|} \colon X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, \mathcal{F})^\vee, \qquad \phi_{|\mathcal{F}|}(x) = \{s \in H^0(X, \mathcal{F}) \mid s(x) = 0\}.$$

1.5. Si X est un schéma projectif Cohen–Macaulay de type fini sur $\mathbb{C}$, on notera ω_X son faisceau dualisant.

I.2 Courbes

2.1. Une courbe sera pour nous une variété projective réduite C de dimension 1. Son genre est défini par $g(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. On ne considérera que des courbes connexes avec au plus des points doubles comme singularités. La jacobienne JC de C est alors un groupe algébrique lisse commutatif de dimension $g(C)$, extension d'une variété abélienne par un tore, dont les points sont naturellement identifiés aux classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à chaque composante est de degré 0. On supposera toujours choisi un ordre sur l'ensemble des composantes de C. On notera alors $\operatorname{Pic}(C)$ son groupe de Picard et $\operatorname{Pic}^{\boldsymbol{d}}(C)$, où $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur C dont la restriction à la j-ième composante est de degré d_j (c'est-à-dire de multidegré $\boldsymbol{d}$). Le degré total d'un faisceau est $d = \sum_j d_j$.

Le faisceau dualisant de C est un faisceau inversible de degré total $2g(C) - 2$.

2.2. Une courbe stable de genre $g \geq 2$ ([De–M], définition 1.1) est une courbe nodale connexe telle que, sur sa normalisation, chaque composante rationnelle comporte au moins trois points au-dessus des nœuds. En particulier, toute composante rationnelle lisse rencontre les autres composantes en au moins trois points.

Il existe un espace de modules $\overline{M}_g$ pour les courbes stables de genre $g \geq 2$, qui est une variété projective irréductible de dimension $3g-3$. Il contient comme ouvert de Zariski dense l'espace des modules M_g des courbes lisses de genre g. Pour $g = 0, 1$, on dispose des espaces de modules usuels de dimensions respectives $0, 1$; leur compactification ne relève pas des courbes stables non marquées de genre $g \geq 2$.

2.3. Une courbe hyperelliptique est une courbe admettant un morphisme de degré 2 sur $\mathbf{P}^1$.

Une courbe trigonale est une courbe admettant un morphisme de degré 3 sur $\mathbf{P}^1$.

Une courbe superelliptique est, dans la terminologie de cette thèse, une courbe lisse admettant un morphisme de degré 2 sur une courbe elliptique (on dit aussi aujourd'hui *bielliptique*).

2.4. Lorsque C est lisse, $C^{(d)}$ (cf. 1.2) est l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C. On note aussi

$$\begin{aligned} C_d^r &= \{D \in C^{(d)} \mid h^0(C, O_C(D)) \geq r+1\}, \\ W^d &= \{L \in J^d C \mid h^0(C, L) > 0\}, \\ W_d^r &= \{L \in J^d C \mid h^0(C, L) \geq r+1\}. \end{aligned}$$

Le morphisme naturel $C_d^r \to W_d^r$ se restreint au-dessus de $W_d^r \setminus W_d^{r+1}$ en un fibré en espaces projectifs de fibre $\mathbf{P}^r$. En particulier, pour $r = 0$, il induit un isomorphisme

$$C_d^0 \setminus C_d^1 \xrightarrow{\sim} W_d^0 \setminus W_d^1.$$

Il existe sur les W_d^r et C_d^r des structures naturelles de schéma (cf. par exemple [A–C–G–H 1], chapitre IV), pour lesquelles on a :

— Si $L \in W_d^r \setminus W_d^{r+1}$, l'espace tangent

$$T_L W_d^r \subset T_L J^d C \simeq H^0(C, \omega_C)^\vee$$

est l'orthogonal de l'image de l'application naturelle

$$H^0(C, L) \otimes H^0(C, \omega_C \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(C, \omega_C).$$

— Si C est une courbe générale de genre g, W_d^r est de dimension $\rho = g - (r+1)(g-d+r)$, irréductible si $\rho > 0$, lisse en dehors de W_d^{r+1}, Cohen–Macaulay (cf. [A–C–G–H 1], chapitre VII).

2.5. Si p est un point d'une courbe lisse C et Z une sous-variété de $J^d C$, on définit $Z_p \subset J^{d+1} C$ comme l'ensemble $\{L \otimes O_C(p) \mid L \in Z\}$. De même, si $p, q \in C$, on pose $Z_{p,q} = (Z_p)_q$. Si Z est une sous-variété de $C^{(d)}$, on définit aussi

$$Z_p = \{D \in C^{(d+1)} \mid (D - p) \in Z\}.$$

Si D est un diviseur effectif sur C, on notera s_D la section canonique de $O_C(D)$ de diviseur D. Si $p, q \in C$, on écrira s_{pq} au lieu de s_{p+q}.

2.6. Un revêtement double $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ de courbes projectives lisses connexes est un morphisme fini de degré 2. Sa donnée est équivalente à celle de la classe d'un diviseur δ sur C non équivalent à 0 et d'un diviseur lisse $\Delta \in |2\delta|$. On a

$$\begin{aligned} K_{\widetilde{C}} &\equiv \pi^*(K_C + \delta), \\ \pi_* O_{\widetilde{C}} &\simeq O_C \oplus O_C(-\delta), \\ H^i(\widetilde{C}, \pi^* L) &\simeq H^i(C, L) \oplus H^i(C, L \otimes O_C(-\delta)) \qquad (L \in \mathrm{Pic}(C)). \end{aligned}$$

On a un morphisme norme $\mathrm{Nm}_\pi\colon \mathrm{Pic}\,\widetilde{C} \to \mathrm{Pic}\,C$, qui satisfait à

$$\mathrm{Nm}_\pi\, O_{\widetilde{C}}(x) = O_C(\pi x) \qquad (x \in \widetilde{C}).$$

I.3 Variétés abéliennes

3.1. Une variété abélienne est un groupe algébrique complet. On désigne le groupe des points annulés par $n \geq 2$ d'une variété abélienne X par $X[n]$. On notera $\widehat{X} = \mathrm{Pic}^0 X$ le groupe des classes d'isomorphisme des faisceaux inversibles sur X algébriquement équivalents à 0. C'est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de X ([Mu 6], p. 74). À tout morphisme $f\colon X \to Y$, on associe de façon fonctorielle un morphisme dual $\hat{f}\colon \widehat{Y} \to \widehat{X}$.

3.2. Pour tout élément x d'une variété abélienne X, on note τ_x l'automorphisme $z \mapsto z + x$ de X. Pour toute sous-variété Z de X, on notera Z_x la sous-variété $\tau_x(Z)$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on écrira aussi $\mathcal{F}_x = \tau_{-x}^*(\mathcal{F})$.

3.3. Tout faisceau inversible M sur une variété abélienne X définit un morphisme de groupes ([Mu 6], p. 59)

$$\phi_M\colon X \longrightarrow \widehat{X}, \qquad x \longmapsto M_x \otimes M^{-1},$$

dont le noyau est noté $H(M) = \{x \in X \mid M \simeq M_x\}$.

L'ensemble $\mathcal{G}(M) = \{(x, \alpha) \mid x \in X,\ \alpha\colon M \xrightarrow{\sim} M_x\}$ admet une structure de groupe naturelle ([Mu 5], p. 289) pour laquelle on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{G}(M) \xrightarrow{p} H(M) \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

On définit une application bilinéaire alternée par

$$\begin{aligned} e^M\colon H(M) \times H(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_1^{-1} \tilde{x}_2^{-1}, \end{aligned} \qquad p(\tilde{x}_j) = x_j.$$

Par exemple, si $M \in \mathrm{Pic}^0 X$, alors $H(M) = X$ ([Mu 6], p. 74), $\mathcal{G}(M)$ est un groupe commutatif et $e^M \equiv 1$.

À l'opposé, si M est ample, $H(M)$ est fini, le centre de $\mathcal{G}(M)$ est $\mathbb{C}^*$ et e^M est non dégénérée ([Mu 5], théorème 1, p. 293). Il existe une suite d'entiers $\delta = (d_1, \dots, d_k)$, $k \leq g$, $1 < d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k$, appelée type de M, telle que la suite (3.4) soit isomorphe à ([Mu 5], corollaire, p. 294)

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{G}(\delta) \longrightarrow H(\delta) \longrightarrow 0,$$

où

$$\begin{aligned} K(\delta) &= \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, & \widehat{K}(\delta) &= \mathrm{Hom}(K(\delta), \mathbb{C}^*), \\ H(\delta) &= K(\delta) \oplus \widehat{K}(\delta), & \mathcal{G}(\delta) &= \mathbb{C}^* \times K(\delta) \times \widehat{K}(\delta), \end{aligned}$$

avec

$$(\alpha, x, \ell)(\alpha', x', \ell') = (\alpha\alpha'\ell'(x),\ x + x',\ \ell\ell').$$

L'entier $d = d_1 \cdots d_k$ est le degré de M et vérifie, avec $g = \dim X$:

$$h^0(X, M^{\otimes n}) = dn^g, \qquad h^i(X, M^{\otimes n}) = 0 \quad (n > 0,\ i > 0). \tag{3.5}$$

$$M \simeq O_X(D) \quad \Longrightarrow \quad D^g = d\, g!. \tag{3.6}$$

$$d^2 = \#H(M) = \deg \phi_M. \tag{3.7}$$

On notera $\sim$ l'équivalence algébrique entre faisceaux inversibles sur X. Les constructions précédentes, ϕ_M, $H(M)$, e^M et, à isomorphisme près, $\mathcal{G}(M)$, ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de M.

3.8. Si M est ample, les faisceaux inversibles algébriquement équivalents à M sont les translatés M_x, pour $x \in X$. Une polarisation de type δ sur X est une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles amples de type δ. Par abus de langage, on notera encore M la polarisation définie par la classe de M. Une polarisation principale est une polarisation L de degré 1. On notera alors généralement Θ le seul élément de $|L|$ (cf. 3.5), défini donc à translation près.

3.9. Soit ι l'automorphisme $x \mapsto -x$ de X. Un faisceau inversible M sur X est dit symétrique si $\iota^* M \simeq M$. Tout faisceau inversible ample sur X a un translaté symétrique. Toute polarisation sur X est donc la classe d'un faisceau inversible symétrique (non uniquement déterminé).

3.10. Si (X_1, M_1) et (X_2, M_2) sont deux variétés abéliennes polarisées, on notera $M_1 \boxtimes M_2$ la polarisation $\mathrm{pr}_1^* M_1 \otimes \mathrm{pr}_2^* M_2$ sur $X_1 \times X_2$, où $\mathrm{pr}_j \colon X_1 \times X_2 \to X_j$, $j = 1, 2$, sont les deux projections. C'est la polarisation produit de M_1 et de M_2.

Une variété abélienne polarisée est dite irréductible si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles muni de la polarisation produit.

Une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) est irréductible si et seulement si le diviseur Θ est irréductible ([Cl–G]).

3.11. Si (A, Θ) est une variété abélienne principalement polarisée, le système linéaire $|2\Theta|$ est sans point base. Il induit donc un morphisme $\phi_{|2\Theta|} \colon A \to \mathbf{P}^N$, avec $N = 2^{\dim A} - 1$, dont l'image est la variété de Kummer $K(A)$ de (A, Θ). Lorsque (A, Θ) est irréductible, elle est isomorphe au quotient A/ι (cf. 3.9).

3.12. Les variétés abéliennes polarisées de type δ admettent un espace de modules grossier $\mathcal{A}_{g,\delta}$, qui est une variété quasi-projective normale de dimension $g(g+1)/2$. On notera $\mathcal{A}_{g,\delta}^{\mathrm{irr}}$ l'ouvert constitué des variétés irréductibles. Dans le cas d'une polarisation principale, ces espaces seront notés respectivement $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_g^{\mathrm{irr}}$.

L'ensemble $\mathcal{J}_g$ des jacobiennes de courbes lisses de genre g est un fermé de $\mathcal{A}_g^{\mathrm{irr}}$ qui lui est égal pour $g \leq 3$.

On utilisera aussi beaucoup les fermés suivants de $\mathcal{A}_g$, introduits par Andreotti et Mayer dans [An–M] :

$$N_k^g = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid \dim \mathrm{Sing}\, \Theta \geq k\}, \qquad 0 \leq k \leq g - 2.$$

3.13. On pose

$$\mathfrak{H}_g = \{\tau \in M_{g\times g}(\mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0\}.$$

Pour tout type $\delta = (d_1, \dots, d_k)$ (cf. 3.3), on note Δ_δ la matrice diagonale de taille g de diagonale $(1, \dots, 1, d_1, \dots, d_k)$, en complétant par $g-k$ unités.

Toute variété abélienne complexe polarisée de type δ est isomorphe à un tore complexe $\mathbb{C}^g/(\Delta_\delta\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g)$, pour un élément $\tau \in \mathfrak{H}_g$. Le groupe

$$\Gamma_g(\delta) = \left\{ M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^tM \begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

agit sur $\mathfrak{H}_g$ et le quotient est l'espace de modules $\mathcal{A}_{g,\delta}$.

3.14. Les fonctions $\theta[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}](z,\tau)$ sont définies pour $a, b \in \mathbb{R}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathfrak{H}_g$, par

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\bigl(\pi i\bigl[{}^t(n+a)\tau(n+a) + 2{}^t(n+a)(z+b)\bigr]\bigr).$$

Elles satisfont aux équations de la chaleur

$$\frac{\partial^2\theta[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}]}{\partial z_j \partial z_k}(z,\tau) = 2\pi i(1+\delta_{jk})\frac{\partial\theta[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}]}{\partial\tau_{jk}}(z,\tau), \quad 1 \le j,k \le g.$$

La fonction $\theta[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}](z,\tau)$ sera simplement notée $\theta(z,\tau)$; c'est la fonction thêta. Si (X,M) est la variété abélienne polarisée de type δ correspondant à $\tau \in \mathfrak{H}_g$, une base de $H^0(X,M)$ est donnée par

$$\left\{ \theta\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}(\,\cdot\,,\tau) \;\middle|\; r \in \Delta_\delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \right\}.$$

I.4 Variétés de Prym

4.1. Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement étale de degré deux de courbes projectives lisses connexes. Le noyau du morphisme $\mathrm{Nm}_\pi : J\widetilde{C} \to JC$ (cf. 2.6) a deux composantes connexes. La composante neutre P est la variété de Prym associée à π ; la seconde sera notée P^-. La polarisation principale de $J\widetilde{C}$ induit le double d'une polarisation principale sur P, qu'on notera généralement Ξ.

L'espace des modules $\mathcal{R}_{g+1}$ des courbes C lisses de genre $g+1$ munies d'un tel revêtement π est irréductible de dimension $3g$ (pour $g \ge 1$), et on a une application Prym $\mathrm{Pr} : \mathcal{R}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$. On note $\mathcal{P}_g$ l'adhérence de son image.

Beauville a introduit dans [Be 1] la notion de revêtement admissible d'une courbe stable (cf. IV.A.4). Ceci lui permet de prolonger l'application Prym en un morphisme propre $\overline{\mathcal{R}}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$ ($\overline{\mathcal{R}}_{g+1}$ est l'espace de modules de ces revêtements), d'image $\mathcal{P}_g$ contenant $\mathcal{J}_g$. On notera $\mathcal{P}_g^{\mathrm{irr}}$ l'ouvert de $\mathcal{P}_g$ constitué des variétés irréductibles (cf. 3.10).

CHAPITRE II

Conjecture de la trisécante, ensembles N^g_{g-4} et variétés de Prym

II.A Introduction

II.A.1 La conjecture de la trisécante

Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g \geq 2$. On supposera le diviseur Θ symétrique (cf. I.3.9). Le système linéaire $|2\Theta|$ est sans point base et induit un morphisme $\psi\colon A \longrightarrow |2\Theta|^\vee \simeq \mathbb{P}^N$, avec $N = 2^g - 1$ (cf. I.3.5). Par [Mu 2], p. 335, il existe une forme bilinéaire non dégénérée sur $H^0(A,2\Theta)$, qui induit un isomorphisme $B\colon |2\Theta|^\vee \xrightarrow{\sim} |2\Theta|$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & |2\Theta|^\vee \\ & \overset{\psi}{\nearrow} & \big\downarrow B \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & |2\Theta| \end{array} \qquad \varphi(x) = \Theta_x + \Theta_{-x}. \tag{1.1}$$

Lorsque (A,Θ) est irréductible (cf. I.3.10), le morphisme ψ est de degré 2 et son image $K(A)$, la variété de Kummer de A, est isomorphe à $A/\{\pm 1\}$. Cette variété est lisse en dehors des images des points d'ordre 2 de A.

Nous nous intéressons à l'existence de trisécantes à cette variété $K(A)$, c'est-à-dire, au sens le plus naïf, de droites de $\mathbb{P}^N$ coupant $K(A)$ en trois points.

L'origine de ce problème est la suivante. Pour une jacobienne JC de courbe lisse, il existe une famille de dimension 4 de trisécantes à la variété de Kummer $K(JC)$. Il est donc tentant de conjecturer, en suivant Mumford dans [Mu 8], que l'existence de suffisamment de trisécantes à la variété de Kummer caractérise les jacobiennes parmi les variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles. Avant d'indiquer les progrès récents dans cette direction, il est utile de donner une interprétation classique de l'existence d'une trisécante en termes d'intersections du diviseur thêta avec ses translatés.

On se donne donc une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ), supposée irréductible, c'est-à-dire que le diviseur Θ est irréductible. On note θ un générateur de $H^0(A,\Theta)$ et, pour tout élément x de A, Θ_x le translaté de Θ par x (cf. I.3.2) et θ_x un générateur de $H^0(A,\Theta_x)$.

Soient a,b,c,d des éléments non nuls de A tels que $a+b=c+d=x$ et $\{a,b\}\cap\{c,d\}=\emptyset$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1.2) Pour tout $y \in A$ tel que $2y = x$, les trois points $\varphi(y)$, $\varphi(y-a)$ et $\varphi(y-c)$ de $K(A)$ sont collinéaires.

(1.3) Les trois éléments $\theta\theta_x$, $\theta_a\theta_b$ et $\theta_c\theta_d$ de $H^0(A,\Theta+\Theta_x)$ sont linéairement dépendants, de

sorte qu'il existe des complexes non nuls λ, μ, ν tels que

$$\lambda\theta\theta_x + \mu\theta_a\theta_b + \nu\theta_c\theta_d = 0.$$

(1.4) On a une inclusion schématique

$$\Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d.$$

Indiquons rapidement les démonstrations.

(1.2) $\iff$ (1.3). Par (1.1), les points $\psi(y)$, $\psi(y-a)$ et $\psi(y-c)$ de $\mathbb{P}^N$, distincts par hypothèse, sont alignés si et seulement si les éléments $\theta_y\theta_{-y}$, $\theta_{y-a}\theta_{a-y}$ et $\theta_{y-c}\theta_{c-y}$ de $H^0(A, 2\Theta)$ sont linéairement dépendants. On obtient le résultat en translatant par y. Les complexes λ, μ, ν sont non nuls à cause de l'irréductibilité de Θ.

(1.3) $\implies$ (1.4). Évident.

(1.4) $\implies$ (1.3). La restriction de $\theta_c\theta_d$ à $\overline{\Theta}_a = \Theta \cdot \Theta_a$ est donc nulle. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\Theta, O(\Theta_b)) \xrightarrow{\cdot\theta_a} H^0(\Theta, O(\Theta_c + \Theta_d)) \longrightarrow H^0(\overline{\Theta}_a, O(\Theta_c + \Theta_d)).$$

De plus, comme b est non nul, on a

$$H^0(A, O(\Theta_b)) \xrightarrow{\sim} H^0(\Theta, O(\Theta_b)).$$

On en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que la restriction de $\mu\theta_a\theta_b + \theta_c\theta_d$ à Θ soit nulle. On utilise alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(A, O(\Theta_x)) \xrightarrow{\cdot\theta} H^0(A, O(\Theta_x + \Theta)) \longrightarrow H^0(\Theta, O(\Theta_x + \Theta)),$$

pour conclure.

En particulier, l'existence d'une trisécante entraîne qu'il existe une intersection $\Theta \cdot \Theta_a$, avec $a \neq 0$, non intègre. C'est une condition très contraignante sur la variété abélienne (A, Θ) (cf. II.C).

Il est facile de décrire maintenant les trisécantes à la variété de Kummer de la jacobienne (JC, Θ) d'une courbe lisse C. Si x, y sont deux points de C, on notera $x - y$ le point de JC correspondant au faisceau inversible $O_C(x-y)$. Il est facile de voir (cf. II.B) que les intersections $\Theta \cdot \Theta_{x-y}$ ne sont pas intègres et qu'on a

$$\forall x, y, z, t \in C, \qquad \Theta \cdot \Theta_{x-y} \subset \Theta_{x-t} \cup \Theta_{z-y}.$$

On en déduit par (1.2) que, pour tous points x, y, z, t de C et tout $\zeta \in J^{-1}C$ tel que $2\zeta \equiv t - x - y - z$, les points $\psi(\zeta + x)$, $\psi(\zeta + y)$ et $\psi(\zeta + z)$ de $\mathbb{P}^N$ sont alignés.

On montrera en II.B.4 qu'on obtient ainsi toutes les trisécantes à $K(JC) \subset \mathbb{P}^N$.

On peut remarquer que les trois points $\psi(\zeta + x)$, $\psi(\zeta + y)$ et $\psi(\zeta + z)$ sont distincts si et seulement si les quatre points x, y, z, t de C sont distincts deux à deux.

Il est intéressant de regarder ce que devient la trisécante quand certains des points x, y, z, t sont confondus : on obtient des droites de $\mathbb{P}^N$ tangentes en un point à la variété de Kummer et la recoupant en un autre, des droites ayant un contact d'ordre 3 avec $K(JC)$ (droites d'inflexion), ou d'autres cas dégénérés dont la liste est faite en II.C.2.8.

En particulier, il est facile de voir qu'il existe une famille de dimension 2 de droites d'inflexion (cas $x = y = z$).

Enfin, lorsque les quatre points x, y, z, t coïncident, on obtient une « trisécante » en le point singulier $\psi(0)$, dont la description géométrique n'est pas claire. Cependant, cette propriété est équivalente au fait que la fonction $\theta(z, \tau)$ associée à JC (cf. I.3.14) vérifie une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation KP (cf. II.C.2.10). Welters donne une interprétation géométrique de cette équation dans [We 8]. En II.C.2.11, on en donne une conséquence du type (1.4) (cette remarque m'a été communiquée par E. Arbarello, que je remercie). Toutes ces propriétés satisfaites par les jacobiennes de courbes donnent lieu à autant de conjectures cherchant à les caractériser parmi les variétés abéliennes principalement polarisées. Ces questions ont donné lieu à de nombreux travaux, dus entre autres à E. Arbarello, C. De Concini, B. A. Dubrovin, R. C. Gunning, Z. Ran, T. Shiota et G. Welters.

La place d'honneur revient bien sûr au théorème de Shiota (ex-conjecture de Novikov), qui énonce qu'une variété abélienne principalement polarisée irréductible dont la fonction thêta satisfait à l'équation KP est une jacobienne de courbe. La démonstration originale de [Sh] a été simplifiée dans [Ar-D 2] (voir aussi [Ar]).

Viennent ensuite les résultats de Welters, dont on retiendra en particulier : toute variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) sur laquelle il existe une famille de dimension 1 d'éléments a vérifiant la propriété (1.4), et satisfaisant à la condition supplémentaire $\dim \operatorname{Sing} \Theta \leq \dim A - 4$, est une jacobienne de courbe (malgré les apparences, cette dernière condition n'est pas anodine, comme le montre le théorème II.C.2.9). Ce résultat est montré dans [We 6]. On pourra aussi consulter [We 7], qui permet d'aboutir à la même conclusion sans cette condition, mais en supposant qu'on a une famille de dimension 1 de relations du type (1.3) avec a, c fixés. Les cas dégénérés sont aussi traités.

Il est alors tentant de conjecturer, comme l'a fait Welters dans [We 7], que l'existence d'une trisécante caractérise les jacobiennes.

Nous laisserons de côté les cas dégénérés pour énoncer :

Conjecture de la trisécante. *Toute variété abélienne principalement polarisée irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante propre (c'est-à-dire satisfaisant à l'une des conditions équivalentes (1.2), (1.3), (1.4), pour des éléments a, b, c, d non nuls vérifiant $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$) est une jacobienne de courbe.*

II.A.2 Méthodes et résultats

Après avoir examiné en détail la réductibilité des intersections $\Theta \cdot \Theta_a$ sur les jacobiennes dans la partie II.B, on attaque en II.C la conjecture elle-même en montrant (en collaboration avec A. Beauville) que l'existence d'une trisécante, c'est-à-dire l'existence d'une inclusion non triviale $\Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d$ (cf. (1.4)), entraîne l'inégalité

$$\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq \dim A - 4.$$

On en déduit, par [An-M], une version faible de la conjecture, à savoir que la famille des jacobiennes est une composante irréductible de l'ensemble des variétés abéliennes irréductibles dont la variété de Kummer admet une trisécante.

On s'intéresse dans la suite de cette section aux variétés de Prym (cf. I.4) dont la variété de Kummer admet une trisécante. En II.D et II.E, on décrit les variétés de Prym (P, Ξ) satisfaisant à la condition, nécessaire par II.C, $\dim \operatorname{Sing} \Xi \geq \dim P - 4$. On obtient par la même occasion des composantes irréductibles des ensembles d'Andreotti et Mayer N^g_{g-4} (cf. I.3.12), autres que $\overline{J_g}$ (voir aussi l'appendice I).

En II.F, soit en étudiant les éléments a de P satisfaisant à $\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing}\Xi) \geq \dim P - 4$, soit en partant de l'identité (1.4) dans certains cas, on montre la conjecture des trisécantes pour les variétés de Prym généralisées, c'est-à-dire en particulier pour toutes les variétés abéliennes de dimension ≤ 5.

II.B Réductibilité des intersections $\Theta \cdot \Theta_a$ pour les jacobiennes

A. Weil a été le premier à étudier systématiquement, dans l'article [W], la réductibilité des intersections $\Theta \cdot \Theta_a$ pour une jacobienne. [1]

Il y démontrait que, dans la jacobienne d'une courbe lisse C de genre ≥ 5, $\Theta \cdot \Theta_a$ est intègre sauf si $a \in C - C$, c'est-à-dire $a = O_C(p - q)$ pour $p, q \in C$, et dans un cas particulier (cas 2 de notre théorème). Cette caractérisation de la surface $C - C$ dans la jacobienne lui permettait alors de démontrer le théorème de Torelli.

Cette partie est consacrée à une démonstration géométrique élémentaire des résultats de A. Weil, valable en tout genre ≥ 3, qui permet aussi de décrire les composantes de $\Theta \cdot \Theta_a$ dans tous les cas.

On rappelle (cf. chapitre I pour les autres notations) qu'on note par « $\cdot$ » les intersections schématiques. Si C est une courbe lisse de genre g, on note « $-$ » l'involution $L \mapsto \omega_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$, W^d l'image de $C^{(d)} \longrightarrow J^dC$ et, pour $p \in C$, W^d_p l'image de W^d par $L \mapsto L \otimes O_C(p)$.

Notre résultat est :

Théorème II.B.1. *Soient C une courbe projective lisse de genre $g \geq 3$, Θ le diviseur thêta canonique de $J^{g-1}C$, et a un diviseur de degré 0 sur C, non équivalent à zéro. On note $\Theta_a = \Theta + a$. Alors $\Theta \cdot \Theta_a$ est intègre sauf dans les cas suivants :*

1. *Il existe deux points p, q de C tels que $a \equiv p - q$.*
2. *Il existe une courbe elliptique lisse E, un morphisme fini de degré deux $\pi : C \longrightarrow E$ et un diviseur e sur E tels que $a \equiv \pi^* e$.*

Remarque II.B.2. *Dans le premier cas, $\Theta \cdot \Theta_a$ est réunion des espaces irréductibles W^{g-2}_p et $-(W^{g-2}_q)$. En particulier, $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit sauf si C est hyperelliptique et (p, q) est une paire involutive.*

Dans le second cas, $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduit et a en général deux composantes que l'on peut décrire explicitement (remarques 8 et 9), sauf dans un cas particulier au genre trois (remarque 9), où il y a trois composantes.

On peut déduire de ce théorème le théorème de Torelli, de façon analogue à celle employée dans [Ci].

Corollaire II.B.3. *Soient C, C' deux courbes projectives lisses de même genre $g \geq 3$. On suppose qu'il existe un isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées $v : JC \longrightarrow JC'$. Alors il existe un isomorphisme $u : C' \longrightarrow C$ tel que $v = \pm u^*$.*

Démonstration. L'ensemble $Z_C = \{a \in JC \mid \Theta \cdot \Theta_a \text{ n'est pas intègre}\}$ ne dépend pas du diviseur Θ choisi dans JC pour le définir. En particulier,

$$\begin{aligned} v(Z_C) &= \{v(a) \in JC' \mid \Theta \cdot \Theta_a \text{ non intègre}\} \\ &= \{v(a) \in JC' \mid v(\Theta) \cdot v(\Theta)_{v(a)} \text{ non intègre}\} = Z_{C'}. \end{aligned}$$

1. Cette partie a été publiée, avec quelques modifications, sous le titre « Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes » dans *Compositio Mathematica* (référence [D 1]).

Or il découle du théorème que Z_C est la réunion de $C - C$ et, éventuellement, de la ou des courbes elliptiques $\pi^* JE \subset JC$. Comme $C - C$ est de dimension 2 dans JC, on en déduit que, dans tous les cas, $v(C - C) = C' - C'$. Pour $L \in J^{g-1}C$, on définit le diviseur thêta $\Theta_L \subset JC$ par $\Theta_L = \{M \in JC \mid H^0(M \otimes L) \neq 0\}$. On obtient ainsi, pour $H^0(L) \neq 0$, tous les diviseurs thêta passant par 0. Si $h^0(L) > 1$, on a $h^0(L \otimes O_C(p - q)) \geq 1$ pour tous p, q sur C, donc $\Theta_L \supset C - C$. Si par contre $h^0(L) = 1$, alors $h^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = 1$ et, si on note $|L| = \{x_1 + \cdots + x_{g-1}\}$, $|\omega_C \otimes L^{-1}| = \{y_1 + \cdots + y_{g-1}\}$, on a

$$\Theta_L \cap (C - C) = \bigcup_{i=1}^{g-1} [(C - x_i) \cup (y_i - C)].$$

On choisit $L \in J^{g-1}C$ avec $h^0(L) = 1$. Alors $v(\Theta_L \cap (C - C)) = \Theta_{L'} \cap (C' - C')$ est réductible donc, par ce qui précède, réunion de $(g-1)$ translatés de C' et de $(g-1)$ translatés de $(-C')$. On en déduit

$$\exists x \in C, \quad \exists x' \in C', \qquad v(C - x) = \pm(C' - x'),$$

ce qui prouve le corollaire. □

Une autre conséquence est la caractérisation des trisécantes à la variété de Kummer d'une jacobienne de courbe (annoncée en II.A.1).

Corollaire II.B.4. *Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 3$. On suppose qu'il existe trois éléments non nuls a, c, d de JC tels que*

$$\{0, a\} \cap \{c, d\} = \emptyset, \qquad \Theta \cdot \Theta_a \subset \Theta_c \cup \Theta_d.$$

Alors il existe quatre points x, y, z, t de C tels que

$$a = O_C(x - y), \qquad \{c, d\} = \{O_C(x - t), O_C(z - y)\}.$$

Démonstration. Les intersections $\Theta \cdot \Theta_a$, $\Theta \cdot \Theta_c$, $\Theta \cdot \Theta_d$ sont toutes réductibles. On va comparer, à l'aide des remarques 2, 8 et 9, les composantes possibles et montrer que le cas 2 du théorème ne peut se produire pour aucun des éléments a, c, d de JC.

On suppose d'abord $g \geq 4$. Si on est dans le cas 2 du théorème, on note σ l'involution de C associée à π et Z^a_σ, Z_σ les deux composantes de $\Theta \cap \Theta_a$, pour $a \in \pi^* \operatorname{Pic}^0 E$ (cf. remarque 8).

Par le lemme 5, un élément générique L de Z_σ ou Z^a_σ vérifie $h^0(L) = 1$, donc Z_σ, Z^a_σ sont distincts de tous les W^{g-2}_p, $p \in C$. On a $-Z_\sigma = Z_\sigma$, d'où $-Z^a_\sigma = Z^{-a}_\sigma$; donc Z_σ, Z^a_σ sont aussi distincts de tous les $-(W^{g-2}_q)$, $q \in C$.

D'autre part, si on avait $Z_\tau = Z^a_\sigma$ pour une autre involution τ, on aurait, pour $(x_1, \ldots, x_{g-2})$ générique dans C^{g-2}, $O_C(x_1 + \cdots + x_{g-2} + \sigma x_{g-2}) \in Z_\tau$, ce qui est impossible. De même, Z_σ est distinct de Z_τ si σ l'est de τ. On a montré que les W^{g-2}_p, $-(W^{g-2}_q)$, Z_σ, Z_τ, Z^a_σ, Z^b_σ sont distincts pour $\sigma \neq \tau$, $a \neq b$, $g \geq 3$. Ceci permet de conclure pour $g \geq 4$.

Le cas $g = 3$ se traite de façon similaire : les composantes sont du type Z_σ (cas 1 et 2 de la remarque 9) ou Z^a_σ (cas 3). Si a relève du cas 1 de la remarque, de sorte que $\Theta \cdot \Theta_a = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_{\sigma_3}$, deux de ces composantes sont par exemple dans $\Theta \cdot \Theta_c$. Donc c relève aussi du cas 1 et $\Theta \cdot \Theta_c = Z_{\sigma_1} \cup Z_{\sigma_2} \cup Z_\tau$. Les groupes de Galois de $\phi_{|K+a|}$ et $\phi_{|K+c|}$, tous deux engendrés par σ_1, σ_2, sont alors égaux et $K + a \equiv K + c$. Le cas 2 se traite de façon identique ; si a relève du cas 3 de la remarque, Z^a_σ est composante de $\Theta \cdot \Theta_c$, donc c relève aussi de ce cas pour la même involution σ, et $a = c$. □

Démonstration du théorème II.B.1. L'idée de base, due à Weil, est de considérer le système linéaire $|K_C + a|$. Si $a \notin C - C$, il est sans point base, donc définit un morphisme $\phi\colon C \longrightarrow |K + a|^\vee \simeq \mathbb{P}^{g-2}$. Soit $p\colon \Theta \cap \Theta_a \dashrightarrow |K + a|$ l'application rationnelle définie de la façon suivante : pour tout $L \in \Theta \cap \Theta_a$ tel que $h^0(L) = h^0(L - a) = 1$, on a $h^0(K - L + a) = 1$ et on pose, si $|L| = \{D\}$ et $|K - L + a| = \{D'\}$, $p(L) = D + D'$.

Lemme II.B.5. *L'application p est définie sur un ouvert dense de $\Theta \cap \Theta_a$ et sa restriction à chaque composante est dominante. L'intersection $\Theta \cdot \Theta_a$ est réduite.*

Démonstration. Comme $\Theta \cap \Theta_a$ est défini localement par deux équations dans $J^{g-1}C$, chacune de ses composantes est de dimension $g - 2$. Or $\dim(\operatorname{Sing}\Theta \cup \operatorname{Sing}\Theta_a) \leq g - 3$; donc, pour toute composante Z de $\Theta \cap \Theta_a$ et L générique dans Z, L est lisse sur Θ et sur Θ_a, c'est-à-dire $h^0(L) = h^0(L - a) = 1$. L'application p est génériquement finie, donc $p|_Z$ est dominante. Il existe donc $L \in Z$ tel que $p(L)$ se compose de $2g - 2$ points distincts. L'espace tangent $T_L\Theta$ correspond au point $D + D^*$ de $|K| \simeq \mathbb{P}T_L^\vee(JC)$, où $D^* \in |K - L|$, et l'espace $T_L\Theta_a$ à $D' + D'^*$, où $D'^* \in |L - a|$. Comme $a \neq 0$, $D \neq D'^*$ et, par construction, D, D' sont sans point commun. Les espaces $T_L\Theta, T_L\Theta_a$ sont distincts et Z est réduit. □

On se restreint donc à l'étude de l'ensemble $\Theta \cap \Theta_a$, que l'on va décrire de façon géométrique. Son image réciproque par l'application naturelle $C^{(g-1)} \longrightarrow \Theta \subset J^{g-1}C$ est, par Riemann–Roch, le diviseur

$$\overline{W} = \{D \in C^{(g-1)} \mid H^0(K_C + a - D) \neq 0\}.$$

L'espace $\overline{W}$ est donc l'ensemble des $x_1 + \cdots + x_{g-1}$ dans $C^{(g-1)}$ tels que les $(g - 1)$ points $\phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1}$ soient sur un même hyperplan. Plus précisément, soit U l'ouvert de $|K + a|$ des hyperplans de $|K+a|^\vee$ coupant la courbe $\phi(C) = C'$ transversalement en des points au-dessus desquels ϕ est étale. Grâce au lemme précédent, l'étude des composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ se ramène à celle de

$$W = \{x_1 + \cdots + x_{g-1} \in C^{(g-1)} \mid x_i \text{ deux à deux distincts, } \phi \text{ lisse au-dessus des } \phi x_i, \\ \exists H \in U,\ \phi x_i \in H \text{ pour tout } i\}.$$

On note encore $\phi\colon C \longrightarrow C'$ le morphisme induit par ϕ de C sur son image. À cause des formules $2g - 2 = \deg\phi \cdot \deg C'$ et $\deg C' \geq g - 2$, on est dans l'un des cas suivants, que l'on analyse dans cet ordre :

— ϕ est birationnelle ;

— ϕ est de degré 2 ;

— ϕ est de degré 3 et $g = 4$;

— $g = 3$.

(a) ϕ birationnelle. L'espace W, donc aussi l'espace $\Theta \cap \Theta_a$, est irréductible grâce au théorème suivant, tiré de [A-C-G-H 1], dont on reproduit ici la démonstration.

Théorème II.B.6. *Soient C une courbe irréductible de degré d dans $\mathbb{P}^r$ et U l'ouvert de $(\mathbb{P}^r)^\vee$ formé des hyperplans coupant C transversalement. Alors, pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq d$,*

$$I(m) = \{(x_1, \ldots, x_m; H) \in C^m \times U \mid x_i \text{ deux à deux distincts et } x_i \in H\}$$

est irréductible.

Démonstration. La projection $\mathrm{pr}^m : I(m) \longrightarrow U$ est un revêtement étale. On choisit un point base $H_0 \in U$ et on note F_m sa fibre $(\mathrm{pr}^m)^{-1}(H_0)$. L'irréductibilité de $I(m)$ est alors équivalente au fait que $\pi_1(U, H_0)$ opère transitivement sur F_m par monodromie, c'est-à-dire que $\pi_1(U, H_0)$ opère m fois transitivement sur F_1 par la monodromie de $\mathrm{pr}^1 : I(1) \longrightarrow U$. Le théorème sera démontré si on montre que le groupe de Galois G de pr^1 est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, où d est le degré de C. Pour $d = 1$, c'est immédiat ; sinon, cela résulte des deux remarques suivantes :

— G est deux fois transitif : par ce qui précède, c'est équivalent à l'irréductibilité de $I(2)$. Or la projection $\mathrm{pr}_1 : I(2) \longrightarrow C \times C$ est dominante et ses fibres sont des ouverts denses d'espaces projectifs de dimension $r - 2$, donc $I(2)$ est irréductible.

— G contient une transposition : soit H_1 un hyperplan simplement tangent à C en un point, et soit $\{H_t\}_{t\in\mathbb{C}, |t-1|<\varepsilon}$ une famille à un paramètre, transverse au discriminant en H_1, avec $H_t \in U$ pour $t \neq 1$. Alors $H_t \cap C$ contient deux points qui se confondent en le point de tangence de H_1 avec C quand t tend vers 1. Ces deux points sont interchangés quand t tourne autour de 1.

□

Il suffit alors de remarquer que $W \simeq \mathrm{pr}(I(g-1))$, où

$$\mathrm{pr} : C^{g-1} \times U \longrightarrow C^{g-1} \longrightarrow C^{(g-1)}.$$

(b) ϕ est de degré 2. **Lemme II.B.7.** *Si ϕ est de degré 2, ou plus généralement s'il existe une involution σ sur C telle que ϕ se factorise par $\pi : C \longrightarrow C/\sigma$, alors C/σ est une courbe elliptique lisse E et il existe un diviseur e sur E tel que $a \equiv \pi^* e$.*

Démonstration. Au revêtement ramifié $\pi : C \longrightarrow C/\sigma = E$ est associé un élément $\delta \in \mathrm{Pic}\, E$ défini par $\pi_* O_C = O_E \oplus O_E(-\delta)$. Le morphisme ϕ se factorise par π si et seulement s'il existe un diviseur e sur E, de degré 0, tel que

$$a \equiv \pi^* e, \qquad H^0(E, K_E + e) = 0 \quad \text{ou} \quad H^0(E, K_E + \delta + e) = 0.$$

Comme δ est de degré positif ou nul, le théorème de Riemann–Roch donne $g(E) = 0$ ou 1. Comme a n'est pas équivalent à 0, il en est de même pour e, et E n'est pas rationnelle. □

Remarque II.B.8. *Dans le cas où ϕ est de degré 2, les composantes de $\Theta \cap \Theta_a$ sont*

$$\overline{\{O_C(x_1 + \cdots + x_{g-1}) \mid \phi x_1, \ldots, \phi x_{g-1} \text{ distincts, sur un hyperplan de } U\}}$$

et

$$\{O_C(x_1 + \cdots + x_{g-2} + \sigma x_{g-2}) \mid x_i \in C \text{ quelconques}\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le premier ensemble est irréductible. Comme en A3.1.2, on introduit le groupe de Galois G de la projection étale

$$\mathrm{pr} : I = \{(x, H) \in C \times U \mid \phi x \in H\} \longrightarrow U,$$

qui opère sur une fibre $\{a_1^+, \ldots, a_{g-1}^+, a_1^-, \ldots, a_{g-1}^-\}$, où $a_i^+ = \sigma a_i^-$. Il ressort de A3.1.2 qu'il y a au plus deux orbites pour l'action de G sur l'ensemble des $(a^{\varepsilon_1}_{\tau(1)}, \ldots, a^{\varepsilon_{g-1}}_{\tau(g-1)})$, $\varepsilon_j \in \{-1, +1\}$, $\tau \in \mathfrak{S}_{g-1}$: celle de $(a_1^+, \ldots, a_{g-1}^+)$ et celle de $(a_1^+, \ldots, a_{g-2}^+, a_{g-1}^-)$. Comme dans la démonstration

du théorème 6, on considère alors une famille d'hyperplans $\{H_t\}_{t\in\mathbb{C},|t-1|<\varepsilon}$ vérifiant $H_t \in U$ si $t \neq 1$, tandis que H_1 passe par un point de C' au-dessus duquel ϕ est ramifié. Lorsque $t \neq 1$, $\phi^{-1}(H_t \cap C')$ contient deux points qui se confondent en le point de ramification lorsque t tend vers 1. Ceci montre que G contient une transposition (a_i^+, a_i^-) et termine la démonstration de la remarque. □

(c) Cas $g = 4$ et ϕ de degré 3. L'image de ϕ est une conique Q dans $\mathbb{P}^2$. On rappelle que

$$W = \{x_1 + x_2 + x_3 \in C^{(3)} \mid x_i \text{ deux à deux distincts, } \phi \text{ étale sur } \phi^{-1}(\phi x_i),\\ \phi x_1, \phi x_2, \phi x_3 \text{ alignés}\}.$$

Le morphisme $f : C \times C \longrightarrow C^{(3)}$ qui à (x, y) associe $(\phi^{-1}(\phi x) - x) + y$ induit une surjection d'un sous-ensemble dense irréductible de $C \times C$ sur W, ce qui prouve l'irréductibilité de W, donc celle de $\Theta \cap \Theta_a$.

(d) Cas $g = 3$. Le morphisme ϕ est de degré 4 sur $\mathbb{P}^1$, avec lieu de branchement $\Delta \subset \mathbb{P}^1$. On choisit un point base $p_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$, de fibre $F = \phi^{-1}(p_0)$.

Le groupe de Galois G de ϕ, qui est un sous-groupe de $\operatorname{Aut} F \simeq \mathfrak{S}_4$, opère transitivement sur F puisque $C \setminus \phi^{-1}(\Delta)$ est connexe. On rappelle que

$$W = \{x_1 + x_2 \in C^{(2)} \mid x_1 \neq x_2,\ \phi x_1 = \phi x_2 \notin \Delta\}.$$

Les composantes irréductibles de W sont en bijection avec les orbites dans $F^{(2)} \setminus \operatorname{diag}$ sous l'action de G. En particulier, W est irréductible si G est deux fois transitif.

Passons en revue rapidement les sous-groupes G de $\mathfrak{S}_4$ opérant transitivement. On remarque que $|G|$ est alors divisible par 4 :

1. $G \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$. On voit facilement que G ne peut contenir de transposition (sans quoi il ne serait pas transitif) ; donc G est nécessairement le groupe de Klein
$$\{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$
2. $G \simeq \mathbb{Z}/4$. Alors G est conjugué au sous-groupe engendré par $(1\,2\,3\,4)$.
3. G est d'ordre 8. Ces sous-groupes sont les 2-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$, donc sont conjugués, par exemple, au sous-groupe D_4 engendré par $(1\,2\,3\,4)$ et $(1\,3)$.
4. G est d'ordre 12. Alors G est d'indice 2, donc distingué et égal à A_4.

On rappelle enfin que, si $x \in F$ et si G_x est le stabilisateur de x dans G, on a

$$\operatorname{Aut}(C/\mathbb{P}^1) \simeq N_G(G_x)/G_x.$$

Les résultats dont on a besoin sont résumés dans le tableau ci-dessous. Il en ressort que soit W est irréductible, soit le groupe $\operatorname{Aut}(C/\mathbb{P}^1)$ contient un élément d'ordre 2. Ceci, joint au lemme 7, achève la démonstration du théorème.

Remarque II.B.9. *L'étude ci-dessus permet de préciser les composantes irréductibles de $\Theta \cdot \Theta_a$ lorsqu'on est dans le cas 2 du théorème et que $g = 3$. Le revêtement double $\pi : C \longrightarrow C/\sigma = E$ est associé à la donnée de $\delta \in \operatorname{Pic}^2 E$ et de $\Delta \in |2\delta|$, sans point multiple. On note σ' l'involution de E associée au morphisme de degré deux $\phi_{|\delta+e|} : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$, où $a = \pi^* e$, et R la ramification de $\phi_{|\delta+e|}$ sur E. On rappelle que $\phi = \phi_{|\delta+e|} \circ \pi$ (lemme 7). On est alors dans un seul des cas suivants.*

G	*Stabilisateur de* 1	$\mathrm{Aut}(C/\mathbb{P}^1)$	*Orbites dans* $F^{(2)} \setminus \mathrm{diag}$
$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\{\mathrm{id}\}$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	3
$\mathbb{Z}/4$	$\{\mathrm{id}\}$	$\mathbb{Z}/4$	2
D_4	$\langle(2\,4)\rangle$	$\mathbb{Z}/2$	2
A_4	A_3	$\{\mathrm{id}\}$	1
$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_3$	$\{\mathrm{id}\}$	1

Les deux dernières actions sont deux fois transitives.

1. $\Delta = x + y + \sigma' x + \sigma' y$, *où* $x, y \notin \mathrm{Supp}\, R$. *Alors a est d'ordre* 2, *le groupe de Galois G de* ϕ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2)^2$. *Si on note* $G = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, *les trois composantes de* $\Theta \cdot \Theta_a$ *sont*
$$\{O_C(x + \sigma_i x) \mid x \in C\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$
2. $\Delta = R$. *Alors a est d'ordre* 2 *et le groupe de Galois G de* ϕ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/4$. *Les deux composantes de* $\Theta \cdot \Theta_a$ *sont* $\{O_C(x + \sigma x) \mid x \in C\}$ *et* $\{O_C(x + \sigma^2 x) \mid x \in C\}$, *où* σ *engendre G.*
3. *Si* Δ *n'est pas de l'un des types ci-dessus, le groupe de Galois de* ϕ *est isomorphe à* D_4. *Le groupe des automorphismes de C sur* $\mathbb{P}^1$ *est engendré par une involution* σ, *et*
$$\Theta \cdot \Theta_a = \{O_C(x + \sigma x) \mid x \in C\} \cup \{O_C(x_1 + x_2) \mid \pi x_2 = \sigma' \pi x_1\}.$$

II.C Une relation entre deux approches du problème de Schottky : une condition nécessaire de réductibilité de $\Theta \cdot \Theta_a$ dans une variété abélienne

En collaboration avec A. Beauville.[2]

Le problème de Schottky est la question de caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes. Plus précisément, soit A_g l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Les jacobiennes forment une sous-variété J_g de A_g, et il s'agit de trouver des équations de J_g (ou de son adhérence $\overline{J_g}$) dans A_g.

Parmi les approches géométriques de ce problème, deux méthodes se sont révélées particulièrement fructueuses :

1. L'approche d'Andreotti–Mayer, qui utilise les singularités du diviseur Θ. Ces auteurs prouvent que $\overline{J_g}$ est une composante irréductible de la sous-variété N_{g-4} de A_g formée des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) telles que $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g - 4$ [An-M].
2. L'approche basée sur la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$. Elle repose sur l'observation, déjà utilisée par Weil, que pour la jacobienne (JC, Θ) d'une courbe C, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible lorsque a est de la forme $p - q$, avec $p, q \in C$. Plus précisément, pour p, q, r, s distincts dans C, on a $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$.

Ceci conduit à considérer, pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), un certain nombre de conditions qui sont satisfaites lorsque (A, Θ) est une jacobienne :

(i) Il existe un élément non nul $a \in A$ tel que $\Theta \cap \Theta_a$ soit réductible.

(ii) Il existe trois éléments distincts non nuls $a, x, y \in A$ tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

2. Cette partie a été publiée sous le titre « Une relation entre deux approches du problème de Schottky » dans *Inventiones Mathematicae* (référence [Be-D 1]).

(iii) La variété de Kummer de (A,Θ) admet une trisécante.

(iv) La fonction thêta associée à (A,Θ) vérifie une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation KP (voir (2.10) pour une formulation précise).

Ces conditions et leurs relations mutuelles ont été beaucoup étudiées récemment, notamment dans [We 6], [We 7], [Ar-D] (plus exactement, ces auteurs renforcent les conditions (ii) et (iii) en imposant l'existence de familles de dimension un de trisécantes ou de triplets (a,x,y) satisfaisant à (ii)).

Le but de cet article est de mettre en évidence un lien entre les deux approches que nous venons d'évoquer. Nous démontrons en effet que chacune des conditions (ii), (iii), (iv) ci-dessus entraîne la condition d'Andreotti–Mayer $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$. De plus, une variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) qui vérifie (i) satisfait à la condition d'Andreotti–Mayer ou contient une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$. On déduit immédiatement de ces résultats et du théorème d'Andreotti–Mayer que $\overline{J_g}$ est une composante de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées satisfaisant à l'une des conditions (i) à (iv).

La démonstration part du fait que la condition $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) < g-4$ implique que la variété Θ est localement factorielle ; la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ se traduit alors par une décomposition de $\Theta_a|_\Theta$ en somme de diviseurs de Cartier effectifs dans Θ. À cause de l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\Theta)$, l'existence d'une telle décomposition est très contraignante : on montre au §1 qu'elle équivaut à dire que A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$ et $a \in E$. On en déduit au §2 les résultats énoncés ci-dessus.

Nous remercions E. Arbarello de nous avoir signalé que la condition (iv) ci-dessus entraînait une forme de (i) et était donc justiciable de notre méthode.

Notations et conventions. Les variétés que nous considérons sont définies sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque.

(0) Soient V une variété algébrique, $Z \subset V$ une sous-variété et L un faisceau inversible sur V ; supposons donnés un champ de vecteurs X sur V et une section $s \in H^0(V,L)$ s'annulant sur Z. Il existe alors une unique section $Xs \in H^0(Z, L|_Z)$ possédant la propriété suivante : pour tout ouvert $U \subset V$ et tout isomorphisme $\lambda : O_U \longrightarrow L|_U$, on a

$$Xs = \lambda(X\lambda^{-1}(s))|_Z \qquad \text{dans } Z \cap U.$$

Soit maintenant (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit $\theta \in H^0(A,\Theta)$ une section de diviseur Θ. On déduit de ce qui précède un homomorphisme

$$\tau : H^0(A, T_A) \longrightarrow H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta)), \qquad \tau(X) = X\theta.$$

Via l'identification $T_0(A) = H^0(A,T_A)$, on associe ainsi à tout vecteur non nul $a \in T_0(A)$ une section de $H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta))$; par abus de langage, on notera $\Theta \cap \Theta_a$ le schéma des zéros de cette section dans Θ.

Si a est un élément non nul de A ou de $T_0(A)$, la sous-variété $\Theta \cap \Theta_a$ définit un diviseur de Cartier de Θ, que l'on notera $\Theta \cdot \Theta_a$.

II.C.1 Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ dans $\mathrm{Pic}\,\Theta$

(1.0) Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit $E \subset A$ une sous-variété abélienne. Notons K le noyau de l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\varphi_\Theta} \widehat{A} \longrightarrow \hat{E}$; c'est une sous-variété abélienne de A, qui s'identifie à $\widehat{A/E}$. Soit $\pi : E \times K \longrightarrow A$ l'isogénie définie

par $\pi(e,k) = e + k$. Notons Θ_E, Θ_K les restrictions de Θ à E, K respectivement. On déduit du théorème du carré la relation

$$\pi^*\Theta \equiv \mathrm{pr}_1^*\,\Theta_E + \mathrm{pr}_2^*\,\Theta_K;$$

l'image réciproque sur $E \times K$ de la polarisation de A est donc la polarisation produit. On a

$$H(\Theta_E) = H(\Theta_K) = E \cap K,$$

tandis que $\ker \pi$ est l'ensemble des éléments $(e,-e)$ pour $e \in E \cap K$. Les polarisations induites Θ_E, Θ_K ont donc même degré d. Le lemme suivant, démontré en A1.1.1, résulte facilement de la théorie des groupes thêta de Mumford :

Lemme II.C.1.1. *Soit θ une section non nulle de $H^0(A,\Theta)$. Il existe des bases $(s_1,\dots,s_d)$ et $(t_1,\dots,t_d)$ de $H^0(E,\Theta_E)$ et $H^0(K,\Theta_K)$ respectivement telles que*

$$\pi^*\theta = \sum_{i=1}^{d} s_i \otimes t_i.$$

(1.2) Le cas $\dim E = 1$ jouera un rôle particulier dans la suite. Posons $(\Theta \cdot E) = d$; alors la polarisation induite sur E est la polarisation de degré d. Le groupe $E \cap K$ est le groupe des points de d-torsion $E[d]$; le noyau de π est donc isomorphe à $E[d]$ comme groupe fini, ou comme groupe fini en schémas en caractéristique positive. Si $\mathrm{char}\, k \nmid d$, il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d)^2$.

Si, par exemple, (A,Θ) est la jacobienne d'une courbe C, on déduit du plongement $C \hookrightarrow JC$ et de l'homomorphisme $A \longrightarrow \hat{E} = E$ un morphisme $r\colon C \longrightarrow E$; on a $(C \cdot K) = \deg r = d$. Inversement, si E est une courbe elliptique et $r\colon C \longrightarrow E$ un morphisme de degré d, on déduit de r un homomorphisme, non nécessairement injectif, $\bar{r}\colon E \longrightarrow JC$, et on a $\deg(\bar{r}^*\Theta) = d$.

Proposition II.C.1.3. *Supposons $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Soient (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée et $E \subset A$ une sous-variété abélienne telle que la polarisation induite Θ_E soit de degré 2. Soit e un élément non nul de E ou de $T_0(E)$. Il existe alors des diviseurs de Weil effectifs non nuls C, C' dans Θ tels que $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$. Si de plus $\dim E = 1$, C, C' sont des diviseurs de Cartier dans Θ.*

La notation $\Theta \cdot \Theta_e$ est expliquée au début de cette section en (0).

Démonstration. Traitons d'abord le cas $e \in E$. Nous utilisons les notations de (1.0). D'après le lemme 1.1, il existe des bases (s_1,s_2) de $H^0(E,\Theta_E)$ et (t_1,t_2) de $H^0(K,\Theta_K)$ telles que $\pi^*\Theta$ soit le diviseur de la section $(x,y) \mapsto s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y)$. La sous-variété $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est définie dans $E \times K$ par

$$\begin{cases} s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y) = 0, \\ s_1(x-e)t_1(y) + s_2(x-e)t_2(y) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Elle est donc réunion des sous-variétés de codimension 2

— $\widetilde{C} = E \times B$, où B est le lieu fixe de $|\Theta_K|$, défini par $t_1 = t_2 = 0$;

— $\widetilde{C}'$ définie par (*) et $s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0$.

Ces sous-variétés sont stables par $\ker \pi$; il existe donc des diviseurs de Weil effectifs C, C' dans Θ tels que $\widetilde{C} = \pi^*C$, $\widetilde{C}' = \pi^*C'$ et $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$.

Supposons maintenant $\dim E = 1$. L'équation $s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0$ définit un diviseur $\sum_i \varepsilon_i$ sur E, linéairement équivalent à $\Theta_E + (\Theta_E)_e$, donc de degré 4. On a $\widetilde{C}' =$

$\sum_{i=1}^4 \{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$, où Δ_i est le diviseur de la section $s_1(\varepsilon_i)t_1 + s_2(\varepsilon_i)t_2$ de $H^0(K, \Theta_K)$. Ainsi $\widetilde{C}'$ est l'image réciproque, par la projection $\pi^{-1}(\Theta) \longrightarrow E$, du diviseur $\sum_i \varepsilon_i$; c'est donc un diviseur de Cartier dans $\pi^{-1}(\Theta)$. Par suite C' est un diviseur de Cartier dans Θ, et il en est de même de $C = \Theta \cdot \Theta_e - C'$.

Le cas où e est un vecteur tangent à E se traite de façon identique : la seconde équation de (*) est remplacée par

$$s_1'(x)t_1(y) + s_2'(x)t_2(y) = 0,$$

où le signe $'$ indique la dérivation par rapport à un paramètre local. Alors $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est réunion de $\widetilde{C} = E \times B$ et de $\widetilde{C}'$ définie par les équations (*) ainsi modifiées et $s_1(x)s_2'(x) - s_2(x)s_1'(x) = 0$. On en déduit comme ci-dessus la décomposition $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$. Si $\dim E = 1$, C est un diviseur de Cartier dans Θ d'après le cas précédent, et il en est donc de même de C'. □

(1.4) Précisons la structure de $\Theta \cdot \Theta_e$ lorsque $\dim E = 1$.[3] Désignons par $s\colon E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme $x \mapsto (s_1(x), s_2(x))$. L'équation $s_1(x)s_2(x-e) - s_2(x)s_1(x-e) = 0$ (respectivement $s_1(x)s_2'(x) - s_2(x)s_1'(x) = 0$) s'écrit $s(x) = s(x-e)$ (respectivement $s'(x) = 0$), soit $[x] + [x-e] \equiv \Theta_E$ (respectivement $2[x] \equiv \Theta_E$). Si $\Theta_E \equiv [0] + [f]$, avec $f \in E$, cette équation équivaut à $2x = e + f$ (respectivement $2x = f$). Ainsi les points $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ sont permutés par l'action de E_2. Par suite, les sous-variétés $\{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$ de $\widetilde{C}'$ sont permutées par $\ker \pi$. Posant $\varepsilon = \varepsilon_1, \Delta = \Delta_1$, on a donc

$$C' = \pi(\{\varepsilon\} \times \Delta) = \Delta_\varepsilon, \qquad \Theta \cdot \Theta_e = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon.$$

(1.5) Avant d'énoncer la réciproque de la proposition 1.3, rappelons les résultats de Mumford et Kempf [Mu 9] sur la cohomologie des faisceaux inversibles sur une variété abélienne A. Un faisceau inversible L sur A est dit *non dégénéré* si le groupe $H(L)$ (I.3.3) est fini. Il existe dans ce cas un unique entier i tel que $H^i(A, L) \neq 0$: c'est l'indice de L, noté $i(L)$.

Soit maintenant L un faisceau inversible quelconque sur A ; notons K la composante neutre de $H(L)$ et $p\colon A \longrightarrow A/K$ la projection canonique. Il existe alors un faisceau inversible non dégénéré M sur A/K, bien défini à translation près, tel que L soit algébriquement équivalent à p^*M. On pose

$$i_-(L) = i(M), \qquad i_+(L) = i(M) + \dim K.$$

Si la cohomologie de L n'est pas nulle, on peut choisir M de façon que $L = p^*M$. On a alors pour tout entier i un isomorphisme canonique

$$H^i(A, L) \xrightarrow{\sim} H^{i(M)}(A/K, M) \otimes H^{i-i(M)}(K, \mathcal{O}_K).$$

En particulier,

$$H^i(A, L) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i_-(L) \leq i \leq i_+(L).$$

Il résulte de la définition que $i_-(L), i_+(L)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L. Par ailleurs, si L, L' sont deux faisceaux inversibles sur A, on a $i_-(L \otimes L') \leq i_-(L) + i_-(L')$. En effet, le raisonnement de [Mu 6], p. 159, step C, qui établit cette inégalité dans le cas où L, L' sont non dégénérés, s'étend immédiatement au cas général.

(1.6) La proposition 1.3 admet la réciproque suivante. Nous écarterons le cas des variétés produits, pour lesquelles le diviseur Θ lui-même est réductible. Nous dirons qu'une variété

3. Note éditoriale : la description suivante par permutation de quatre points géométriques suppose $\mathrm{char}\, k \neq 2$. En caractéristique 2, les fibres de [2] ont longueur 4 mais ne sont pas étales ; une justification en termes de groupes en schémas et de descente est nécessaire et n'est pas fournie par cet argument sur les points.

abélienne polarisée est *irréductible* si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non triviales.

Proposition II.C.1.7. *Supposons* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Soit* (A, Θ) *une variété abélienne principalement polarisée irréductible, de dimension* ≥ 4. *On suppose qu'il existe un élément non nul* a *de* A (*respectivement de* $T_0(A)$) *et des diviseurs de Cartier effectifs non nuls* C, C' *dans* Θ *tels que* $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$. *Alors* A *contient une courbe elliptique* E *telle que* $(\Theta \cdot E) = 2$, *et* $a \in E$ (*respectivement* $a \in T_0(E)$).

Démonstration. Traitons d'abord le cas $a \in A$. D'après le théorème de Lefschetz, version Grothendieck [Gro 3, Exp. XII, cor. 3.6],[4] il existe des diviseurs D, D' sur A tels que $D|_\Theta \equiv C$, $D'|_\Theta \equiv C'$, $D + D' \equiv \Theta_a$. Considérons la suite exacte de cohomologie associée à

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(D - \Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_A(D) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(C) \longrightarrow 0.$$

Puisque C est effectif, l'un des espaces $H^0(A, D)$ ou $H^1(A, D - \Theta)$ n'est pas nul. On a la même alternative pour D'.

Si $H^0(A, D), H^0(A, D')$ sont non nuls, Θ_a est réductible, ce qui contredit l'hypothèse. Si ces deux espaces sont nuls, on a $i_-(D-\Theta) \leq 1$ et $i_-(D'-\Theta) \leq 1$ par (1.5) ; mais $\mathcal{O}_A(D+D'-2\Theta) = \mathcal{O}_A(\Theta_{-a})^{-1}$ est un faisceau non dégénéré d'indice $g \geq 4$, ce qui contredit $i_-(D + D' - 2\Theta) \leq i_-(D - \Theta) + i_-(D' - \Theta)$ (1.5).

Nous supposerons donc désormais que $H^1(A, D' - \Theta) \neq 0$, tandis que $H^1(A, D - \Theta) = 0$; on peut alors supposer D effectif, de restriction à Θ égale à C. Par dualité, $H^{g-1}(A, \Theta - D') \neq 0$, ou encore, en notant $\hat{a}$ le diviseur algébriquement équivalent à zéro $\Theta_a - \Theta$, $H^{g-1}(A, D - \hat{a}) \neq 0$. On déduit de (1.5)

$$i_-(D) = i_-(D - \hat{a}) = 0, \qquad i_+(D) = i_+(D - \hat{a}) = g - 1.$$

Posons $K = H(D)^0 = H(D - \hat{a})^0$, $E = A/K$, et notons $p \colon A \longrightarrow E$ l'homomorphisme canonique. On a $\dim K = i_+(D) - i_-(D) = g - 1$ et $\dim E = 1$; il existe des diviseurs $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ sur E tels que $D = p^*\mathfrak{d}$ et $\hat{a} = p^*\mathfrak{e}$. Identifions E à une sous-variété abélienne de A à l'aide de l'homomorphisme $\hat{p}$ et des polarisations principales sur A, E ; le diviseur de degré zéro $\mathfrak{e}$ sur E correspond à un point $e \in E$, et l'égalité $\hat{a} = p^*\mathfrak{e}$ s'écrit simplement $a = e$, d'où $a \in E$. Nous sommes maintenant dans la situation de (1.0), dont nous reprenons les notations. Déterminons le degré d des polarisations induites Θ_E, Θ_K. Soit θ un élément non nul de $H^0(A, \Theta)$. Sur $E \times K$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathcal{O}_A(D' - \Theta) \xrightarrow{\pi^*\theta} \pi^*\mathcal{O}_A(D') \longrightarrow \pi^*\mathcal{O}_\Theta(C') \longrightarrow 0.$$

Aucun diviseur algébriquement équivalent à D' n'est effectif, sans quoi Θ serait réductible ; on a donc $H^0(E \times K, \pi^*\mathcal{O}_A(D')) = 0$. Puisque C' est effectif, l'application

$$H^1(\pi^*\theta) \colon H^1(E \times K, \pi^*\mathcal{O}_A(D' - \Theta)) \longrightarrow H^1(E \times K, \pi^*\mathcal{O}_A(D'))$$

n'est pas injective.

Notons φ la restriction à E de $p \colon A \longrightarrow E$; c'est la multiplication par d. Posons $\Delta = \varphi^*(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})$. On a

$$\pi^*(D' - \Theta) \equiv \pi^*(\hat{a} - D) \equiv \pi^*p^*(\mathfrak{e} - \mathfrak{d}) = -\operatorname{pr}_1^*\Delta.$$

4. L'annulation de $H^i(\Theta, -n\Theta)$ pour $i = 1, 2$ et $n \geq 1$, nécessaire pour appliquer ce résultat, résulte immédiatement de $H^i(A, -n\Theta) = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$, puisque $\dim A \geq 4$.

On obtient les isomorphismes

$$\begin{aligned} H^1(E\times K, \pi^*O_A(D'-\Theta)) &= H^1(E\times K, -\operatorname{pr}_1^*\Delta) \simeq H^1(E,-\Delta),\\ H^1(E\times K, \pi^*O_A(D')) &= H^1(E\times K, \operatorname{pr}_1^*(\Theta_E-\Delta)+\operatorname{pr}_2^*\Theta_K)\\ &\simeq H^1(E,\Theta_E-\Delta)\otimes H^0(K,\Theta_K). \end{aligned}$$

Choisissons comme en (1.1) des bases (s_i) et (t_i) telles que $\pi^*\theta = \sum_i s_i\otimes t_i$. L'application $H^1(\pi^*\theta)$ s'identifie à

$$\begin{aligned} u\colon H^1(E,-\Delta) &\longrightarrow H^1(E,\Theta_E-\Delta)\otimes H^0(K,\Theta_K),\\ x &\longmapsto \sum_i (s_i\cdot x)\otimes t_i. \end{aligned}$$

Ainsi $u(x)=0$ si et seulement si $s\cdot x = 0$ pour tout $s\in H^0(E,\Theta_E)$. Par dualité, cela signifie que l'image de l'application de multiplication

$$v\colon H^0(E,\Delta-\Theta_E)\otimes H^0(E,\Theta_E)\longrightarrow H^0(E,\Delta)$$

est contenue dans le noyau de x, considéré comme forme linéaire sur $H^0(E,\Delta)$. Par conséquent, u est injective si et seulement si v est surjective. Or on a

$$\deg\Theta_E = d, \qquad \deg\Delta = d^2\deg\mathfrak{d}\geq d^2, \qquad \deg(\Delta-\Theta_E)\geq d^2-d.$$

Puisque (A,Θ) est irréductible, $d\geq 2$. Pour deux faisceaux inversibles L,M de degrés au moins 3 sur une courbe elliptique, la multiplication $H^0(L)\otimes H^0(M)\longrightarrow H^0(L\otimes M)$ est surjective [Mu 9, th. 6]. Il s'ensuit que $d=2$, ce qui démontre le premier cas.

Traitons maintenant le cas où $a\in T_0(A)$. Le raisonnement précédent, avec a remplacé par 0, fournit une courbe elliptique E telle que $\deg\Theta_E=2$, et une isogénie $\pi\colon E\times K\longrightarrow A$. Il reste à montrer que a est tangent à E. Prolongeons a en un champ de vecteurs invariant, encore noté a. Considérons les applications

$$H^0(A,T_A)\xrightarrow{\tau} H^0(\Theta,O_\Theta(\Theta))\xrightarrow{\partial} H^1(A,O_A),$$

où τ a été définie en (0) et ∂ est le bord de la suite exacte

$$0\longrightarrow O_A\longrightarrow O_A(\Theta)\longrightarrow O_\Theta(\Theta)\longrightarrow 0.$$

D'après [Gr 1, 2.10], $\partial\tau$ est le cup-produit par $c_1(\Theta)\in H^1(A,\Omega^1_A)$. Puisque $\pi^*\Theta\equiv \operatorname{pr}_1^*\Theta_E+\operatorname{pr}_2^*\Theta_K$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(A,T_A) & \xrightarrow{\quad c_1(\Theta)\quad} & H^1(A,O_A)\\ \downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle H^1(\pi)}\\ H^0(E,T_E)\oplus H^0(K,T_K) & \xrightarrow[c_1(\Theta_E)\oplus c_1(\Theta_K)]{} & H^1(E,O_E)\oplus H^1(K,O_K). \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que l'image de $\partial\tau(a)$ par l'isomorphisme canonique $H^1(\pi)$ appartient à $H^1(E,O_E)$.

Soit $t\in H^0(A,D)$ une section de diviseur D, $\bar t$ sa restriction à Θ, et $t'\in H^0(\Theta,C')$ une section de diviseur C'. Quitte à multiplier t par une constante, on a $\bar t\, t' = \tau(a)$. On dispose du diagramme exact

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & O_A(-D) & \to & O_A(\Theta-D) & \to & O_\Theta(C') & \to & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle \bar t} & & \\ 0 & \longrightarrow & O_A & \longrightarrow & O_A(\Theta) & \longrightarrow & O_\Theta(\Theta) & \to & 0. \end{array}$$

Ce diagramme induit le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Theta, O_\Theta(C')) & \longrightarrow & H^1(A, O_A(-D)) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\imath}} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta)) & \xrightarrow[\partial]{} & H^1(A, O_A). \end{array}$$

Ainsi $\partial\tau(a)$ appartient à l'image de

$$H^1(A, O_A(-D)) \xrightarrow{t} H^1(A, O_A).$$

Or $D \equiv p^*\mathfrak{d}$, et les applications

$$p^* : H^0(E, \mathfrak{d}) \longrightarrow H^0(A, D), \qquad p^* : H^1(E, -\mathfrak{d}) \longrightarrow H^1(A, -D)$$

sont des isomorphismes par (1.5). Soit $u \in H^0(E, \mathfrak{d})$ tel que $p^*u = t$. L'application précédente s'identifie alors à

$$H^1(E, O_E(-\mathfrak{d})) \xrightarrow{(2u,0)} H^1(E, O_E) \oplus H^1(K, O_K),$$

ce qui démontre l'assertion. □

II.C.2 Application au problème de Schottky

Théorème II.C.2.1. *Supposons* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Soit* (A, Θ) *une variété abélienne principalement polarisée de dimension* g. *S'il existe un élément non nul* a *de* A (*respectivement de* $T_0(A)$) *tel que* $\Theta \cdot \Theta_a$ *ne soit pas intègre, alors l'une des conclusions suivantes est vérifiée :*

1. $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$;
2. *A contient une courbe elliptique* E *telle que* $(\Theta \cdot E) = 2$ *et* $a \in E$ (*respectivement* $a \in T_0(E)$).

Démonstration. Écrivons $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$, où C, C' sont des diviseurs de Weil effectifs non nuls. Supposons $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g - 4$. Les anneaux locaux de Θ sont alors réguliers en codimension au plus 3 et, d'après le théorème de Grothendieck (« conjecture de Samuel », [Gro 3, Exp. XI, cor. 3.14]), factoriels. Ainsi C, C' sont des diviseurs de Cartier et le théorème résulte de la proposition 1.7. □

Remarques II.C.2.2.

1. *On peut remplacer la conclusion* (i) *par l'assertion plus forte suivante : pour toute décomposition* $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$ *en cycles effectifs non nuls,*

$$\dim(C \cap C' \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq g - 4.$$

   Comme pour (i), *cette assertion est l'alternative au cas* (ii). *En effet, posons* $Z = C \cap C' \cap \operatorname{Sing} \Theta$. *Sur* $\Theta \setminus Z$, *les diviseurs* C, C' *sont de Cartier ; pour les prolonger, il suffit que les anneaux locaux de* Θ *aux points de* Z *soient parafactoriels* [Gro 3, Exp. XI, no 3]. *Si* $\dim Z \leq g - 5$, *c'est une conséquence du théorème 3.13* (ii) *de loc. cit. En particulier, si* $\dim \operatorname{Sing} \Theta = g - 4$ *et que le cas* (ii) *est exclu,* $C \cap C'$ *contient une composante de* $\operatorname{Sing} \Theta$.

2. *La réciproque de* (ii) *résulte de la proposition 1.3. La partie II.D décrit les composantes de* N_{g-4} *connues à ce jour : outre* $\overline{J_g}$, *toutes sauf une correspondent à des variétés abéliennes principalement polarisées contenant une sous-variété abélienne sur laquelle la polarisation induite est de degré* 2. *De telles intersections sont donc réductibles.*

3. *On démontre dans l'appendice A1 que le diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisée générique satisfaisant (ii) est lisse. On ne peut donc supprimer (ii). En revanche, s'il existe une sous-variété abélienne E avec $1 < \dim E < g-1$ sur laquelle la polarisation induite est de degré 2, alors* $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-4$ (*A1.1.5*).

Théorème II.C.2.3. *Supposons* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. S'il existe des éléments distincts non nuls a, x, y de A tels que $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$, alors* $\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq g-4$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $\Theta \cdot \Theta_a$ n'est pas intègre. D'après la remarque 2.2.1, il suffit d'éliminer le cas (ii) du théorème 2.1. Supposons donc qu'on soit dans ce cas et que $\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \leq g-5$. Il existe une isogénie $\pi : E \times K \longrightarrow A$ de degré 4 et, avec les notations de (1.4),

$$\Theta \cdot \Theta_a = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon,$$

où B est le lieu de base de $|\Theta_K|$, $\Delta \in |\Theta_K|$ et $\varepsilon \in E$. Si l'équation de $\pi^*\Theta$ est $s_1(x)t_1(y) + s_2(x)t_2(y) = 0$, alors

$$B : \ t_1 = t_2 = 0, \qquad \Delta : \ s_1(\varepsilon)t_1 + s_2(\varepsilon)t_2 = 0,$$

et $s_1(\varepsilon)s_2(\varepsilon - a) - s_2(\varepsilon)s_1(\varepsilon - a) = 0$.

Lemme II.C.2.4. *Les sous-variétés B et Δ sont irréductibles.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'elles sont lisses en codimension 1. Soit Δ' le diviseur de la section $s_1'(\varepsilon)t_1 + s_2'(\varepsilon)t_2$ de $H^0(K, \Theta_K)$. Pour $y \in \Delta' \cap \operatorname{Sing} \Delta$, le critère jacobien montre que $\varepsilon + y$ est un point singulier de Θ, appartenant aussi à Θ_a. Par suite,

$$\dim \operatorname{Sing} \Delta - 1 \leq \dim(\Delta' \cap \operatorname{Sing} \Delta) \leq \dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \leq g-5.$$

On raisonne de même pour B. □

(2.5) Reprenons la démonstration du théorème 2.3. Puisque Δ_ε est irréductible, on peut supposer $\Delta_\varepsilon \subset \Theta_x$. Écrivons $x = \pi(e, k)$. On a alors

$$s_1(\varepsilon - e)t_1(y - k) + s_2(\varepsilon - e)t_2(y - k) = 0 \qquad (y \in \Delta).$$

Cette équation est non triviale puisque s_1, s_2 ne s'annulent pas simultanément. Elle implique $\Delta_k \equiv \Delta$, donc $k \in H(\Theta_K) = E \cap K$, d'où $x \in E$. Par conséquent,

$$(s_1(\varepsilon - x) : s_2(\varepsilon - x)) = (s_1(\varepsilon) : s_2(\varepsilon)) \in \mathbb{P}^1.$$

Le morphisme $s : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est de degré 2 et l'on sait déjà que $s(\varepsilon - a) = s(\varepsilon)$. Il s'ensuit que $x = 0$ ou $x = a$, contrairement à l'hypothèse. □ Le théorème 2.3 s'étend au cas où certains des points a, x, y sont infiniment proches de 0. Pour l'énoncer commodément, introduisons la variété $\widetilde{A}$ obtenue en éclatant 0 dans A : ses points sont les points non nuls de A et les directions tangentes à l'origine.

Proposition II.C.2.6. *Sous l'hypothèse* $\operatorname{char} k \neq 2$, *soient a, x, y trois points distincts de $\widetilde{A}$. La relation*

$$\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_x) \cup (\Theta \cap \Theta_y)$$

entraîne $\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq g-4$.

Démonstration. On arrive comme précédemment à $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$. Si x est un point de A et a une direction tangente à l'origine, on obtient $s(\varepsilon - x) = s(\varepsilon)$, alors que ε est un point de ramification de s, d'où une contradiction.

Supposons donc que x soit une direction tangente à l'origine, correspondant à un vecteur $e + k$, avec $e \in T_0(E)$ et $k \in T_0(K)$. Notons $\partial/\partial e$ et $\partial/\partial k$ les champs de vecteurs associés. La condition $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$ se traduit par

$$\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon)t_1(y) + \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)t_2(y) + s_1(\varepsilon)\frac{\partial t_1}{\partial k}(y) + s_2(\varepsilon)\frac{\partial t_2}{\partial k}(y) = 0 \quad (y \in \Delta).$$

Posons $t = s_1(\varepsilon)t_1 + s_2(\varepsilon)t_2 \in H^0(K, \Theta_K)$. Soit t' une section non proportionnelle à t, et soit $(\partial_1, \dots, \partial_{g-1})$ une base de $H^0(K, T_K)$. L'argument de [Gr, p. 92–93] montre que les images de $t', \partial_1 t, \dots, \partial_{g-1} t$ forment une base de $H^0(\Delta, O_\Delta(\Delta))$. L'équation précédente donne $k = 0$ et

$$\left(\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon) : \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)\right) = (s_1(\varepsilon) : s_2(\varepsilon)).$$

Ainsi ε est un point de ramification de s, ce qui n'est possible que si a est la direction tangente à E en 0. On conclut $a = x$, contrairement à l'hypothèse. □

(2.7) On peut prouver de même des variantes du théorème 2.3. Soient par exemple $a \in A$ et $v \in T_0(A)$ non nuls. Alors

$$\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_a \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4.$$

En effet, si la conclusion n'est pas satisfaite, on obtient d'abord une courbe elliptique $E \subset A$, avec $(\Theta \cdot E) = 2$ et $a \in E$, puis $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_v$ ou $\Delta_{\varepsilon - a} \subset \Theta \cap \Theta_v$. Le raisonnement de (2.6) conduit à une contradiction.

(2.8) Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible. Le morphisme $\psi\colon A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ associé à $|2\Theta|$ induit un isomorphisme de $A/\{\pm 1\}$ sur une sous-variété W de $\mathbb{P}^N$, la *variété de Kummer* de (A, Θ). On appelle *trisécante* de W toute droite ℓ de $\mathbb{P}^N$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1. ℓ contient au moins trois points distincts de W ;
2. ℓ est tangente à W en un point lisse et contient un autre point de W ;
3. ℓ est tangente à W en un point singulier, c'est-à-dire contenue dans le cône tangent de W en ce point, et contient un autre point de W ;
4. ℓ a un contact d'ordre 3 avec W en un point lisse.

Théorème II.C.2.9. *Supposons* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Soit* (A, Θ) *une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension* g, *dont la variété de Kummer admet une trisécante. Alors* $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$.

Démonstration. L'existence d'une trisécante entraîne des conditions du type (2.3), cf. [We 7] ou [Mu 10]. Plus précisément :

1. Si ℓ contient les points distincts $\psi(a), \psi(b), \psi(c)$, alors
$$\Theta \cap \Theta_{b-a} \subset \Theta_{c-a} \cup \Theta_{-c-a}.$$
2. Si ℓ est tangente à W en $\psi(a)$, avec $2a \neq 0$, et passe par $\psi(b)$, alors $\Theta \cap \Theta_{2a} \subset \Theta_{a+b} \cup \Theta_{a-b}$.

3. Si ℓ est tangente à W en $\psi(0)$ suivant $v \in T_0(A)$ et passe par $\psi(b)$, alors $\Theta \cap \Theta_v \subset \Theta_b \cup \Theta_{-b}$.
4. Si ℓ a un contact d'ordre 3 en $\psi(a)$ suivant $v \in T_a(A)$, alors

$$\Theta \cap \Theta_{2a} \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_{2a},$$

via l'identification $T_a(A) = T_0(A)$.

La conclusion résulte du théorème 2.3, de la proposition 2.6 et de (2.7). □

(2.10) Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, nous supposons ici $k = \mathbb{C}$. Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée, avec Θ symétrique. Soient $r\colon V \longrightarrow A$ le revêtement universel et θ la fonction thêta sur V de diviseur $r^*\Theta$. On dit que (A, Θ) satisfait à la *propriété de Novikov* s'il existe des champs de vecteurs constants x, y, t sur V, avec $x \neq 0$, et une constante $c \in \mathbb{C}$, tels que

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta + c$$

vérifie l'équation de Kadomtsev–Petviashvili

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx} + 12uu_x - 4u_t) + 3u_{yy} = 0. \tag{KP}$$

On a posé, comme d'habitude, $u_x = \partial u/\partial x$, etc. Un calcul direct [Du] montre que, lorsque (A, Θ) est irréductible, cette équation équivaut à la suivante, où d est une autre constante :

$$\begin{aligned}\theta_{xxxx}\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3\theta_{xx}^2 + 4\theta_x\theta_t - 4\theta_{xt}\theta + 3\theta_{yy}\theta - 3\theta_y^2 \\ +12c(\theta_{xx}\theta - \theta_x^2) + d\theta^2 = 0.\end{aligned} \tag{KP$'$}$$

Novikov a conjecturé que les jacobiennes sont les seules variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles satisfaisant à la propriété de Novikov. Cette conjecture vient d'être démontrée par T. Shiota [Sh]. Le théorème 2.1 fournit le résultat plus faible suivant.

Théorème II.C.2.11. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension g satisfaisant à la propriété de Novikov. Alors* $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$.

Démonstration. Sur la sous-variété $\Theta \cap \Theta_x$, l'équation (KP$'$) se réduit à

$$0 = \theta_{xx}^2 - \theta_y^2 = (\theta_{xx} + \theta_y)(\theta_{xx} - \theta_y).$$

Posons $X = \Theta \cap \Theta_x$. Les fonctions $\theta_{xx} \pm \theta_y$ sur V définissent deux sections de $H^0(X, O_X(\Theta))$ dont le produit est nul. Le lemme 2.12 ci-dessous montre qu'elles ne sont pas identiquement nulles ; X est donc réunion de deux sous-variétés échangées par $a \mapsto -a$. En particulier, X n'est pas intègre. Si $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g - 4$, on est dans le cas (ii) du théorème 2.1 ; mais (1.4) et le lemme 2.4 montrent alors que X a deux composantes irréductibles stables par $a \mapsto -a$, ce qui contredit la description précédente.

Le théorème résulte donc du lemme suivant.

Lemme II.C.2.12. *La section $\theta_{xx} + \theta_y$ de $H^0(X, O_X(\Theta))$ n'est pas identiquement nulle.*

Démonstration. La suite exacte

$$0 \longrightarrow O_\Theta \xrightarrow{\theta_x} O_\Theta(\Theta) \longrightarrow O_X(\Theta) \longrightarrow 0$$

donne en cohomologie

$$H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta)) \longrightarrow H^0(X, O_X(\Theta)) \xrightarrow{\partial} H^1(\Theta, O_\Theta).$$

Puisque θ_y définit une section de $H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta))$, on a $\partial(\theta_y) = 0$. Montrons que $\partial(\theta_{xx}) \neq 0$. Notons D la dérivation suivant x.

Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement de A par des ouverts trivialisant $O_A(\Theta)$ et $(\xi_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition associées. La section θ de $H^0(A, O_A(\Theta))$ est représentée par des fonctions θ_α sur U_α telles que $\theta_\alpha = \xi_{\alpha\beta}\theta_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Sur cet ouvert,

$$\begin{aligned} D\theta_\alpha &= D\xi_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + \xi_{\alpha\beta}D\theta_\beta, \\ D^2\theta_\alpha &= D^2\xi_{\alpha\beta}\,\theta_\beta + 2D\xi_{\alpha\beta}D\theta_\beta + \xi_{\alpha\beta}D^2\theta_\beta. \end{aligned}$$

La section θ_{xx} de $H^0(X, O_X(\Theta))$ est représentée par les fonctions $D^2\theta_\alpha$. Son image dans $H^1(\Theta, O_\Theta)$ est, par construction, la classe du cocycle

$$(\alpha, \beta) \longmapsto c_{\alpha\beta} = \frac{D^2\theta_\alpha - \xi_{\alpha\beta}D^2\theta_\beta}{D\theta_\alpha}.$$

Sur $\Theta \cap U_\alpha \cap U_\beta$, les formules précédentes donnent

$$c_{\alpha\beta} = 2\frac{D\xi_{\alpha\beta}}{\xi_{\alpha\beta}} = 2\left\langle D, \frac{d\xi_{\alpha\beta}}{\xi_{\alpha\beta}}\right\rangle.$$

Ainsi $\partial(\theta_{xx}) = 4\pi i\, r(D \lrcorner c_1(\Theta))$, où $r\colon H^1(A, O_A) \longrightarrow H^1(\Theta, O_\Theta)$ est la restriction. Celle-ci est injective pour $g \geq 2$, et le cup-produit

$$H^0(A, T_A) \xrightarrow{c_1(\Theta)} H^1(A, O_A)$$

est bijectif, d'où le lemme et le théorème. □

Appliquons pour terminer ces résultats au problème de Schottky (cf. Introduction). Revenons à un corps algébriquement clos quelconque k, de caractéristique différente de 2. Comme en (2.6), $\widetilde{A}$ désigne l'ensemble des points non nuls de A et des directions tangentes à A en 0.

Théorème II.C.2.13. *Dans l'espace de modules A_g des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, la variété J_g des jacobiennes est une composante irréductible de l'ensemble des variétés (A, Θ) irréductibles satisfaisant à l'une des propriétés suivantes :*

1. *Il existe $a \in \widetilde{A}$ tel que $\Theta \cap \Theta_a$ ne soit pas intègre.*
2. *Il existe trois éléments distincts a, x, y de $\widetilde{A}$ tels que $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_x) \cup (\Theta \cap \Theta_y)$.*
3. *La variété de Kummer de (A, Θ) admet une trisécante.*
4. *(A, Θ) satisfait à la propriété de Novikov, lorsque $k = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Il suffit de traiter (i), puisque les autres conditions entraînent (i). Soit N_{g-4} (respectivement E_g) la sous-variété de A_g formée des (A, Θ) irréductibles telles que $\dim \operatorname{Sing}\Theta \geq g-4$ (respectivement contenant une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$). Le théorème 2.1 implique que les (A, Θ) vérifiant (i) appartiennent à $N_{g-4} \cup E_g$. On sait par [An-M] et, en caractéristique positive, [We 5], que J_g est une composante irréductible de N_{g-4}. Comme J_g n'est pas contenu dans E_g (1.2), le théorème en résulte. □

La condition (i) ne semble pas beaucoup plus forte que la condition d'Andreotti–Mayer (cf. remarque 2.2.2). En revanche, nous ne connaissons aucun exemple de variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à (ii) ou (iii) qui ne soit une jacobienne ; il est tentant de conjecturer que chacune de ces conditions caractérise les jacobiennes.

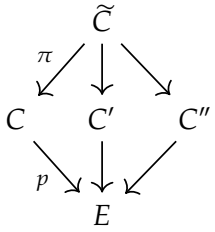
II.D Variétés de Prym éléments de N^g_{g-4} pour $g \geq 5$

[5] Comme l'indique son titre, cette section est consacrée à la description des variétés de Prym (P, Ξ) de dimension $g \geq 5$ satisfaisant à $\dim \operatorname{Sing} \Xi \geq g-4$.

Elle est basée sur des résultats de Beauville qui, complétant des résultats de Mumford ([Mu 2]), donne dans [Be 1] la liste des revêtements admissibles dont la variété de Prym est dans N^g_{g-4} et qui satisfont de plus à deux conditions : la condition $(*)$ de la page 157 de loc. cit. et la stabilité de la courbe C (cf. [De–M], p. 76). Il ressort de 4.11.3 et 5.4 de [Be 1] que les variétés de Prym associées aux revêtements de cette liste recouvrent $(N^g_{g-4} - \overline{J}_g) \cap \mathcal{P}^{\mathrm{irr}}_g$, où $\mathcal{P}^{\mathrm{irr}}_g$ désigne l'ensemble des variétés de Prym irréductibles.

Cette liste se compose d'un certain nombre de familles, dont nous allons maintenant décrire les éléments génériques.

1. La courbe C est lisse superelliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de degré 2, $p\colon C \to E$, de C sur une courbe elliptique. Le groupe de Galois de la clôture galoisienne de $p\pi\colon \widetilde{C} \to E$ est le groupe diédral D_4. La famille $\mathcal{S}_{g+1}$ obtenue est de dimension $2g$.
2. La courbe C est superelliptique, mais le groupe de Galois de $p\pi\colon \widetilde{C} \to E$ est $(\mathbb{Z}/2)^2$. On a un diagramme commutatif :



   La famille $\mathcal{S}_{g+1,t}$ est la famille des revêtements pour lesquels $g-t+1 = g(C'') \geq g(C') = t+1$. Elle est de dimension $2g$ et l'entier t prend les valeurs $0, 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$. La famille $\Pr(\mathcal{S}_{g+1,t})$ de variétés de Prym correspondante sera notée $\mathcal{E}^2_{t,g-t}$ (on notera aussi $\mathcal{E}^2_g = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,0})$).
3. La courbe C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-1$ en identifiant deux paires de points. La famille $\mathcal{H}_{g+1,0}$ obtenue est de dimension $2g+1$.
4. La courbe C est réunion d'une courbe rationnelle lisse et d'une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-2$ se coupant en quatre points. La famille $\mathcal{H}_{g+1,1}$ obtenue est de dimension $2g$.
5. La courbe C est réunion d'une courbe lisse de genre $t-1 \geq 1$ et d'une courbe lisse de genre $g-t-1 \geq t-1$ se coupant en quatre points. Les familles obtenues, pour $2 \leq t \leq g/2$, sont notées $\mathcal{H}_{g+1,t}$. Elles sont de dimension $3g-4$.
6. Dans le cas où $g = 5$, C est réunion d'une courbe rationnelle lisse coupant une courbe

5. Cette partie sera publiée, avec quelques modifications et avec l'Appendice 1, sous le titre « Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3 » dans Duke Mathematical Journal (référence [D 2]).

lisse de genre 3 en les quatre points d'un diviseur canonique. La famille $\mathcal{T}_6$ obtenue est de dimension 9.

7. Dans tous les autres cas cités par Beauville, la variété de Prym obtenue est une jacobienne. (Le seul cas restant, à savoir le cas e) des revêtements « pairs » des quintiques planes, est traité dans [Be 2], [Mas], [Tj 1], [Tj 2].)

Remarque II.D. *En utilisant des arguments du type de ceux de [H–M], p. 29, il est facile de voir que les adhérences des familles ci-dessus dans l'espace des modules des revêtements admissibles contiennent les familles de la liste de Beauville.*

D'autre part, toutes ces familles sont irréductibles. Faisons d'abord la remarque suivante. Soit $C \to S$ une famille irréductible de courbes lisses. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $C^d_S = C \times_S \cdots \times_S C$ (d fois) et $J^d = \mathrm{Pic}^d(C/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d. On a un morphisme canonique $C^d_S \to J^d$. Soit $m\colon J^d \to J^{2d}$ le morphisme induit par l'élévation au carré. Alors le S-schéma $J^d \times_{J^{2d}} C^{2d}_S$ est irréductible puisque la fibre de tout point de S est irréductible de dimension $2d$ (Ex. G.8, p. 202 de [A–C–G–H 1]). On en déduit aussitôt l'irréductibilité de $\mathcal{S}_{g+1,0}$ (irréductibilité de la famille des courbes elliptiques avec structure de niveau 2 et remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = g$), celle de $\mathcal{S}_{g+1,t}$, $0 < t \leq g/2$ (remarque précédente avec les courbes elliptiques et $d = t, g-t$), celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $t = 0,1$ (courbes hyperelliptiques de genre $g-1$, $g-2$ et $d = 2$), et celle de $\mathcal{H}_{g+1,t}$, $2 \leq t \leq g/2$ (courbes de genre $t-1$ et $g-t-1$ avec $d = 2$). L'irréductibilité de $\mathcal{T}_6$ se montre de façon analogue ; celle de $\mathcal{S}_{g+1}$ découle de l'existence d'une application dominante $\mathcal{H}_{g+1,0} \dashrightarrow \mathcal{S}_{g+1}$ fournie par la construction tétragonale (3.2.4).

Le théorème ci-dessous rassemble les résultats de cette section et mentionne aussi les paragraphes où l'on peut trouver les démonstrations.

Théorème II.D. *Pour $g \geq 5$, on a :*

— $\overline{\mathcal{E}}^2_g = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{S}}_{g+1,0}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{S}}_{g+1})$ (*cf.* 3.2.3, 3.2.4) *est de dimension $2g$ dans $\mathcal{A}_g$* (*cf.* 1.4.2). *C'est une composante irréductible de N^g_{g-4}* (*cf.* 1.4.5) *qui contient les jacobiennes hyperelliptiques* (*cf.* 3.1.2).

— $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{S}}_{g+1,1}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,1})$ (*cf.* 3.2.3) *est de dimension $2g-1$ dans $\mathcal{A}_g$* (*cf.* 1.4.2). *C'est une composante irréductible de N^g_{g-4}* (*cf.* 1.6.1, 4.2) *qui contient les jacobiennes superelliptiques* (*cf.* 1.5.3, 3.1.2). *On a aussi* $\mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{T}}_6) \subset \mathcal{E}^2_{1,4}$ (*cf.* 2.2).

— *Pour $2 \leq t \leq g/2$, on a* $\mathcal{E}^2_{t,g-t} = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,t}) = \mathcal{D}^2_{t,g-t} \subset \mathcal{A}^2_{t,g-t}$ (*cf.* 3.2.3, 2.1 *et* A1.1.3, A2.3.5 *pour les définitions de $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ et de $\mathcal{D}^2_{t,g-t}$*).

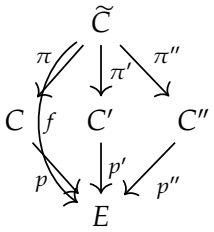
En tenant compte des résultats de l'Appendice 1 (en particulier A1.4.5), on a ainsi mis en évidence $2 + \lfloor g/2 \rfloor$ composantes irréductibles distinctes de N^g_{g-4} pour $g \geq 5$, à savoir $\overline{\mathcal{J}}_g$, $\overline{\mathcal{E}}^2_g$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ et les $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq g/2$. Chacune de ces composantes, sauf $\overline{\mathcal{J}}_g$, est contenue dans le diviseur θ_{null} de $\mathcal{A}_g$, constitué des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) avec Θ symétrique et $A[2] \cap \mathrm{Sing}\,\Theta \neq \emptyset$. On en déduit immédiatement (cf. 4.2) que N^5_1 a cinq composantes irréductibles, à savoir $\overline{\mathcal{J}}_5$, $\mathcal{A}_{1,4}$, $\overline{\mathcal{E}}^2_5$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,4}$ et $\mathcal{A}^2_{2,3}$, de dimensions respectives 12, 11, 10, 9 et 9 ($\mathcal{A}_{1,4}$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit d'une courbe elliptique par une variété abélienne de dimension 4).

Signalons que Donagi a annoncé dans [Do] des résultats sur le même sujet, qui diffèrent des nôtres : il fait erreur sur la dimension de $\mathcal{E}^2_5$ (9 au lieu de 10) et oublie $\mathcal{A}_{1,4}$. Il semble qu'il n'ait pas vu l'inclusion $\Pr(\widetilde{\mathcal{J}_6}) \subset \mathcal{E}^2_{1,4}$.

II.D.1 Étude des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$

1.1. Notations

On est dans la situation suivante : la courbe C est lisse de genre $g+1 \geq 6$. Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme de degré 2, $p\colon C \to E$, auquel on associe sa ramification $\Delta = P_1 + \cdots + P_{2g}$ sur E, $\delta \in \mathrm{Pic}^g E$ tel que $\Delta \equiv 2\delta$, et une involution τ de C (I.2.6). Il existe un diagramme commutatif :



On note $g(C'') = g - t + 1 \geq g(C') = t + 1$. Au morphisme p' sont associés sa ramification $\Delta' = P_1 + \cdots + P_{2t}$, $\delta' \in \mathrm{Pic}^t E$ tel que $\Delta' \equiv 2\delta'$, et une involution τ' de C'. À p'' sont associés $\Delta'' = \Delta - \Delta'$, $\delta'' = \delta - \delta'$ et une involution τ'' de C''.

Soient $Q_1, \ldots, Q_{2g}$ les points de ramification de p sur C. Le morphisme étale π est associé à l'élément suivant d'ordre 2 dans $\mathrm{Pic}^0 C$:

$$\eta \equiv Q_1 + \cdots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} - p^*\delta''.$$

On note σ l'involution sans point fixe de $\widetilde{C}$ induite par π. Le morphisme π' (resp. π'') est ramifié sur $p'^*(\Delta'')$ (resp. $p''^*(\Delta')$) et induit une involution σ' (resp. $\sigma'' = \sigma\sigma'$) sur $\widetilde{C}$.

1.2. Étude du lieu singulier du diviseur thêta

La variété de Prym (P, Ξ) associée à π peut être définie par ([Mu 2], proposition p. 242) :

$$P = \{L \in \mathrm{Pic}^{2g}\,\widetilde{C} \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C,\ h^0(L) \text{ pair}\}, \qquad \Xi = \{L \in P \mid h^0(L) \geq 2\}.$$

Proposition II.D.1.2.1. *On a :*

$$\Xi = \left\{ \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \;\middle|\; \begin{array}{c} L' \in \mathrm{Pic}^t C', \quad L'' \in \mathrm{Pic}^{g-t} C'', \\ h^0(L') \geq 1, \quad h^0(L'') \geq 1, \\ \mathrm{Nm}_{p'} L' \otimes \mathrm{Nm}_{p''} L'' = O_E(\delta) \end{array} \right\}.$$

Démonstration. Soit $L \in \Xi$. On considère $\pi_*\colon |L| \to |\omega_C|$. Comme $\dim |L| \geq 1$, son image rencontre l'hyperplan $p^*|\delta|$ de $|\omega_C|$, et

$$\exists D \in |L|, \qquad \pi_* D = p^* M \quad \text{avec } M \in |\delta|.$$

On peut alors écrire $D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$ avec D' et D'' effectifs. L'espace Ξ est donc recouvert par les fermés

$$Z_a = \left\{ \pi'^*O_{C'}(D') \otimes \pi''^*O_{C''}(D'') \;\middle|\; \begin{array}{l} D' \text{ (resp. } D'') \text{ effectif de degré } t+a \\ (\text{resp. } g-t-a), \quad p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta \end{array} \right\},$$

pour $-t \leq a \leq g-t$. Or, pour $L \in Z_{g-t}$, on a :

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^0(\pi'^* O_{C'}(D')) = h^0(D') + h^0(D' - p'^*\delta'') \\ &= h^0(D') + h^0(K_{C'} - D' + p'^*\delta'') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(p'^*\delta - D') + t - g \\ &= h^0(D') + h^0(\tau'^* D') + t - g = 2h^0(D') + t - g. \end{aligned}$$

On déduit de [Mu 3], p. 187 que $Z_a \subset P \iff a$ est pair. On remarque alors que, pour $|a| \geq 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(D') \geq 2$ ou $h^0(D'') \geq 2$. Or

$$\dim Z_a \leq \dim |\delta| - \min_{L \in Z_a} (\dim |D'| + \dim |D''|),$$

donc $\dim Z_a < g-1 = \dim \Xi$ pour $|a| \geq 2$. Le diviseur Ξ est donc égal à Z_0. □

Le lieu singulier du diviseur Ξ est réunion des deux ensembles suivants ([Mu 2], § 6) :

$$\{L \in \Xi \mid h^0(L) \geq 4\}$$

et

$$\{L \in \Xi \mid L = \pi^* M \otimes N,\ M \in \operatorname{Pic} C,\ N \in \operatorname{Pic} \widetilde{C},\ h^0(M) \geq 2,\ h^0(N) \geq 1\}.$$

Les points du premier ensemble seront dits singularités stables (elles existent sur toute variété de Prym de dimension au moins 6 par 1.2.5), ceux du second, singularités exceptionnelles (elles n'existent pas sur une variété de Prym générale). Une singularité peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnelle.

Proposition II.D.1.2.2. *Soit (P, Ξ) la variété de Prym associée à un revêtement élément de $\mathcal{S}_{g+1,t}$. Lorsque $g \geq 5$, on a :*

— *Le lieu singulier de Ξ est réunion de V, W_{-2}, W_0, W_2, avec*

$$V = \left\{ \pi'^* L' \otimes \pi''^* L'' \;\middle|\; \begin{array}{c} \operatorname{Nm}_{p'} L' = O_E(\delta'), \quad \operatorname{Nm}_{p''} L'' = O_E(\delta''), \\ h^0(L') \geq 2, \quad h^0(L'') \geq 2 \end{array} \right\},$$

$$W_a = \left\{ \pi'^* L' \otimes \pi''^* L'' \otimes f^* M \;\middle|\; \begin{array}{c} L' \in \operatorname{Pic}^{t-2+a} C', \quad L'' \in \operatorname{Pic}^{g-t-2-a} C'', \quad M \in \operatorname{Pic}^2 E, \\ h^0(L') \geq 1, \quad h^0(L'') \geq 1, \\ \operatorname{Nm}_{p'} L' \otimes \operatorname{Nm}_{p''} L'' \otimes M^{\otimes 2} \simeq O_E(\delta) \end{array} \right\},$$

et éventuellement d'un nombre fini de points d'ordre 2 de P.

— *L'ensemble V est toujours de dimension au plus $g-5$. Pour un élément générique de $\mathcal{S}_{g+1,t}$, il est vide pour $t \leq 2$, non vide de dimension pure $g-6$ et non inclus dans les W_a pour $t \geq 3$; ses composantes irréductibles sont au nombre de quatre pour $t = 3, g = 6$, de deux pour $t = 3, g > 6$, et d'une pour $t > 3$.*

— *L'ensemble W_2 est vide pour $(t,g) = (2,5)$ ou $(3,6)$, irréductible de dimension $g-4$ sinon.*

— *L'ensemble W_0 est vide pour $t \leq 1$, irréductible de dimension $g-4$ pour $t \geq 2$.*

— *L'ensemble W_{-2} est vide pour $t \leq 3$, irréductible de dimension $g-4$ pour $t \geq 4$.*

Remarque II.D.1.2.3. *Avec les notations 1.1, si on fait l'hypothèse supplémentaire, satisfaite génériquement sur $\mathcal{S}_{g+1,t}$, que Δ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$, le lieu singulier de Ξ est égal à $V \cup W_{-2} \cup W_0 \cup W_2$ (cf. 1.2.9).*

On déduit de la proposition les deux résultats suivants :

Corollaire II.D.1.2.4. *Pour $g \geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})$ est irréductible dans les seuls cas suivants :*

(i) $t = 0$ *ou* 1. *On a* $\operatorname{Sing}\Xi = W_2$.

(ii) $t = 2$ *et* $g = 5$. *On a* $\operatorname{Sing}\Xi = W_0$.

Corollaire II.D.1.2.5. *Pour $g \geq 6$ et toute variété de Prym (P, Ξ) de dimension g, on a* $\dim \operatorname{Sing}\Xi \geq g - 6$.

Démonstration. Il ressort de la proposition que, pour $g \geq 6$ et (P, Ξ) élément de $\mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,3})$, $\operatorname{Sing}\Xi$ a une composante irréductible de dimension $g - 6$ correspondant à des singularités stables, à savoir V.

Or il est connu (IV.A.4.5) que, pour toute famille de revêtements doubles $\widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C} \to T$, à laquelle correspond une famille de variétés de Prym $\mathcal{P} \to T$, l'ensemble

$$\bigcup_{t \in T} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\}$$

est soit vide, soit de codimension au plus 6 dans $\mathcal{P}$. Or, si on prend une telle famille contenant notre exemple, cet ensemble est de codimension 6 en un point d'une fibre, donc se projette surjectivement sur T. □

Remarque II.D.1.2.6. *Il ressort de [We 1] et de 1.2.5 que, pour une variété de Prym générique (P, Ξ) de dimension $g \geq 6$,* $\operatorname{Sing}\Xi$ *est de dimension pure $g - 6$ et que ses composantes connexes sont ses composantes irréductibles. Or une jacobienne générique est simple, donc aussi une variété de Prym générique. On déduit de [Ba] que, pour $g \geq 12$,* $\operatorname{Sing}\Xi$ *est génériquement irréductible de dimension $g - 6$.*

Démonstration de la proposition 1.2.2

On commence par la définition suivante. Soit $p\colon C \to B$ un revêtement double de courbes lisses, D un diviseur effectif sur C. On dira que D est p-simple s'il n'existe pas de diviseur effectif non nul E sur B tel que $D - p^*E$ soit effectif. On a alors ([Mu 2], p. 338) :

Proposition II.D.1.2.7. *Soient $p\colon C \to B$ un revêtement double de courbes lisses et $\mathcal{O}_B(-\delta) = \bigwedge^2 p_*\mathcal{O}_C$; L un faisceau inversible sur B, D un diviseur effectif p-simple sur C. On pose $M = p^*L \otimes \mathcal{O}_C(D)$. On a alors une suite exacte de $\mathcal{O}_B$-modules :*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow p_*M \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_B(p_*D - \delta) \longrightarrow 0.$$

Corollaire II.D.1.2.8. *Dans notre situation, on considère $L = \pi'^*\mathcal{O}_{C'}(D') \otimes \pi''^*\mathcal{O}_{C''}(D'')$, où D' et D'' sont effectifs, D' est p'-simple et* $\mathrm{Nm}_\pi L = \omega_C$. *Alors*

$$h^0(\widetilde{C}, L) \leq 2h^0(C'', D'') + g - t - \deg D''.$$

Démonstration. Le diviseur π'^*D' est π''-simple, donc la proposition 1.2.7 donne

$$h^0(L) \leq h^0(D'') + h^0(D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta').$$

Or on a $p'_*D' + p''_*D'' \equiv \delta$, donc

$$\begin{aligned} D'' + \pi''_*\pi'^*D' - p''^*\delta' &\equiv D'' + \tau''^*D'' + p''^*p'_*D' - \tau''^*D'' - p''^*\delta' \\ &\equiv p''^*(\delta - \delta') - \tau''^*D'' \equiv \tau''^*(K_{C''} - D''). \end{aligned}$$

On en déduit par Riemann–Roch l'inégalité cherchée. □

Démonstration de la proposition 1.2.2. Soit L un élément de Ξ correspondant à une singularité de Ξ. Par 1.2.1, on peut écrire

$$L = \pi'^*[O_{C'}(D') \otimes p'^*O_E(F')] \otimes \pi''^*[O_{C''}(D'') \otimes p''^*O_E(F'')]$$

avec D', D'', F', F'' effectifs, D' p'-simple, D'' p''-simple et

$$\deg D' + 2\deg F' = t = g(C') - 1, \qquad \deg D'' + 2\deg F'' = g - t = g(C'') - 1.$$

Supposons d'abord cette singularité exceptionnelle non stable. Tout élément de $|L|$ s'écrit alors $\pi^*D + G$, avec $h^0(D) \geq 2$ et G π-simple. On applique 1.2.7 à D et p. On est dans l'un des cas suivants :

(i) Il existe F de degré 2 sur E tel que $p^*F \leq D$. On a alors $F \leq F' + F''$ et on est dans W_{-2}, W_0 ou W_2.

(ii) D est p-simple, $G = 0$ et $p_*D \equiv \delta$. On a alors $\pi^*D = \pi'^*D' + \pi''^*D''$, ce qui n'est possible que si $D' \leq \operatorname{Ram} p'$ et $D'' \leq \operatorname{Ram} p''$. On en déduit

$$|\delta| \ni p_*D = p'_*D' + p''_*D'' \leq \Delta' + \Delta'' = \Delta.$$

(1.2.9) En particulier, le diviseur Δ est somme de deux éléments de $|\delta|$, ce qui n'est pas le cas pour un élément générique de $\delta_{g+1,t}$. On a aussi $L = \pi^*O_C(D)$, soit $L \simeq \sigma^*L$ et $L^{\otimes 2} \simeq \omega_{\widetilde{C}}$. C'est donc un point d'ordre 2 de P.

On suppose maintenant $h^0(L) \geq 4$. Si $\deg F' \geq 1$, le corollaire 1.2.8 donne

$$4 \leq h^0(L) \leq 2h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') - 2\deg F',$$

soit $h^0(D'' + p''^*F'' + p''^*F') \geq 3$. On applique 1.2.7 :

$$\begin{aligned} 3 &\leq h^0(F' + F'') + h^0(p''_*D'' + F' + F'' - \delta'') \\ &\leq \deg(F' + F'') + \max(\deg(F' - F''), 0) \\ &\leq 2\max(\deg F', \deg F''), \end{aligned}$$

de sorte que soit F', soit F'' est de degré au moins deux, et qu'on est soit dans W_2, soit dans W_{-2}. Le cas $\deg F'' \geq 1$ se traite de façon identique.

Si $\deg F' = \deg F'' = 0$, le corollaire 1.2.8 donne $h^0(D') \geq 2$ et $h^0(D'') \geq 2$. Par ([We 2], 3.4), on est dans V. Ceci termine la démonstration de la première partie de la proposition.

L'ensemble V est évidemment vide pour $t = \deg L' \leq 1$. Pour $t = 2$, il est vide si C' n'est pas hyperelliptique, ce qui est le cas génériquement. Les assertions sur le nombre de composantes irréductibles découlent de [We 2], proposition 3.6 pour $t \geq 5$, de [Te] pour $t = 4$ et, pour $t = 3$, du fait que les deux g^1_3 de C' (supposée non hyperelliptique), images l'un de l'autre par τ'^*, satisfont à $\operatorname{Nm}_{p'} g^1_3 = O_E(\delta')$ (utiliser 1.2.7). Enfin, l'ensemble V n'est contenu dans aucun W_a ; en effet, un élément générique s'écrit

$$L = \pi'^*L' \otimes \pi''^*L'', \quad \operatorname{Nm} L' = O_E(\delta'), \quad \operatorname{Nm} L'' = O_E(\delta''), \quad h^0(L') = h^0(L'') = 2.$$

De plus, tous les diviseurs de $|L'|$ (resp. $|L''|$) sont p'-simples (resp. p''-simples). Un tel fibré ne peut être dans un W_a, $a \in \mathbb{Z}$.

Enfin, les assertions d'irréductibilité et de dimension sur les W_a sont conséquences de : □

Lemme II.D.1.2.10. *Soient $p\colon C \to E$ une courbe superelliptique et $G \in \mathrm{Pic}^d E$ fixé. Alors, pour $5 \leq d \leq g(C)+1$, l'ensemble*

$$\{p^*M \otimes O_C(D) \mid M \in \mathrm{Pic}^2 E,\ D \in C^{(d-4)},\ O_E(p_*D) \otimes M^{\otimes 2} \simeq G\}$$

est irréductible de dimension $d-4$.

Démonstration du lemme 1.2.10. On pose

$$Z(G) = \left\{ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) \in C^{d-4} \times \mathrm{Pic}^2 E \;\middle|\; O_E\left(\sum_{i=1}^{d-4} p x_i\right) \otimes M^{\otimes 2} \simeq G \right\}.$$

On remarque tout d'abord que $Z(G)$ est irréductible de dimension $d-4$ pour $d \geq 5$: c'est évident pour $d = 5$ et la première projection $\mathrm{pr}_1 : Z(G) \to C$ a pour fibre $Z(G \otimes O_E(-px_1))$. Pour un élément générique $(x_1, \dots, x_{d-4}, M)$ de $Z(G)$, le diviseur $D = \sum_i x_i$ est p-simple (cf. 1.2.7) et on a une suite exacte

$$0 \to H^0(E, M) \to H^0(C, O_C(D) \otimes p^*M) \to H^0(E, O_E(p_*D - \delta) \otimes M) \to 0.$$

Ce dernier espace est nul lorsque

$$0 \geq \deg[O_E(p_*D - \delta) \otimes M] = d - 1 - g(C),$$

sauf si

$$O_E(p_*D - \delta) \otimes M \simeq O_E \quad \Longleftrightarrow \quad M \simeq G \otimes O_E(-\delta).$$

Sous l'hypothèse $d \leq g(C)+1$, on en déduit que, pour un élément générique $(x_1, \dots, x_{d-4}, M)$ de $Z(G)$, $D = \sum_i x_i$ est fixe dans $|O_C(D) \otimes p^*M|$, donc que l'application

$$\begin{aligned} Z(G) &\longrightarrow \mathrm{Pic}^d C, \\ (x_1, \dots, x_{d-4}, M) &\longmapsto O_C\left(\sum_{i=1}^{d-4} x_i\right) \otimes p^*M \end{aligned}$$

est génériquement finie. Son image est donc irréductible de dimension $d-4$. □

1.3. Les quadriques associées aux points doubles du diviseur thêta

On est toujours dans la situation 1.1, mais on s'intéresse ici aux seuls cas $t = 0$ et $t = 1$.

Commençons par quelques rappels sur les singularités stables de multiplicité 2 de Ξ ([Mu 2], [Tj 3]). Une telle singularité correspond à un faisceau inversible L sur $\widetilde{C}$ tel que $h^0(L) = 4$ et $\mathrm{Nm}\, L = \omega_C$. On a une application

$$\begin{aligned} \phi\colon \bigwedge^2 H^0(L) &\longrightarrow H^0(C, K_C + \eta), \\ s \wedge t &\longmapsto s\sigma t - t\sigma s. \end{aligned}$$

Si $\{s_1, \dots, s_4\}$ est une base de $H^0(L)$, on pose

$$Q_L = \phi(s_1 \wedge s_2)\phi(s_3 \wedge s_4) - \phi(s_1 \wedge s_3)\phi(s_2 \wedge s_4) + \phi(s_1 \wedge s_4)\phi(s_2 \wedge s_3) \in S^2 H^0(C, K_C + \eta).$$

Lorsque Q_L est non nul, c'est une équation du cône tangent à Ξ en L dans P (on rappelle que $T_0 P \simeq H^0(C, K_C + \eta)^\vee$). De plus, la quadrique d'équation Q_L dans $\mathbb{P}H^0(C, K_C + \eta)^\vee$ contient l'image X de C par le morphisme associé au système linéaire $|K_C + \eta|$ (appelée courbe semi-canonique).

On déduit facilement de 1.4.1, par exemple, que :

— Pour $t = 0$, X est la courbe elliptique $\phi_{|\delta''|}(E)$.

— Pour $t = 1$, X est tracée sur le cône Σ de sommet un point S et de base $\phi_{|\delta''|}(E)$. Elle a un point double en S et toute quadrique contenant X contient Σ.

Proposition II.D.1.3.1. *Soit (P, Ξ) un élément générique de $\mathcal{E}^2_{t,g-t}$, avec $g \geq 5$. Alors :*

1. *Si $t = 0$, l'intersection des quadriques correspondant aux singularités quadratiques de Ξ est la courbe semi-canonique X. L'espace vectoriel qu'elles engendrent dans $S^2 T_0^\vee P$ est de codimension $2g$.*
2. *Si $t = 1$, l'intersection des quadriques est le cône Σ. L'espace vectoriel engendré est de codimension $3g - 2$.*

Démonstration. Par 1.2.4(i), il nous suffit de calculer les quadriques Q_L pour les éléments L de W_2, qui s'écrivent

$$L = \pi'^* L' \otimes \pi''^* L'', \qquad \begin{cases} L' = O_{C'}(D') \otimes p'^* M,\ D' \geq 0,\ \deg L' = t + 4,\ \deg M = 2, \\ L'' = O_{C''}(D''),\ D'' \geq 0. \end{cases}$$

Si D' est p'-simple, 1.2.7 donne la suite exacte

$$0 \to H^0(E, M) \xrightarrow{\alpha} H^0(C', L') \xrightarrow{\beta} H^0(E, M \otimes O_E(p'_* D' - \delta')) \to 0.$$

Les morphismes α et β peuvent être définis comme suit :

$$\forall v \in H^0(E, M), \qquad \alpha(v) = p'^*(v) u', \quad \operatorname{div}(u') = D',$$

$$\forall u \in H^0(C', L'), \qquad u\tau'(u') - \tau'(u) u' = t' p'^*(\beta(u)),$$

où $\operatorname{div}(t')$ est la ramification de p' sur C'.

On prend une base $\{v_1, v_2\}$ de $H^0(E, M)$ et une base $\{v_3, v_4\}$ de $H^0(E, M \otimes O_E(p'_* D' - \delta'))$. Il existe alors une base $\{u'_1, \dots, u'_4\}$ de $H^0(C', L')$ telle que

$$u'_1 = \alpha(v_1), \quad u'_2 = \alpha(v_2), \quad \beta(u'_3) = v_3, \quad \beta(u'_4) = v_4.$$

Une base de $H^0(L)$ est alors $\{s_j = \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\}_{1 \leq j \leq 4}$, où $\operatorname{div}(u'') = D''$. Or on a

$$\begin{aligned} \pi^*(\phi(s_j \wedge s_k)) &= \pi'^*(u'_j)\pi''^*(u'')\pi'^*(\tau'^* u'_k)\pi''^*(\tau''^* u'') \\ &\quad - \pi'^*(\tau'^* u'_j)\pi''^*(\tau''^* u'')\pi'^*(u'_k)\pi''^*(u'') \\ &= f^*(v'')\pi'^*(\phi(u'_j \wedge u'_k)), \end{aligned}$$

où $\operatorname{div}(v'') = p''_* D''$. Donc $\phi(s_1 \wedge s_2) = 0$ et

$$\begin{aligned}\pi^*(\phi(s_1 \wedge s_3)) &= f^*(v'')\pi'^*\left[u' p'^*(v_1)\tau'^* u'_3 - \tau'^* u'\, p'^*(v_1) u'_3\right] \\ &= f^*(v'' v_1 v_3)\pi'^*(t').\end{aligned}$$

Dans l'identification 1.4.1, cela s'écrit $\phi(s_1 \wedge s_3) = p^*(v'' v_1 v_3)s'$. On a donc

$$Q_L = -(v_1 v_3 v'')s' \cdot (v_2 v_4 v'')s' + (v_1 v_4 v'')s' \cdot (v_2 v_3 v'')s'.$$

On veut montrer que les quadriques ainsi obtenues engendrent l'espace des quadriques de $\mathbb{P}^{g-t-1}$ contenant $\phi_{|\delta''|}(E)$. C'est un exercice facile, dont on laisse la démonstration au lecteur (qui pourra la trouver dans [D 2]). □

1.4. Rang de l'application Prym sur $\mathcal{S}_{g+1,t}$. Le théorème d'Andreotti et Mayer

On rappelle ([Be 2], proposition 7.5) que la codifférentielle de l'application $\mathrm{Pr}\colon \mathcal{R}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$ en un point $(C,\eta) \in \mathcal{R}^0_{g+1}$ est

$$T^\vee_{(C,\eta)} \mathrm{Pr}\colon S^2 H^0(C, K_C + \eta) \longrightarrow H^0(C, 2K_C).$$

On s'intéresse à la différentielle de la restriction Pr_t de Pr à $\mathcal{S}_{g+1,t} \subset \mathcal{R}^0_{g+1}$. Soient s' et s'' deux sections telles que :

$$\operatorname{div}(s') = Q_1 + \cdots + Q_{2t}, \qquad \operatorname{div}(s'') = Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} \quad \text{(notations 1.1)},$$

$$s = s's'', \qquad \operatorname{div}(s) = Q_1 + \cdots + Q_{2g}.$$

On a alors les décompositions suivantes :

$$T^\vee_{(C,\eta)} \mathcal{R}_{g+1} \simeq H^0(C, 2K_C) \simeq \underbrace{p^* H^0(E, 2\delta)}_{\tau = \mathrm{id}} \oplus \underbrace{p^* H^0(E, \delta)s}_{\tau = -\mathrm{id}}.$$

La partie τ-invariante correspond au lieu dans l'espace des déformations de C où l'involution τ se prolonge, c'est-à-dire à $T^\vee_{(C,\eta)} \mathcal{S}_{g+1,t}$. On a aussi :

Lemme II.D.1.4.1. $H^0(C, K_C + \eta) \simeq p^* H^0(E, \delta'')s' \oplus p^* H^0(E, \delta')s''$.

Démonstration. On a (cf. 1.1)

$$\eta \equiv Q_1 + \cdots + Q_{2t} - p^*\delta' \equiv Q_{2t+1} + \cdots + Q_{2g} - p^*\delta'',$$

$$K_C + \eta \equiv \operatorname{div}(s') + p^*\delta'' \equiv \operatorname{div}(s'') + p^*\delta'.$$

On a donc un morphisme

$$\begin{aligned} H^0(E, \delta'') \oplus H^0(E, \delta') &\longrightarrow H^0(C, K_C + \eta), \\ (u'', u') &\longmapsto p^* u''\, s' + p^* u'\, s'', \end{aligned}$$

dont le noyau est isomorphe à

$$H^0(p^*\delta'' - \operatorname{div}(s'')) = H^0(p^*\delta' - \operatorname{div}(s')) = H^0(C, \eta) = 0.$$

□

On peut donc écrire

$$S^2H^0(C,K_C+\eta) \simeq [p^*S^2H^0(E,\delta'')s'^2 \oplus p^*S^2H^0(E,\delta')s''^2] \\ \oplus [p^*H^0(E,\delta'') \otimes p^*H^0(E,\delta')]s's''.$$

Si $s_{\Delta'}$ (resp. $s_{\Delta''}$) est une section de diviseur Δ' (resp. Δ'') telle que $p^*s_{\Delta'} = s'^2$ (resp. $p^*s_{\Delta''} = s''^2$), on peut écrire $T^\vee \Pr$ comme la somme de :

$$T^\vee \Pr_t : S^2H^0(E,\delta') \oplus S^2H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta), \\ (u'v', u''v'') \longmapsto u'v's_{\Delta''} + u''v''s_{\Delta'}$$

et de

$$H^0(E,\delta') \otimes H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,\delta), \\ u' \otimes u'' \longmapsto u'u''.$$

Proposition II.D.1.4.2. *Pour $g \geq 4$, $(g,t) \neq (4,2)$ et (C,η) générique dans $\mathcal{S}_{g+1,t}$, on a*

$$\dim \ker T_{(C,\eta)} \Pr_t = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ 1 & \text{pour } 0 < t \leq g/2. \end{cases}$$

En particulier,

$$\dim \mathcal{E}^2_{t,g-t} = \begin{cases} 2g & \text{pour } t = 0, \\ 2g-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On rappelle que $t = \deg \delta'$. Si $t = 0$, $\dim \ker T \Pr_0$ est le corang de $S^2H^0(E,\delta'') \to H^0(E,2\delta'') = H^0(E,2\delta)$, qui est surjective pour $g = \deg \delta'' \geq 3$ ([Mu 4], p. 55). On suppose $t > 0$. On peut écrire $T^\vee \Pr_t$ comme la composée de

$$\phi' \oplus \phi'' : S^2H^0(E,\delta') \oplus S^2H^0(E,\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta') \oplus H^0(E,2\delta'')$$

et

$$\phi : H^0(E,2\delta') \oplus H^0(E,2\delta'') \longrightarrow H^0(E,2\delta), \\ (u',u'') \longmapsto u's_{\Delta''} + u''s_{\Delta'}.$$

Comme Δ' et Δ'' sont à supports disjoints, le noyau de ϕ est engendré par $(s_{\Delta'}, -s_{\Delta''})$. Si $t = 1$, on a

$$\mathrm{Im}(\phi' \oplus \phi'') \cap \ker \phi = [\mathbb{C}s^2_{\delta'} \oplus H^0(E,2\delta'')] \cap \mathbb{C}(s_{\Delta'}, -s_{\Delta''}) = 0,$$

puisque Δ' est somme de deux points distincts (ϕ'' est surjective puisque $\deg \delta'' = g-1 \geq 3$). On a donc

$$\operatorname{rang} T^\vee \Pr_1 = \operatorname{rang}(\phi' \oplus \phi'') = 1 + 2(g-1) = 2g-1.$$

Si $t = 2$, le même raisonnement s'applique sauf si Δ' est somme de deux éléments de $|\delta'|$, ce qui n'est pas le cas génériquement, ou si $\deg \delta'' = g-2 < 3$, cas qu'on a exclu. Si $t \geq 3$, ϕ' et ϕ'' sont surjectives et

$$\operatorname{rang} T^\vee \Pr_t = \operatorname{rang} \phi = 2g-1.$$

□

On peut maintenant montrer que $\overline{\mathcal{E}}^2_g = \Pr(\overline{\mathcal{S}}_{g+1,0})$ est une composante irréductible de N^g_{g-4}. On rappelle le théorème d'Andreotti–Mayer dont on peut trouver la démonstration, sinon l'énoncé, dans [An–M].

Théorème II.D.1.4.3 (Andreotti–Mayer). *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On suppose que :*

— $\operatorname{Sing}\Theta$ *est de dimension pure* k.

— *L'ensemble* $\operatorname{Sing}_2\Theta$ *des points de multiplicité deux sur* Θ *est dense dans* $\operatorname{Sing}\Theta$ *et l'image de chaque composante de* $\operatorname{Sing}_2\Theta$ *par l'application*

$$\begin{aligned} \operatorname{Sing}_2\Theta &\longrightarrow \mathbb{P}S^2T_0^\vee A, \\ x &\longmapsto \tau_x^*(\text{cône tangent à } \Theta \text{ en } x) \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

engendre un espace vectoriel de dimension au moins N.

Alors la codimension de N^g_k *en* (A,Θ) *est au moins* N.

Corollaire II.D.1.4.5. *L'ensemble* $\overline{\mathcal{E}}^2_g$ *est, pour* $g \geq 5$, *une composante irréductible de* N^g_{g-4} *de dimension* $2g$.

Démonstration. En effet, pour un élément générique (P,Ξ) de $\mathcal{E}^2_g$, $\operatorname{Sing}\Xi$ est irréductible pour $g \geq 5$ par 1.2.4. L'image de 1.4.4 engendre un espace vectoriel de dimension $\binom{g+1}{2} - 2g$ (1.3.1) et $\dim \mathcal{E}^2_g = 2g$ (1.4.2). Le théorème 1.4.3 permet de conclure. □

Remarque II.D.1.4.6. *Bien que, pour un élément générique* (P,Ξ) *de* $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $\operatorname{Sing}\Xi$ *soit irréductible (1.2.4), l'image de 1.4.4 engendre un espace vectoriel de dimension* $\binom{g+1}{2} - (3g-2)$ *(1.3.1) et* $\dim \mathcal{E}^2_{1,g-1} = 2g-1$ *(1.4.2). On ne peut appliquer 1.4.3. Pourtant,* $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ *est bien une composante de* N^g_{g-4} *(1.6.1 et 4.2).*

1.5. Quelques remarques. La famille $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ contient les jacobiennes superelliptiques

On garde toujours les mêmes notations, auxquelles on ajoute

$$P' = \ker(JC' \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JE), \qquad P'' = \ker(JC'' \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JE).$$

La polarisation de JC' (resp. JC'') induit sur P' (resp. P'') une polarisation $L_{P'}$ (resp. $L_{P''}$) telle que ([Mu 2], Corollary 1, p. 332; et I.3) $H(L_{P'}) \simeq p'^*JE[2]$ (resp. $H(L_{P''}) \simeq p''^*JE[2]$). Cette polarisation est de type (2) et $(P', L_{P'}) \in \mathcal{A}_{t,(2)}$ (resp. $(P'', L_{P''}) \in \mathcal{A}_{g-t,(2)}$).

Proposition II.D.1.5.1.

— *Pour* $t = 0$, *on a une isogénie* $g\colon P'' \xrightarrow{\pi''^*} P = \operatorname{Prym}(\widetilde{C}/C)$ *de noyau* $\{0, p''^*O_E(\delta')\}$ *telle que* $g^*L_P \sim L_{P''}$.

— *Pour* $0 < t \leq g/2$, *on a une isogénie*

$$\begin{aligned} g\colon P' \times P'' &\longrightarrow P, \\ (x', x'') &\longmapsto \pi'^*x' - \pi''^*x'' \end{aligned}$$

de noyau $(p'^*, p''^*)(JE[2])$ *telle que* $g^*L_P \sim L_{P'} \boxtimes L_{P''}$ *(notations I.3.10). En particulier,* $\mathcal{E}^2_{t,g-t} \subset \mathcal{A}^2_{t,g-t}$ *(cf. définition A1.1.3).*

Démonstration. Il est facile de vérifier que g est bien à valeurs dans P et que $\ker g \subset P'[2] \times P''[2]$, donc que g est une isogénie. Pour les polarisations, il faut montrer que

$$\widehat{\pi'^*}\,\phi_{L_P}\pi'^* = \phi_{L_{P'}}, \qquad \widehat{\pi''^*}\,\phi_{L_P}\pi'^* = 0.$$

On montre par exemple la première égalité. On pose

$$i\colon P \hookrightarrow J\widetilde{C}, \quad i'\colon P' \hookrightarrow JC', \qquad \phi\colon J\widetilde{C} \xrightarrow{\sim} \widehat{J\widetilde{C}}, \quad \phi'\colon JC' \xrightarrow{\sim} \widehat{JC'}.$$

Pour tout $p' \in P'$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\pi'^*}\,\phi_{L_P}\pi'^*(2p') &= \widehat{\pi'^*}\,\phi_{L_P^{\otimes 2}}\pi'^*(p') \\ &= \widehat{\pi'^*}\,\hat{i}\,\phi\, i\pi'^*(p') = \hat{i'}\,\widehat{\pi'^*}\,\phi\,\pi'^* i'(p') \\ &= \hat{i'}\,\phi' i'(2p') = \phi_{L_{P'}}(2p').\end{aligned}$$

□

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas du genre de E. Si E est de genre $b \geq 2$, on obtient des variétés de Prym qui sont dans $\mathcal{A}^{\delta}_{t,g-t}$, où δ est la polarisation $(2,\dots,2)$ de degré 2^b et $b-1 \leq t \leq g-(b-1)$.

Regardons de plus près les cas $t=0$ et $t=1$. Soit $\mathcal{E}_{g,(2)}$ l'ensemble des variétés de Prym (au sens de [Mu 2]) associées aux courbes superelliptiques lisses de genre $g+1$. C'est un sous-ensemble irréductible de $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

Proposition II.D.1.5.2.

1. *Pour tout $(P,M) \in \overline{\mathcal{E}}_{g,(2)}$ et $a \in H(M)$, $a \neq 0$, la variété abélienne principalement polarisée $P/\{0,a\}$ est dans $\overline{\mathcal{E}}^2_g$.*
2. *Pour $g \geq 4$ et tout $(P,M) \in \overline{\mathcal{E}}_{g-1,(2)}$, toute courbe elliptique F et tout isomorphisme $\psi\colon H(M) \xrightarrow{\sim} F[2]$, la variété abélienne principalement polarisée*

$$(P \times F)/\{(a,\psi a) \mid a \in H(M)\},$$

élément de $\mathcal{A}^2_{1,g-1}$ (cf. A1.1.3), est dans $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$.

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de 1.5.1. Pour le second, on remarque d'abord que la famille $\mathcal{F}^2_{1,g-1}$ ainsi construite est irréductible puisque la famille

$$\{p\colon C \to E \text{ structure superelliptique}, g(C)=g, \text{ avec un isomorphisme } E[2] \simeq H(2)\}$$

est irréductible. De plus, $\dim \mathcal{F}^2_{1,g-1} \leq 2g-2+1$. Par 1.5.1 et A1.1.1, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} \subset \mathcal{F}^2_{1,g-1}$ et, par 1.4.2, $\dim \mathcal{E}^2_{1,g-1} = 2g-1$ pour $g \geq 4$. On en déduit $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} = \mathcal{F}^2_{1,g-1}$. □

Corollaire II.D.1.5.3. *Pour $g \geq 4$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ contient les jacobiennes superelliptiques.*

Démonstration. En effet ([Mu 2], Corollary 1(b)), pour $p\colon C \to E$ structure superelliptique, on a une isogénie $P \times JE \to JC$ de noyau $(p^*,\mathrm{id})(JE[2])$. □

1.6. L'espace $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ est une composante de N^g_{g-4}

On ne considère dans cette section que le cas $g \geq 6$. Le résultat est encore vrai pour $g=5$ et sera montré en 4.2.

Théorème II.D.1.6.1. *Pour $g \geq 6$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ est une composante irréductible de dimension $2g-1$ de N^g_{g-4}.*

Démonstration. On rappelle que la méthode d'Andreotti et Mayer ne s'applique pas à $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ (1.4.6). On va utiliser les variétés quasi-abéliennes de rang 1 (appelées « rank 1 degenerations of abelian varieties » dans [Mu 1], p. 350). Expliquons rapidement de quoi il s'agit.

Les variétés quasi-abéliennes de rang 1 et de dimension g sont en correspondance biunivoque avec les extensions de groupes commutatifs des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g-1$ par un tore de dimension 1. Par [Mu 6], p. 227, ces extensions sont toutes du type

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{j} \mathcal{G}(L_a \otimes L^{-1}) \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

où $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}, a \in A$ ([Mu 5], p. 290). Si on change a en $-a$, j est changé en $-j$ et les groupes obtenus sont isomorphes. Il existe ([Ig 1], [Mu 1], p. 351, [Mu 7], [Na]) un espace de modules grossier $\mathcal{A}^{(1)}_g$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées ou quasi-abéliennes de rang 1 et de dimension g, réunion disjointe de $\mathcal{A}_g$ et d'un diviseur $\partial\mathcal{A}_g$. Ce dernier est fibré sur $\mathcal{A}_{g-1}$ par $\rho_g : \partial\mathcal{A}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$. La fibre de $(A, L) \in \mathcal{A}_{g-1}$ est isomorphe à $A/\operatorname{Aut}(A, L)$ par la correspondance ci-dessus. Si Z est un fermé de $\mathcal{A}_g$, on notera ∂Z l'intersection de l'adhérence de Z dans $\mathcal{A}^{(1)}_g$ avec $\partial\mathcal{A}_g$.

On aura besoin d'un calcul d'extension, fait dans [Fr–S 2], Theorem 5.2, relatif à la situation suivante. Soit $\pi_0 : \widetilde{N} \to N$ un revêtement étale connexe de degré 2, où N est lisse de genre g. On note σ l'involution induite sur $\widetilde{N}$ et $(P_0, L_0) \in \mathcal{A}_{g-1}$ la variété de Prym associée. Soit C (resp. $\widetilde{C}$) la courbe singulière obtenue à partir de N (resp. $\widetilde{N}$) en identifiant deux points p et q (resp. $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$, et $\sigma\tilde{p}$ et $\sigma\tilde{q}$, où $\pi_0(\tilde{p}) = p$, $\pi_0(\tilde{q}) = q$). On a un revêtement étale induit $\pi : \widetilde{C} \to C$ qui n'est pas admissible. La variété de Prym $P = \ker(J\widetilde{C} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JC)^0$ est extension de P_0 par un tore de dimension 1. Plus précisément :

Lemme II.D.1.6.2 (Friedman–Smith). *L'extension canonique* $1 \to \mathbb{C}^* \to P \to P_0 \to 0$ *correspond à l'élément*

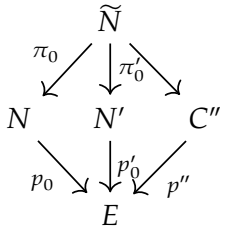
$$O_{\widetilde{N}}(\pm(\tilde{q} - \tilde{p} - \sigma\tilde{q} + \sigma\tilde{p}))$$

de P_0.

On considère maintenant un revêtement $\pi : \widetilde{C} \to C$ dans $\mathcal{S}_{g,0}$, donc associé à $\eta = p^*\delta'$, où $O(\delta')$ est d'ordre 2 dans $\operatorname{Pic}^0 E$. Si $f = p\pi : \widetilde{C} \to E$, on notera $f^*(JE[2]) = \{0, \varepsilon\}$ (puisque $f^*\delta' = 0$).

Lemme II.D.1.6.3. *Soient* $(P, L) \in \operatorname{Pr}(\mathcal{S}_{g,0}) = \mathcal{E}^2_{g-1}$ *et* ε *le seul élément non nul de* $f^*(JE[2])$. *Alors l'extension de* P *par* ε *est dans* $\partial\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$.

Démonstration. On considère un élément de $\mathcal{S}_{g+1,1}$ avec les notations de 1.1. Si on fait tendre P_1 vers P_2 sur E, la courbe C' dégénère en $N'/(Q' \sim \tau'_0 Q')$, où N' est lisse, revêtement étale de E de degré 2 par $p'_0 : N' \to E$, et $p'_0(Q') = P_1 = P_2$. On a un diagramme :



et le revêtement π_0 est dans $\delta_{g,0}$. On a :

$$C = N/(Q \sim \tau_0 Q), \qquad p_0(Q) = P_1 = P_2,$$
$$\widetilde{C} = \widetilde{N}/(\widetilde{Q} \sim \sigma_0''\widetilde{Q},\ \sigma_0\widetilde{Q} \sim \sigma_0'\widetilde{Q}), \qquad \pi_0(\widetilde{Q}) = Q.$$

Si on note P (resp. P_0) la variété de Prym associée à $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ (resp. $\pi_0\colon \widetilde{N} \to N$), on est dans la situation de 1.6.2. On a donc une extension

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow P \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

correspondant à $a = \mathcal{O}_{\widetilde{N}}(\pm(\widetilde{Q} - \sigma_0''\widetilde{Q} - \sigma_0\widetilde{Q} + \sigma_0'\widetilde{Q}))$. Or $a = \pi_0'^*\mathcal{O}_{N'}(\pm(Q' - \tau_0'Q'))$, où $Q' = \pi_0'(\widetilde{Q})$, et $\mathcal{O}_{N'}(x' - \tau_0'x')$ est, pour tout $x' \in N'$, le seul élément non nul de $\ker(JN' \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JE)$, c'est-à-dire $p_0'^*\alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, \mathcal{O}(\delta')\}$. Comme $P_0 \in \mathrm{Pr}(\delta_{g,0})$ et $P \in \partial\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$, la démonstration est terminée. □

On a ainsi mis en évidence une composante irréductible $\partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ de $\partial\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$, de dimension $2g-2$, telle que ρ_g induise un morphisme

$$\phi_g\colon \partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}^2_{g-1}, \qquad \phi_g^{-1}((P_0, L_0)) = \{\varepsilon\}$$

pour $(P_0, L_0) \in \mathrm{Pr}(\delta_{g,0}) \subset \mathcal{E}^2_{g-1}$.

D'autre part, Mumford a étudié dans [Mu 1] les espaces ∂N^g_k. Il en ressort ([Mu 1], p. 364) que ∂N^g_k est contenu dans la réunion de

$$\rho_g^{-1}(N^{g-1}_k),$$
$$\partial N^g_{k,1} = \{((A,\Theta),a) \in \partial\mathcal{A}_g \mid (A,\Theta) \in \mathcal{A}_{g-1},\ a \in A,\ \dim \mathrm{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a) \geq k\},$$
$$\partial N^g_{k,2} = \{((A,\Theta),a) \in \partial\mathcal{A}_g \mid \dim(\mathrm{Sing}\,\Theta \cdot \mathrm{Sing}\,\Theta_a) \geq k-1\}.$$

Soient C_g une composante irréductible de N^g_{g-4} contenant $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ et $\partial' C_g$ une composante irréductible de ∂C_g contenant $\partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$. On a

$$\dim \partial' C_g = \dim C_g - 1,$$
$$\partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} \subset \partial' C_g \subset \rho_g^{-1}(N^{g-1}_{g-4}) \cup \partial N^g_{g-4,1} \cup \partial N^g_{g-4,2}.$$

On admet provisoirement le résultat suivant :

Lemme II.D.1.6.4. *Soient $p\colon C \to E$ une courbe superelliptique de genre $g \geq 6$ et $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ un revêtement étale élément de $\delta_{g,0}$. On note (P_0, Ξ) la variété de Prym associée et ε le seul élément non nul de $(p\pi)^*(JE[2]) \subset P_0$. On a alors :*

$$\mathrm{Sing}(\Xi \cdot \Xi_\varepsilon) = \mathrm{Sing}\,\Xi = \mathrm{Sing}\,\Xi_\varepsilon.$$

En particulier, comme $\dim \mathrm{Sing}\,\Xi = g-5$ (1.2.4(i)), l'extension $P \in \partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ de P_0 correspondant à ε n'est ni dans $\rho_g^{-1}(N^{g-1}_{g-4})$, ni dans $\partial N^g_{g-4,1}$. On a donc

$$\partial'\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1} \subset \partial' C_g \subset \partial N^g_{g-4,2}.$$

En prenant les images par ρ_g, on obtient

$$\overline{\mathcal{E}}^2_{g-1} \subset \rho_g(\partial' C_g) \subset \rho_g(\partial N^g_{g-4,2}) \subset N^{g-1}_{g-5}.$$

Or, pour $g-1 \geq 5$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{g-1}$ est une composante irréductible de N^{g-1}_{g-5} (1.4.5). On en déduit

$$\overline{\mathcal{E}}^2_{g-1} = \rho_g(\partial' C_g).$$

Pour montrer que $C_g = \overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$, il suffit de montrer que $\dim C_g = 2g-1$, ou que $\dim \partial' C_g = 2g-2 = \dim \mathcal{E}^2_{g-1}$. C'est une conséquence du lemme suivant, qui termine donc la démonstration du théorème. □

Lemme II.D.1.6.5. *Avec les hypothèses et notations de 1.6.4, on a*

$$\{a \in P_0 \mid \dim(\operatorname{Sing}\Xi \cdot \operatorname{Sing}\Xi_a) \geq g-5\} = \{0, \varepsilon\}.$$

Démonstration de 1.6.4 et 1.6.5. On écrira P au lieu de P_0 et on remplace g par $g+1 \geq 6$ pour rester dans le cadre habituel. On rappelle qu'on a (1.2.1, 1.2.2, 1.2.4)

$$\begin{aligned}\Xi &= \{\pi''^* L'' \mid L'' \in \operatorname{Pic}^g C'',\ h^0(L'') \geq 1,\ \operatorname{Nm}_{p''} L'' = O(\delta)\},\\ \operatorname{Sing}\Xi &= \{\pi''^*(L'' \otimes p''^* M) \mid L'' \in \operatorname{Pic}^{g-4} C'',\ h^0(L'') \geq 1,\\ &\qquad M \in \operatorname{Pic}^2 E,\ \operatorname{Nm}_{p''} L'' \otimes M^{\otimes 2} = O(\delta)\}.\end{aligned}$$

On note $\varepsilon = f^*\alpha$, où $\alpha \in JE[2] \setminus \{0, O(\delta')\}$. Si $L = \pi''^* L''$ est dans Ξ, on a

$$h^0(L \otimes \varepsilon) = h^0(L'' \otimes p''^*\alpha) + h^0(L'' \otimes p''^*\alpha \otimes p''^* O(\delta')).$$

Si $L'' = O(D'')$, où D'' est effectif p''-simple, on a par 1.2.7

$$\begin{aligned}h^0(L'' \otimes p''^*\alpha) &\leq h^0(E, \alpha) + h^0(\operatorname{Nm} L'' \otimes \alpha \otimes O(-\delta''))\\ &= h^0(O(\delta') \otimes \alpha) = 0.\end{aligned}$$

Donc $L \notin \Xi_\varepsilon$. On en déduit

$$\begin{aligned}\Xi \cdot \Xi_\varepsilon = \{\pi''^*(L'' \otimes p''^* M) \mid &L'' \in \operatorname{Pic}^{g-2} C'',\ h^0(L'') \geq 1,\\ &M \in \operatorname{Pic}^1 E,\ \operatorname{Nm}_{p''} L'' \otimes M^{\otimes 2} = O(\delta)\}.\end{aligned}$$

Pour un élément L de $(\Xi \cdot \Xi_\varepsilon) \setminus \operatorname{Sing}\Xi$ (c'est-à-dire avec $L'' = O(D'')$, D'' effectif p''-simple), on a par 1.2.7

$$0 \longrightarrow H^0(E, M) \longrightarrow H^0(L'' \otimes p''^* M) \longrightarrow H^0(M \otimes \operatorname{Nm} L'' \otimes O(-\delta'')) = 0.$$

Si on note $s_{D''}$ une section de diviseur D'' et s_N une base de $H^0(E, N)$ pour tout $N \in \operatorname{Pic}^1 E$, on a

$$H^0(\widetilde{C}, L) = \langle \pi''^*(s_{D''}\, p''^* s_M),\ \pi''^*(s_{D''}\, p''^* s_{M\otimes\delta'})\rangle.$$

De même,

$$H^0(\widetilde{C}, L \otimes \varepsilon) = \langle \pi''^*(s_{D''}\, p''^* s_{M\otimes\alpha}),\ \pi''^*(s_{D''}\, p''^* s_{M\otimes\delta'\otimes\alpha})\rangle.$$

Si $G\colon \Xi_{\text{lisse}} \to \mathbb{P}T_0^\vee P \simeq \mathbb{P}H^0(K_C+\eta) \simeq \mathbb{P}H^0(\delta'')$ est l'application de Gauss, on en déduit

$$G(L) = p''_*D'' + \operatorname{div}(s_M) + \operatorname{div}(s_{M\otimes\delta'}) \in |\delta''|,$$
$$G(L_\varepsilon) = p''_*D'' + \operatorname{div}(s_{M\otimes\alpha}) + \operatorname{div}(s_{M\otimes\delta'\otimes\alpha}) \in |\delta''|.$$

En particulier, $G(L) \neq G(L_\varepsilon)$ et $\Xi\cdot\Xi_\varepsilon$ est lisse en L, ce qui démontre 1.6.4.

Il reste à montrer 1.6.5. Soit $a \in P$ tel que $\dim(\operatorname{Sing}\Xi\cdot\operatorname{Sing}\Xi_a) \geq g-4$. Comme $\operatorname{Sing}\Xi$ est irréductible de dimension $g-4$ (1.2.4), on a $\operatorname{Sing}\Xi_a = \operatorname{Sing}\Xi$. On écrit $a = \pi''^*a''$, où $a'' \in P''$ (1.5.1), et on note T''_2 l'ensemble

$$\{p''^*M\otimes O_{C''}(D'') \mid M\in \operatorname{Pic}^2 E,\ D''\in C''^{(g-4)}\}.$$

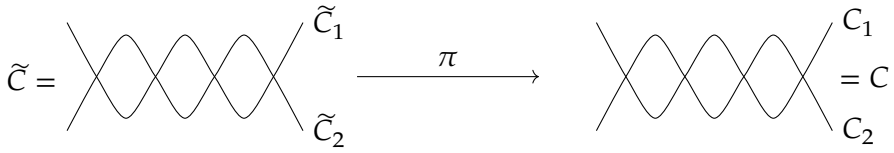
Comme

$$\{L''\in T''_2 \mid \operatorname{Nm}L'' = O(\delta)\} = (\pi''^*)^{-1}(\operatorname{Sing}\Xi),$$

on en déduit $T''_2 + a'' = T''_2$. On conclut par A4.2 que $a'' \in P''\cap p''^*JE = p''^*JE[2]$, soit $a\in\{0,\varepsilon\}$. □

II.D.2 Étude des familles $\mathcal{H}_{g+1,t}$ et de la famille $\mathcal{T}_6$

On s'intéresse dans cette partie aux revêtements admissibles du type

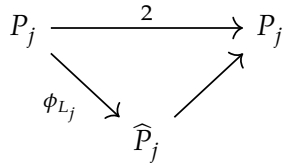


où $g(C_1) = t-1$, $g(C_2) = g-t-1$, C_1 et C_2 sont lisses et $1\leq t\leq \lfloor g/2\rfloor$.

Les revêtements $\pi_j\colon \widetilde{C}_j \to C_j$ sont ramifiés en quatre points. On note $P_j = \ker(J\widetilde{C}_j \xrightarrow{\text{Nm}} JC_j)$. La polarisation de $J\widetilde{C}_j$ induit une polarisation L_j sur P_j et on a ([Mu 2], Corollary 1, p. 332, et I.3.3)

$$H(L_j) \simeq \pi_j^*(JC_j[2]).$$

Ces polarisations sont donc de type $(1,2,\dots,2)$, avec $\dim P_j - 1$ entrées égales à 2. On a des factorisations



qui induisent des polarisations $\hat{L}_j$ sur $\widehat{P}_j$, de type (2).

On note (P,L) la variété de Prym principalement polarisée associée au revêtement admissible π.

Proposition II.D.2.1. *Il existe une isogénie de degré 4, $g\colon \widehat{P}_1\times\widehat{P}_2 \to P$, telle que $g^*L \simeq \hat{L}_1\boxtimes\hat{L}_2$.*

En particulier, $\Pr(\mathcal{H}_{g+1,t}) = \mathcal{P}^2_{t,g-t} \subset \mathcal{A}^2_{t,g-t}$ *pour* $1\leq t\leq\lfloor g/2\rfloor$ (*cf. définitions A1.1.3 et A2.3.5*).

Démonstration. D'après [Be 1], p. 159, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{T}[2] & \longrightarrow & P\times\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & P_1\times P_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\mathbb{C}^*)^3\simeq\widetilde{T} & \longrightarrow & J\widetilde{C} & \longrightarrow & J\widetilde{C}_1\times J\widetilde{C}_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nm}} & & \\
0 & \to & (\mathbb{C}^*)^3\simeq T & \longrightarrow & JC & \longrightarrow & JC_1\times JC_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Il existe donc une isogénie de degré 4, $f\colon P\to P_1\times P_2$, qui vérifie $f^*(L_1\boxtimes L_2)\simeq L^{\otimes 2}$.

On pose $g=\phi_L^{-1}\hat{f}\colon \widehat{P}_1\times\widehat{P}_2\to\widehat{P}\xrightarrow{\sim}P$. Il est facile de vérifier que $\hat{g}\phi_L g=\phi_{\widehat{L}_1}\times\phi_{\widehat{L}_2}$, ce qui prouve la proposition. □

2.2. On s'intéresse maintenant à la famille $\mathcal{J}_6$, pour laquelle $C=C_1\cup C_2$, C_1 est rationnelle lisse, $C_1\cap C_2=\{u_1,\dots,u_4\}$, et $\omega_{C_2}\simeq O_{C_2}(u_1+\cdots+u_4)$. On supposera C_2 lisse non hyperelliptique, de genre 3.

Par 2.1, il existe une isogénie

$$f\colon F\times\widehat{P}_2\longrightarrow P=\mathrm{Prym}(\widetilde{C}/C), \tag{2.3}$$

où $F\simeq J\widetilde{C}_1$ est une courbe elliptique. Elle vérifie $f^*L\simeq L_F\boxtimes\hat{L}_2$, où L_F est une polarisation de degré 2 sur F.

On rappelle qu'on veut montrer que $\mathrm{Pr}(\mathcal{J}_6)\subset\overline{\mathcal{E}}^2_5$. On utilise pour cela A1.1.1 et 1.5.2 avec ses notations : il suffit de montrer que $(\widehat{P}_2,\hat{L}_2)\in\overline{\mathcal{E}}_{4,(2)}\subset\mathcal{A}_{4,(2)}$. La courbe C_1 ne joue plus aucun rôle : la courbe C_2 est plongée dans $\mathbb{P}^2$ par $|\omega_{C_2}|$, le revêtement $\pi_2\colon\widetilde{C}_2\to C_2$ est ramifié le long d'une section par une droite D, et on veut montrer que la variété de Prym duale $(\widehat{P}_2,\hat{L}_2)$ est dans $\overline{\mathcal{E}}_{4,(2)}$.

Considérons le cas particulier $C=D\cup C_2$ d'élément de $\mathcal{J}_6$. La courbe C est une quintique plane. Le revêtement $\pi\colon\widetilde{C}\to C$ est pair au sens de [Ma] puisque sa variété de Prym (P,L) est dans N^5_1. Cette dernière est donc isomorphe à la jacobienne (JN,Θ) d'une courbe N lisse de genre 5 ([Be 2], [Ma], [Tj 1], [Tj 2]). Le lieu singulier du diviseur Θ est isomorphe à la courbe $\widetilde{C}$, donc est réductible. Il ressort de l'analyse de [Te] qu'il existe un morphisme de degré 2, $p\colon N\to E$, où E est la courbe elliptique revêtement double de D ramifié sur $D\cap C_2$. Si on note $(Q,L_Q)\in\overline{\mathcal{E}}_{4,(2)}$ la variété de Prym associée à p, on a deux isogénies :

$$\begin{aligned} f&\colon E\times\widehat{P}_2\longrightarrow P && \text{(par 2.3)},\\ g&\colon E\times Q\longrightarrow JN\simeq P && \text{(cf. 1.5.3)}, \end{aligned}$$

et $f^*L\simeq L_E\boxtimes\hat{L}_2$, $g^*L\simeq L_E\boxtimes L_Q$.

On va maintenant montrer que $(\widehat{P}_2,\hat{L}_2)$ est isomorphe à (Q,L_Q), ce qui terminera la démonstration. Pour cela, on utilise A1.1.1 et ses notations. Les injections $j_E(f)\colon E\hookrightarrow JN$ (déduite de f) et $j_E(g)\colon E\hookrightarrow JN$ (déduite de g) induisent toutes deux des morphismes de degré 2 de N sur E. Comme C_2 est irréductible, il découle de [Te] que la structure superelliptique de N est unique. Quitte à modifier f par un automorphisme de E et de N, on peut supposer que $j_E(f)=j_E(g)$. La conclusion est alors une conséquence directe de l'unicité de X'' dans A1.1.1.

II.D.3 La construction de Recillas et la construction tétragonale de Donagi

3.1. La construction de Recillas

Rappelons la construction suivante, exposée dans [Re] et précisée dans [Do–S], pp. 47–49.

Soit X une courbe lisse de genre g munie d'un g^1_4, $f : X \to \mathbb{P}^1$. La courbe $\widetilde{C} = S^2_{\mathbb{P}^1} X$ a au plus des points doubles comme singularités et admet un morphisme de degré 6, $f^{(2)} : \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1$. Il y a sur $\widetilde{C}$ une involution naturelle ι qui à $a+b$ associe $f^{-1}f(a) - (a+b)$. On note $\pi : \widetilde{C} \to \widetilde{C}/\iota = C$ le morphisme induit, par lequel $f^{(2)}$ se factorise. La courbe C est trigonale.

Théorème II.D.3.1.1. *Le revêtement $\pi : \widetilde{C} \to C$ est admissible et sa variété de Prym est isomorphe à la jacobienne de X.*

Corollaire II.D.3.1.2.

1. *Les variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes obtenues en identifiant deux points d'une courbe hyperelliptique sont des jacobiennes hyperelliptiques* (*comparer* [Be 1], *Theorem 4.10, cas b*).
2. *Le lieu des jacobiennes hyperelliptiques de genre g est contenu dans* $\mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0})$.
3. *Le lieu des jacobiennes superelliptiques de genre g est contenu dans* $\mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,1})$.

Démonstration. Soit X une courbe hyperelliptique ou superelliptique de genre g. On a donc un morphisme de degré 2, $p : X \to B$, d'involution associée σ sur X, de ramification Δ_p sur B, avec $g(B) = 0$ ou 1. On choisit un g^1_2, $q : B \to \mathbb{P}^1$, de ramification Δ_q sur $\mathbb{P}^1$, d'involution τ. Si $\tau(\Delta_p) \neq \Delta_p$, le groupe de Galois de la clôture galoisienne de $f = qp : X \to \mathbb{P}^1$ est D_4. La courbe $\widetilde{C}$ associée par la construction de Recillas est

$$\widetilde{C} = \{x + \sigma x \mid x \in X\} \cup \{x + y \mid px = \tau py\} \simeq B \cup \widetilde{H},$$
$$C = \widetilde{C}/\iota \simeq \mathbb{P}^1 \cup H,$$

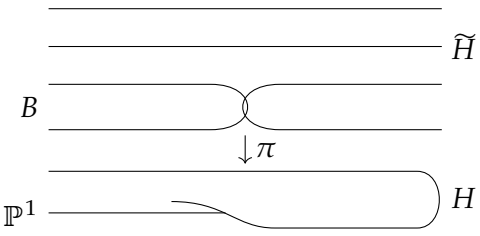
et H est hyperelliptique.

Au-dessus de $Q \in \Delta_q \subset \mathbb{P}^1$, la fibre de $f^{(2)}$ est

— sur B : $x + \sigma x$ deux fois, avec $f(x) = Q$;

— sur $\widetilde{H}$: $x + x$, $x + \sigma x$, $\sigma x + x$, $\sigma x + \sigma x$.

La figure locale est donc :



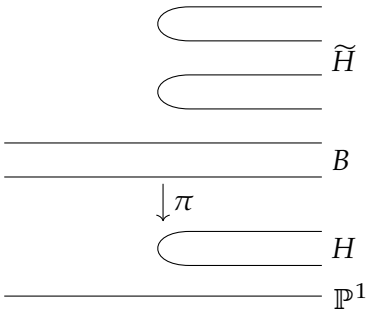
Donc H rencontre $\mathbb{P}^1$ en un point au-dessus de Q.

Au-dessus de $q(P)$, où $P \in \Delta_p \subset B$, la fibre est

— sur B : $2x$, $y + \sigma y$, avec $p(x) = P$, $p(y) = \tau P$;

— sur $\widetilde{H}$: $x + y$ deux fois, $x + \sigma y$ deux fois.

La figure locale est :



Donc H ne coupe pas $\mathbb{P}^1$, mais le morphisme $\phi\colon H \to \mathbb{P}^1$ est ramifié. On a donc :

— $H \cap \mathbb{P}^1$ s'envoie par ϕ sur Δ_q et est Δ_q sur $\mathbb{P}^1$;

— ϕ est ramifié sur $q(\Delta_p)$.

Si $g(B) = 0$, H coupe $\mathbb{P}^1$ en deux points quelconques. Il est facile de voir qu'on peut obtenir ainsi toutes les courbes hyperelliptiques H de genre g. En inversant la construction de Recillas ([Be 2], p. 389), on a la réciproque, ce qui prouve 1) (utiliser [Be 1], 4.11.3). Si $\Delta_p = P_1 + \cdots + P_{2g+2}$, on peut choisir q de façon que $\tau P_i = P_j$ si et seulement si $\{i,j\} = \{1,2\}$. La courbe H acquiert un point singulier au-dessus de $q(P_1)$. Ceci prouve 2).

Si $g(B) = 1$, H coupe $\mathbb{P}^1$ en quatre points, donc C est dans $\mathcal{H}_{g+1,1}$. □

3.2. La construction tétragonale de Donagi

On part d'un revêtement double étale connexe $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ d'une courbe lisse C admettant un g^1_4, $h\colon C \to \mathbb{P}^1$. On a donc un morphisme $\mathbb{P}^1 \to C^{(4)}$ qui à $P \in \mathbb{P}^1$ associe sa fibre $h^{-1}(P)$. On pose

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} = \mathbb{P}^1 \times_{C^{(4)}} \widetilde{C}^{(4)} & \longrightarrow & \widetilde{C}^{(4)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C^{(4)}. \end{array}$$

L'involution σ induit une involution γ sur $\tilde{S}$.

Théorème II.D.3.2.1 (Donagi ; [Do] et [Be 3], §3(c)). *La courbe $\tilde{S}$ est réunion disjointe de deux courbes $\widetilde{C}_1$ et $\widetilde{C}_2$, stables par γ. Les revêtements $\widetilde{C}_j \to \widetilde{C}_j/\gamma$, $j = 1,2$, sont admissibles et leurs variétés de Prym sont isomorphes à la variété de Prym de $\pi\colon \widetilde{C} \to C$.*

On va maintenant appliquer cette construction aux revêtements de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ et de $\mathcal{S}_{g+1}$, pour lesquels la courbe C admet des g^1_4.

3.2.2. Le cas des familles $\mathcal{S}_{g+1,t}$. On prend les notations de 1.1 et on choisit un g^1_2, $\phi\colon E \to \mathbb{P}^1$, d'involution associée ι. On pose $h = \phi p\colon C \to \mathbb{P}^1$. La fibre de $P \in \mathbb{P}^1$ sous $h\pi = \phi f\colon \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1$ est $\{x, \sigma x, \sigma' x, \sigma'' x, y, \sigma y, \sigma' y, \sigma'' y\}$, où $f(x) = \iota f(y)$ et $\phi f(x) = P$.

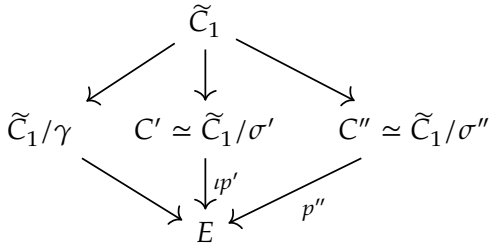
Avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_1 = \{&x + \sigma'' x + y + \sigma' y,\ \sigma x + \sigma'' \sigma x + y + \sigma' y, \\ &x + \sigma'' x + \sigma y + \sigma' \sigma y,\ x + \sigma' x + y + \sigma'' y, \text{ et images par } \sigma\}, \\ \widetilde{C}_2 = \widetilde{C}'_2 \cup \widetilde{C}''_2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{C}'_2 &= \{x+\sigma' x+y+\sigma' y,\ \sigma x+\sigma'\sigma x+y+\sigma' y, \text{ et images par } \sigma\}\\ &\simeq \{a'+b'\in C'^{(2)} \mid p'a' = \iota p' b'\},\\ \widetilde{C}''_2 &\simeq \{a''+b''\in C''^{(2)} \mid p''a'' = \iota p'' b''\}.\end{aligned}$$

1. On suppose que $\iota P_i \neq P_j$ pour $1\leq i\leq 2t<j\leq 2g$. On voit facilement (en utilisant [Be 3], Proposition 3, résultat de Welters [We 3]) que $\widetilde{C}_1$ est lisse et que γ y opère sans point fixe. Le groupe $\{1,\sigma,\sigma',\sigma''\}$ opère sur $\widetilde{C}_1$. On vérifie qu'il induit un diagramme commutatif :



   Le revêtement étale $\widetilde{C}_1\to\widetilde{C}_1/\gamma$ est donc dans $\mathcal{S}_{g+1,t}$. On peut remarquer que pour $t=0$ (c'est-à-dire $2\delta'=0$), on a toujours $\iota\delta'\equiv\delta'$ et le revêtement obtenu est isomorphe à π. C'est d'ailleurs le seul cas où les fibres de $\mathrm{Pr}|_{\mathcal{S}_{g+1,t}}$ sont de dimension 0 (1.4.2).

2. Les courbes $\widetilde{C}'_2$ et $\widetilde{C}''_2$ se coupent en quatre points situés au-dessus de la ramification de ϕ sur $\mathbb{P}^1$. Si $\iota P_i\neq P_j$ pour $1\leq i,j\leq 2t$ (resp. $2t<i,j\leq 2g$), alors $\widetilde{C}'_2$ (resp. $\widetilde{C}''_2$) est lisse. On a des morphismes de degré 2

$$\begin{aligned}\widetilde{C}'_2/\gamma &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en } \phi P_1,\dots,\phi P_{2t},\\ \widetilde{C}''_2/\gamma &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{ramifié en } \phi P_{2t+1},\dots,\phi P_{2g}.\end{aligned}$$

   Plus précisément, on distingue les cas suivants.

   i) $t=0$. L'involution ι se remonte à C' et $\widetilde{C}'_2$ est réunion disjointe de deux courbes rationnelles lisses stables par γ. La courbe $C_2=\widetilde{C}_2/\gamma$ est réunion de la courbe hyperelliptique $\widetilde{C}''_2/\gamma$ de genre $g-1$ et de deux courbes rationnelles la coupant chacune en deux points. Sa réduction stable est dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0}$. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les courbes de $\mathcal{H}_{g+1,0}$.

   ii) $t=1$. La courbe C_2 est réunion de la courbe hyperelliptique $\widetilde{C}''_2/\gamma$ de genre $g-2$ et d'une courbe rationnelle la coupant en quatre points. On est donc dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,1}$. Toute courbe hyperelliptique lisse de genre $g-2$ peut être ainsi obtenue. Les quatre points d'intersection sont aussi quelconques sur cette courbe. Enfin, ils sont aussi quelconques sur $\mathbb{P}^1$ puisque, pour tous $R_1,\dots,R_4,S_1,\dots,S_4\in\mathbb{P}^1$ tels que $[R_1:R_2:R_3:R_4]\neq[S_1:S_2:S_3:S_4]$, il existe un morphisme de degré 2, $\psi\colon\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, tel que $\psi(S_j)=R_j$, $1\leq j\leq 4$.

   iii) $t\geq 2$. On obtient deux courbes hyperelliptiques se coupant en quatre points. On est dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,t}$.

On a montré :

Théorème II.D.3.2.3. *Pour tout g et $0\leq t\leq\lfloor g/2\rfloor$, on a $\overline{\mathcal{E}}^2_{t,g-t}\subset\mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,t})$, avec égalité pour $t=0$ et 1.*

3.2.4. La famille $\mathcal{S}_{g+1}$. On rappelle que c'est le cas où la courbe C est lisse et admet une structure superelliptique $p\colon C \to E$, de ramification $\Delta_p = P_1 + \cdots + P_{2g}$ sur E et d'involution associée τ, mais où la clôture galoisienne du morphisme $f = p\pi\colon \widetilde{C} \to E$ a pour groupe D_4. On choisit un g^1_2, $\phi\colon E \to \mathbb{P}^1$, de ramification $\Delta_\phi = R_1 + \cdots + R_4$ sur $\mathbb{P}^1$ et d'involution associée ι. On a donc un g^1_4, $h = \phi p\colon C \to \mathbb{P}^1$, dont on suppose le groupe de monodromie égal à D_4 (par exemple si $\iota(\Delta_p) \neq \Delta_p$), et auquel on applique la construction tétragonale.

Soit $P \in \mathbb{P}^1$. On écrit sa fibre sous $h\pi\colon \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C & \xrightarrow{p} & E & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^1 \\ x, \sigma x & \mapsto & a & \mapsto & e & \mapsto & P \\ y, \sigma y & \mapsto & \tau a & \mapsto & e & \mapsto & P \\ \bar{x}, \sigma\bar{x} & \mapsto & b & \mapsto & \iota e & \mapsto & P \\ \bar{y}, \sigma\bar{y} & \mapsto & \tau b & \mapsto & \iota e & \mapsto & P. \end{array}$$

Avec les notations précédentes, les fibres de $\widetilde{C}_1$ et de $\widetilde{C}_2$ au-dessus de P sont respectivement

$$\begin{aligned} (\widetilde{C}_1)_P = \{&x + \bar{x} + y + \bar{y},\ \sigma x + \sigma\bar{x} + y + \bar{y},\\ &\sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y},\ \sigma x + \bar{x} + y + \sigma\bar{y}, \text{ et images par } \sigma\},\\ (\widetilde{C}_2)_P = \{&\sigma x + \bar{x} + y + \bar{y},\ x + \sigma\bar{x} + y + \bar{y},\\ &x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y},\ x + \bar{x} + y + \sigma\bar{y}, \text{ et images par } \sigma\}. \end{aligned}$$

On peut montrer par un calcul d'action de groupes que $\widetilde{C}_1$ et $\widetilde{C}_2$ sont irréductibles. On remarque aussi que τ induit une involution sur C_1 (et sur C_2), qui envoie $[t + u + v + w] \in C_1$, où $f(t) = f(v)$, sur $[\sigma t + u + \sigma v + w]$ (encore une fois, ceci peut être prouvé rigoureusement par un calcul d'action de groupes que nous ne ferons pas). Par exemple, $[x + \bar{x} + y + \bar{y}]$ est envoyé sur $[\sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = [x + \sigma\bar{x} + y + \sigma\bar{y}]$. On note $D_j = C_j/\tau$ et on a

$$\begin{aligned} (D_1)_P = \{&[x + \bar{x} + y + \bar{y}] = [\sigma x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = \text{images par } \sigma,\\ &[\sigma x + \sigma\bar{x} + y + \bar{y}] = [\sigma x + \bar{x} + y + \sigma\bar{y}] = \text{images par } \sigma\},\\ (D_2)_P = \{&[\sigma x + \bar{x} + y + \bar{y}] = [x + \bar{x} + \sigma y + \bar{y}] = \text{images par } \sigma,\\ &[x + \sigma\bar{x} + y + \bar{y}] = [x + \bar{x} + y + \sigma\bar{y}] = \text{images par } \sigma\}. \end{aligned}$$

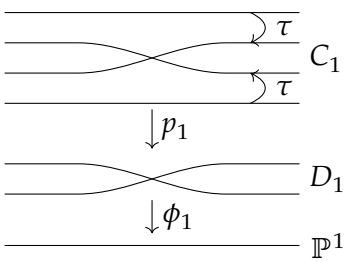
On a donc des morphismes

$$\widetilde{C}_j \xrightarrow{\pi_j} C_j \xrightarrow{p_j} D_j \xrightarrow{\phi_j} \mathbb{P}^1, \qquad j = 1, 2.$$

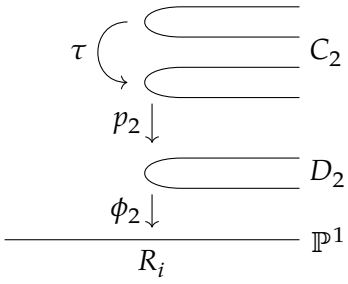
On remarque qu'au-dessus de R_i, $i = 1, \ldots, 4$, il n'y a qu'un seul point sur D_1 et sur D_2. Donc soit ϕ_j est ramifié en ce point, soit D_j y est singulière. Que se passe-t-il sur C_1 au-dessus d'un R_i ? On a alors $x + y = \bar{x} + \bar{y}$ et

— soit $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ et $(C_1)_{R_i} = \{[2x + 2y], [2\sigma x + 2y], [x + \sigma x + y + \sigma y]\}$.

Par le critère de Welters ([We 3], [Be 3], Proposition 3), C_1 est lisse en les deux premiers de ces points mais pas en le troisième. La courbe D_1 est singulière au-dessus de R_i et la figure locale est la suivante :



On a $(C_2)_{R_i} = \{[x + \sigma x + 2y], [2x + y + \sigma y]\}$ et C_2 est lisse en ces points par le critère de Welters. La courbe D_2 est lisse au-dessus de R_i et ϕ_2 est ramifié en R_i. La figure locale est la suivante :



— soit $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$, et la situation est inversée.

On en déduit que $\Delta_\phi = R_1 + \cdots + R_4$ est réunion disjointe de la ramification de ϕ_1 et de celle de ϕ_2. Comme les D_j sont irréductibles, on en déduit qu'elles sont toutes deux obtenues à partir de $\mathbb{P}^1$ en identifiant deux paires de points. Les courbes C_j sont donc obtenues en identifiant deux paires de points sur des courbes hyperelliptiques NC_j. On est donc dans $\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0}$. Enfin, la ramification Δ_j de $p_j \colon NC_j \to ND_j \simeq \mathbb{P}^1$ satisfait à $\phi_j(\Delta_j) = \phi(\Delta_p)$, donc on voit qu'on obtient ainsi tous les revêtements de $\mathcal{H}_{g+1,0}$. On a donc

$$\mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{S}}_{g+1}) = \mathrm{Pr}(\overline{\mathcal{H}}_{g+1,0}).$$

II.D.4 Le mot de la fin

En dimension $g \geq 6$, on sait maintenant que $\overline{\mathcal{J}}_g$, $\overline{\mathcal{E}}^2_g$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ et les $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq \lfloor g/2 \rfloor$ sont des composantes irréductibles de N^g_{g-4} ([An–M], 1.4.5, 1.6.1, A1.4.5).

Proposition II.D.4.1. *Pour $g \geq 6$, ces composantes sont distinctes deux à deux.*

Démonstration. Le fermé $\overline{\mathcal{J}}_g$ est distinct de $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,g-1}$ et de $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ car une jacobienne générique est simple, et de $\overline{\mathcal{E}}^2_g$ car $3g-3 \neq 2g$. La seule coïncidence de dimension qui reste est $\dim \mathcal{E}^2_6 = \dim \mathcal{A}^2_{3,3} = 12$. Pour un élément générique de $\mathcal{E}^2_6$, l'intersection des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta est une courbe elliptique de degré 6 dans $\mathbb{P}^5$ (cf. 1.3.1(1)). Pour un élément générique de $\mathcal{A}^2_{3,3}$, c'est une union disjointe de deux plans projectifs (A1.4.4). Ils sont donc non isomorphes. □

Proposition II.D.4.2. *L'espace N^5_1 a cinq composantes irréductibles de dimensions respectives $12, 10, 9, 9, 11$, à savoir $\overline{\mathcal{J}}_5$, $\overline{\mathcal{E}}^2_5$, $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,4}$, $\mathcal{A}^2_{2,3}$ et $\mathcal{A}_{1,4}$ (cf. définition ci-dessous).*

Démonstration. Comme l'application $\mathrm{Pr} \colon \mathcal{R}_6 \to \mathcal{A}_5$ est surjective ([Be 1]), il ressort de la liste de Beauville, du commentaire qui la précède et de 2.1, 2.2, 3.2.3, 3.2.4 que

$$N^5_1 = \overline{\mathcal{J}}_5 \cup \overline{\mathcal{E}}^2_5 \cup \overline{\mathcal{E}}^2_{1,4} \cup \mathcal{A}^2_{2,3} \cup \mathcal{A}_{1,4} \cup \mathcal{A}_{2,3},$$

où $\mathcal{A}_{t,g-t} \subset \mathcal{A}_g$ désigne l'ensemble des variétés abéliennes produit de deux variétés abéliennes de dimensions respectives t et $g-t$. Les dimensions respectives sont $12, 10, 9, 9, 11, 9$ (1.4.2, A1.1.3). On remarque tout de suite que $\mathcal{A}_{2,3} \subset \overline{\mathcal{J}}_5$. Tous ces ensembles sont irréductibles et $\overline{\mathcal{J}}_5$, $\overline{\mathcal{E}}^2_5$ et $\mathcal{A}^2_{2,3}$ sont des composantes de N^5_1 ([An–M], 1.4.5, A1.4.5). Comme $\mathcal{A}_{1,4}$

n'est pas inclus dans $\overline{\mathcal{J}}_5$, c'est aussi une composante de N^5_1. Il reste à vérifier que $\overline{\mathcal{E}}^2_{1,4}$ n'est pas inclus dans $\overline{\mathcal{J}}_5 \cup \overline{\mathcal{E}}^2_5 \cup \mathcal{A}^2_{2,3} \cup \mathcal{A}_{1,4}$. C'est évident pour $\mathcal{A}_{1,4}$ puisque $\mathcal{E}^2_{1,4} \not\subset N^5_2 \supset \mathcal{A}_{1,4}$.

Si un élément générique (P, Ξ) de $\mathcal{E}^2_{1,4}$ est la jacobienne d'une courbe C de genre 5, C est lisse non hyperelliptique puisque $\dim \operatorname{Sing} \Xi = 1$ (1.2.4). L'espace vectoriel engendré par les équations des cônes tangents aux points doubles de Ξ a pour dimension $\binom{5+1}{2} - (3 \cdot 5 - 3)$, car $P \simeq JC$ ([Gr 1]), et $\binom{5+1}{2} - (3 \cdot 5 - 2)$ par 1.3.1(2). Contradiction.

Si c'est un élément de $\mathcal{A}^2_{2,3}$, il est aussi générique dans $\mathcal{A}^2_{2,3}$, qui a même dimension que $\mathcal{E}^2_{1,4}$. L'intersection des cônes tangents aux points doubles de Ξ devrait être à la fois un cône sur une courbe elliptique de $\mathbb{P}^3$ (1.3.1) et une union disjointe $\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^2$ (A1.4.4). Si c'est un élément de $\overline{\mathcal{E}}^2_5$, c'est la variété de Prym d'un revêtement admissible $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ de $\overline{\mathcal{S}}_{6,0}$. Comme $\operatorname{Sing} \Xi$ est irréductible, on n'est pas dans le cas exceptionnel 1.2.9. Si la courbe C était lisse, on pourrait donc appliquer 1.3.1 et aboutir à une contradiction. Vu la dimension de $\mathcal{E}^2_{1,4}$, la courbe C, munie de son involution τ, est l'une des courbes suivantes.

1. $C = H/(x \sim y,\ \tau x \sim \tau y)$, où H est hyperelliptique de genre 4, d'involution hyperelliptique τ. La variété P est isogène à $R = \ker(J\widetilde{H} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JH)$ ([Be 1], Remark 3.6), où $\widetilde{H}$ est la normalisée de $\widetilde{C}$. Pour la même raison, la variété de Prym $\overline{P}$ du revêtement admissible de $\overline{C} = H/(x \sim \tau x,\ y \sim \tau y)$ induit est isogène à R. Mais $\overline{C}$ est hyperelliptique, donc ([Be 1], Theorem 4.10) $\overline{P}$ est une jacobienne hyperelliptique. Ceci est impossible puisque $P \in \mathcal{E}^2_{1,4}$ n'est pas simple et qu'une jacobienne hyperelliptique générique est simple.
2. $C = N/(x \sim \tau x)$, où N est superelliptique lisse de genre 5, d'involution τ. Le revêtement $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ ne peut être celui de Wirtinger, puisqu'on aurait alors $P \simeq JN$, que les jacobiennes superelliptiques de genre 5 forment une famille de dimension 8 et que $\dim \mathcal{E}^2_{1,4} = 9$. Donc $\widetilde{C}$ est irréductible, de normalisée $\widetilde{N}$, et $\widetilde{N} \to N$ est ramifié en x et τx. La courbe $\widetilde{C}$ a un point double O qui est fixe par σ. Comme $p_a(\widetilde{C}/\sigma') = 1$ (on est dans $\overline{\mathcal{S}}_{6,0}$) et qu'il existe un morphisme de $\widetilde{C}/\sigma' = C'$ sur une courbe elliptique lisse, C' est lisse et $p'\colon C' \to E$ est étale. Ceci contredit le fait que $\pi'(O)$ est fixe par τ'. Donc ce revêtement n'est pas dans $\overline{\mathcal{S}}_{6,0}$.

□

II.E Compléments sur les variétés de Prym éléments de N^g_{g-4}

Le théorème principal de II.D donne la décomposition suivante de la famille des variétés de Prym irréductibles (P, Ξ) de dimension $g \geq 5$ vérifiant $\dim \operatorname{Sing} \Xi \geq g - 4$:

$$N^g_{g-4} \cap \mathcal{P}^{\mathrm{irr}}_g = \mathcal{J}_g \cup \overline{\mathcal{E}^2_g} \cup \overline{\mathcal{E}^2_{1,g-1}} \cup \bigcup_{2 \leq t \leq g/2} \mathcal{P}^{2,\mathrm{irr}}_{t,g-t}.$$

Les adhérences sont prises dans $\mathcal{A}^{\mathrm{irr}}_g$ (cf. I.3.12) ; $\mathcal{P}^{2,\mathrm{irr}}_{t,g-t}$ est l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$, défini dans A2.3 ;

$$\mathcal{E}^2_g = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,0}), \qquad \mathcal{E}^2_{1,g-1} = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,1})$$

(la définition de $\mathcal{S}_{g+1,t}$ est rappelée plus bas).

Les résultats de II.D fournissent de plus une description géométrique précise des éléments de $\mathcal{E}^2_g$ et de $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$.

Cette section sera consacrée d'une part à la description des éléments des familles $\overline{\mathcal{S}}_{g+1,t}$ et des variétés de Prym associées, c'est-à-dire de $\overline{\mathcal{E}^2_{t,g-t}}$, d'autre part à l'étude des singularités du diviseur thêta de certains éléments de $\overline{\mathcal{E}^2_g}$.

On étudie aussi brièvement la situation en dimension 4.

II.E.1 Les familles $\overline{\mathcal{E}^2_{t,g-t}}$

Pour $0 \leq t \leq g/2$, la famille $\mathcal{S}_{g+1,t}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{R}_{g+1}$ formé des revêtements doubles étales $\pi : \widetilde{C} \to C$ des courbes lisses connexes C de genre $g+1$ admettant une structure superelliptique $p : C \to E$, tels que le groupe de Galois de $p\pi$ soit $\{1, \sigma, \sigma', \sigma''\}$, isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$, avec $\widetilde{C}/\sigma = C$, $C' = \widetilde{C}/\sigma'$ de genre $t+1$, $C'' = \widetilde{C}/\sigma''$ de genre $g-t+1$. On emploiera les notations de II.D.1.1, en particulier $\mathcal{E}^2_{t,g-t} = \mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})$. On étudie les dégénérescences de tels revêtements pour lesquelles π reste admissible.

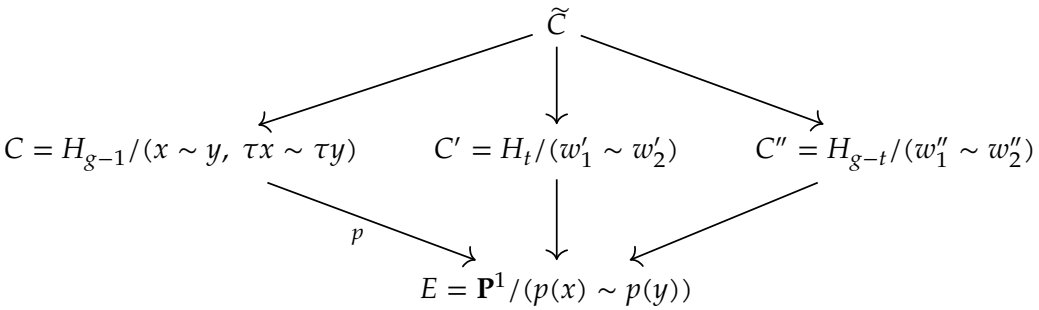
Si E reste lisse, on déduit de II.D.1.5.1 et du fait que P' et P'' restent des variétés abéliennes que JC' et JC'' restent des variétés abéliennes. Il s'ensuit que l'on est dans un des cas suivants :

— C' et C'' lisses, $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$. On est alors toujours dans $\mathcal{S}_{g+1,t}$.

— C' et C'' lisses, $\Delta' \cap \Delta'' \neq \emptyset$. En vertu de II.D.3.2.2, il suffit de faire une construction tétragonale bien choisie pour se ramener, sans changer la variété de Prym, au premier cas.

— C' est une réunion de deux copies de E se coupant en un point, de sorte que $t = 1$. La variété de Prym P est alors la jacobienne de C''.

Si E est irréductible non lisse, on est dans la situation suivante, si $t > 0$:

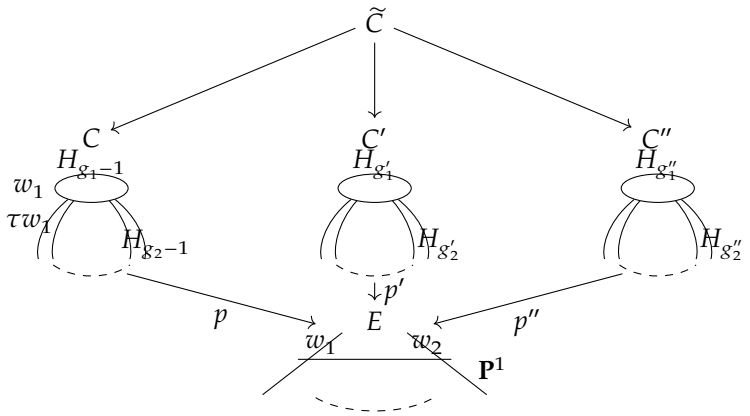


où H_r désigne une courbe hyperelliptique lisse de genre r et où w_1 et w_2 sont des points de Weierstrass.

Avec les notations de A2.4, la variété de Prym associée est dans $\mathcal{H}^2_{t,g-t}$ $(0 < t \leq g/2)$.

Si $t = 0$, il faut ajouter au cas précédent le cas où $C' \xrightarrow{p'} E$ est le revêtement de Wirtinger. La variété de Prym associée à π est alors la jacobienne de C''.

Si E est réductible, on est dans la situation suivante :



La courbe E est réunion de r copies de $\mathbf{P}^1$. Sur la j-ième copie, il y a $2g'_j$ points de Δ' et $2g''_j$ points de Δ'', soit $2g_j = 2g'_j + 2g''_j$ points de Δ, avec $g_j > 0$. On a donc $\sum g'_j = t$, $\sum g''_j = g - t$.

La variété de Prym associée est alors dans $\mathcal{H}^2_{g'_1,\dots,g'_r,g''_1,\dots,g''_s}$, en omettant les indices nuls (notations de A2.4).

On a donc montré :

Théorème II.E.1.1. *Pour tout g, on a les égalités*

$$\overline{\mathcal{E}^2_g} = \mathcal{E}^2_g \cup \mathcal{H}_g \cup \bigcup_{\substack{1\le g_1\le\cdots\le g_r\\ \sum g_i = g}} \mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r},$$

$$\overline{\mathcal{E}^2_{1,g-1}} = \mathcal{E}^2_{1,g-1} \cup \mathcal{S}up_g \cup \bigcup_{\substack{1\le g_1\le\cdots\le g_r\\ \sum g_i = g-1}} \mathcal{H}^2_{1,g_1,\dots,g_r},$$

$$\overline{\mathcal{E}^2_{t,g-t}} = \mathcal{E}^2_{t,g-t} \cup \bigcup_{\substack{1\le g'_1\le\cdots\le g'_r,\ \sum g'_i = t\\ 1\le g''_1\le\cdots\le g''_s,\ \sum g''_i = g-t}} \mathcal{H}^2_{g'_1,\dots,g'_r,g''_1,\dots,g''_s},$$

où les adhérences sont prises dans l'ensemble des variétés abéliennes irréductibles.

Les familles $\mathcal{E}^2_{t,g-t} = \mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{g+1,t})$ sont définies plus haut, les familles $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}$ en A2.4, et la famille $\mathcal{H}_g$ (resp. $\mathcal{S}up_g$) est la famille des jacobiennes des courbes hyperelliptiques (resp. superelliptiques) lisses.

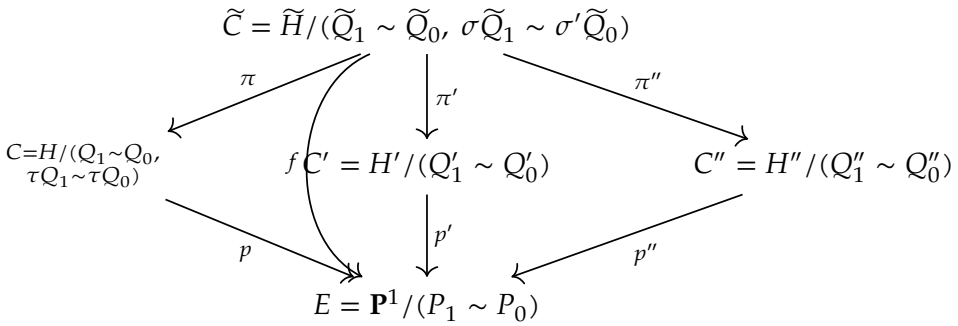
On déduit alors de la décomposition de $N^g_{g-4} \cap \mathcal{P}^{\mathrm{irr}}_g$ donnée en tête de cette section, de A2.4.4, A2.3.8 et A2.3.2 le corollaire suivant.

Corollaire II.E.1.2. *Pour $g \ge 5$, on a*

$$N^g_{g-4} \cap \mathcal{P}^{\mathrm{irr}}_g = \mathcal{J}_g \cup \mathcal{E}^2_g \cup \mathcal{H}^2_g \cup \mathcal{E}^2_{1,g-1} \cup \mathcal{H}^2_{1,g-1} \cup \bigcup_{2\le t\le g/2} \mathcal{P}^{2,\mathrm{irr}}_{t,g-t}.$$

II.E.2 Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{H}_g^2$ pour $g \geq 5$

Les éléments de $\mathcal{H}_g^2$ sont, on le rappelle, les variétés de Prym (P, Ξ) associées aux revêtements $\pi : \widetilde{C} \to C$, dégénérescences d'éléments de $\mathcal{S}_{g+1,0}$ de la forme suivante :



Ici $H' \simeq \mathbf{P}^1$; H, H'' et $\widetilde{H}$ sont hyperelliptiques de genres respectifs $g-1$, g, $2g-1$; Q_0'' et Q_1'' sont des points de Weierstrass de H''.

On note $\tilde{n} : \widetilde{H} \to \widetilde{C}$ la normalisation de $\widetilde{C}$. On a les suites exactes suivantes (cf. [Be 1], 3.5 et II.D.1.5.1) :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & JH'' & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^*} & & & & \\ 0 & \to & \mathbf{Z}/2 & \to & P & \xrightarrow{\tilde{n}^*} & K = \ker(J\widetilde{H} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JH) & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \tag{II.E.2.1}$$

Proposition II.E.2.2. *Pour $g \geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément de $\mathcal{H}_g^2$ a une seule composante irréductible de dimension $\geq g-4$, à savoir*

$$W_2 = (\tilde{n}^*)^{-1}\{\pi''^* L'' \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \mid L'' \in \mathrm{Pic}^{g-4} H'',\ h^0(L'') \geq 1\}.$$

Démonstration. Il découle de [Be 1], §4, qu'un faisceau inversible L sur $\widetilde{C}$ correspondant à un point générique d'une composante de dimension $\geq g-4$ de $\mathrm{Sing}\,\Xi$ tombe dans l'une des catégories suivantes.

1) Cas c) de la liste du théorème 4.10 de [Be 1]. On peut alors écrire $L = (f^*M)(D)$, avec M de degré 2 sur E et D non singulier sur $\widetilde{C}$. On a alors

$$\tilde{n}^* L = f^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \otimes \mathcal{O}(D), \qquad \pi_* D \in |\omega_H \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2)|.$$

Mais

$$|\omega_H \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2)| = p^* |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(g-4)|.$$

Comme D est non singulier, on peut l'écrire (comme en II.D.1.2.1)

$$D = \pi'^* D' + \pi''^* D'', \qquad D', D'' \geq 0, \qquad \deg D' + \deg D'' = g-4.$$

Pour que la famille de faisceaux inversibles associée soit de dimension $g-4$, il faut de plus que l'on ait

$$h^0(H', D') = h^0(H'', D'') = 1$$

pour un élément générique L. Comme H' est rationnelle lisse, on a $D' = 0$. On est donc dans la famille de l'énoncé.

2) *Cas f) de la liste du théorème 4.10 de* [Be 1]. Un élément générique L satisfait alors à (cf. 4.10.2 de [Be 1])

$$\tilde{n}^*L = f^*O_{\mathbf{P}^1}(1)(D + \widetilde{Q}_0 + \widetilde{Q}_1 + \sigma'\widetilde{Q}_0 + \sigma'\widetilde{Q}_1),$$

avec $\pi_*D \in p^*|O_{\mathbf{P}^1}(g-4)|$. Mais, pour tout point $\tilde{x}$ de la courbe hyperelliptique $\widetilde{H}$, on a

$$O_{\widetilde{H}}(\tilde{x} + \sigma'\tilde{x}) = \pi'^*O_{H'}(1),$$

de sorte que $\tilde{n}^*L = f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \otimes O(D)$. On en déduit comme ci-dessus qu'on est dans la famille W_2.

Il reste à montrer l'irréductibilité de W_2. Le diagramme (II.E.2.1) se complète en

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^*} \\ P & \xrightarrow[\widehat{\tilde{n}^*}]{} & K, \end{array} \qquad \text{(II.E.2.3)}$$

où $X = \widehat{K}$ est polarisée de degré 2, $h = \widehat{\pi''^*}$, $q = \widehat{\tilde{n}^*}$.

L'isogénie h est associée à l'élément $\varepsilon = O_{H''}(Q''_0 - Q''_1)$ de $JH''[2]$. La variété $q^{-1}(W_2)$ est isomorphe à l'image inverse par h de la sous-variété W^{g-4} de $J^{g-4}H''$. Elle est irréductible puisque la restriction $\mathrm{Pic}^0 JH'' \to \mathrm{Pic}^0 W^{g-4}$ est un isomorphisme pour $g - 4 > 0$. □

On donnera en II.F.3.4 une autre description de W_2.

II.E.3 Singularités du diviseur thêta des éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ pour $g \geq 5$

La situation est la même que dans le paragraphe précédent, excepté qu'on a maintenant $g(H') = 1, g(H'') = g - 1$ et que $\widetilde{H}$ n'est plus hyperelliptique.

Le diagramme (II.E.2.3) devient

$$\begin{array}{ccc} X' \times X'' & \xrightarrow{h=(h',h'')} & JH' \times JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi'^*,-\pi''^*)} \\ P & \xrightarrow[\widehat{\tilde{n}^*}]{} & K. \end{array} \qquad \text{(II.E.3.1)}$$

Le noyau de l'isogénie $(\pi'^*, -\pi''^*)$ est d'ordre deux, engendré par

$$(O_{H'}(Q'_1 - Q'_0), O_{H''}(Q''_1 - Q''_0)) = (\varepsilon', \varepsilon'').$$

Les isogénies q et h sont de degré 4. L'isogénie q fait de P un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ (définition donnée en A2.4).

Proposition II.E.3.2. *Pour $g \geq 5$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ a deux composantes irréductibles de dimension $\geq g - 4$, à savoir, en posant $g'' = g(H'') = g - 1$,*

$$W_2 = (\tilde{n}^*)^{-1}\{\pi'^*L' \otimes \pi''^*L'' \otimes f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \mid L' \in \mathrm{Pic}^1 H',$$
$$L'' \in \mathrm{Pic}^{g''-4} H'',\ h^0(L')h^0(L'') > 0\},$$

et

$$W_1 = \pi'^*\varepsilon' + (\tilde{n}^*)^{-1}\{\pi''^*L'' \otimes f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \mid L'' \in \mathrm{Pic}^{g''-3} H'',\ h^0(L'') > 0\}.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de II.E.2.2, les seuls cas de la liste de Beauville qui nous concernent sont les cas c) et f).

Un élément générique relevant du cas c) vérifie, comme en II.E.2.2,

$$\tilde{n}^*L = f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \otimes O(\pi'^*D' + \pi''^*D''), \qquad h^0(H', D') = h^0(H'', D'') = 1.$$

Si $\deg D' = 0$, il est facile de vérifier qu'on a $h^0(\widetilde{C}, L) = 3$. On n'est donc pas dans P.

On a donc $\deg D' = 1$ et on est dans la famille W_2.

Un élément générique relevant du cas f) vérifie

$$\begin{aligned}\tilde{n}^*L &= f^*O_{\mathbf{P}^1}(1) \otimes O(D + \widetilde{Q}_0 + \widetilde{Q}_1 + \sigma'\widetilde{Q}_0 + \sigma'\widetilde{Q}_1)\\ &= f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \otimes O(D + \widetilde{Q}_0 - \widetilde{Q}_1 + \sigma'\widetilde{Q}_0 - \sigma'\widetilde{Q}_1)\\ &= f^*O_{\mathbf{P}^1}(2) \otimes \pi'^*\varepsilon' \otimes O(\pi'^*D' + \pi''^*D'').\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on a soit $\deg D' = 0$, auquel cas on est dans W_1, soit $\deg D' = 1$, auquel cas on est dans W_2 (qui est stable par translation par $\pi'^*\varepsilon'$).

On vérifiera en II.F.5.1 que W_1 correspond effectivement à des singularités de Ξ. Les sous-variétés W_1 et W_2 de P sont isomorphes aux images par q des images inverses par h des sous-variétés $\{0\} \times W^{g''-3}$ et $JH' \times W^{g''-4}$ de $JH' \times JH''$. Elles sont donc irréductibles puisque les applications naturelles $\mathrm{Pic}^0 J \to \mathrm{Pic}^0 W^d$ sont injectives pour $d > 0$ (pour $g'' = 4$, il suffit de remarquer que $W_2 = q(X' \times \ker h'') = q(X' \times \{0\})$). □

On donnera en II.F.5 une autre description de W_1 et de W_2.

II.E.4 Le cas de la dimension 4

En ce qui concerne les familles $\mathcal{S}_{5,t}$, $0 \leq t \leq 2$, toute l'analyse de II.D.1 reste valable. En particulier, sous l'hypothèse que la ramification Δ de $p : C \to E$ n'est pas somme de deux éléments de $|\delta|$, on a

$$\mathrm{Sing}\,\Xi = \begin{cases}\emptyset, & t = 1,\\ \{f^*M \mid M^2 \simeq O(\delta)\}, & t = 0, 2.\end{cases}$$

Dans le cas $t = 0$, on a $f^*\delta' = 0$ ($\delta' \in JE[2]$), donc le lieu singulier du diviseur Ξ a deux points d'ordre 2. Par II.D.1.4.2, $\mathcal{E}^2_4 = \mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{5,0})$ est de dimension 8. Sur $\mathcal{E}^2_{2,2} = \mathrm{Pr}(\mathcal{S}_{5,2})$, on a 4 points singuliers d'ordre 2. La méthode de II.D.1.4.2 donne $\dim \mathcal{E}^2_{2,2} = 6$. On a d'ailleurs $\overline{\mathcal{E}^2_{2,2}} = \mathcal{A}^2_{2,2}$ et on retrouve ainsi le fait que le diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}^2_{2,2}$ a 4 points singuliers, qui sont d'ordre 2 (A1.3.6). Enfin, il résulte de II.E.1.1 que

$$\overline{\mathcal{E}^2_{2,2}} = \mathcal{A}^2_{2,2} = \overline{\mathcal{H}^2_{2,2}} \subset \overline{\mathcal{E}^2_4}.$$

Résumons ces résultats dans une proposition.

Proposition II.E.4.1.

1. *Le sous-ensemble $\mathcal{E}^2_4$ de $\mathcal{A}_4$ est de dimension 8. Tout élément a deux points d'ordre deux comme seules singularités de son diviseur thêta.*
2. *Le diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{E}^2_{1,3}$ est lisse.*
3. *Le sous-ensemble $\mathcal{E}^2_{2,2}$ de $\mathcal{A}_4$ est de dimension 6. Le diviseur thêta d'un élément générique a 4 points d'ordre deux comme seules singularités.*

On a $\overline{\mathcal{E}^2_{2,2}} = \mathcal{A}^2_{2,2} \subset \overline{\mathcal{E}^2_4}$.

On démontre des résultats analogues pour $\mathcal{H}^2_{t,4-t}$, $0 \leq t \leq 2$.

Proposition II.E.4.2. *Les sous-ensembles $\mathcal{H}^2_4$, $\mathcal{H}^2_{1,3}$ et $\mathcal{H}^2_{2,2}$ de $\mathcal{A}_4$ sont de dimensions respectives 7, 6 et 6. Le diviseur thêta d'un élément générique a respectivement 2, 2 et 4 points d'ordre deux comme seules singularités.*

Démonstration. On examine, comme dans les démonstrations de II.E.2.2 et II.E.3.2, les différents cas de la liste du théorème 4.10 de [Be 1] qui peuvent nous concerner.

1) Cas c) de la liste. On obtient les deux points de $W = (\tilde{n}^*)^{-1}\{f^*O_{\mathbf{P}^1}(2)\}$.

On a cependant la condition supplémentaire que, pour le faisceau inversible $\tilde{L}$ correspondant sur $\widetilde{C}$, $h^0(\widetilde{C}, \tilde{L})$ doit être pair. On a

$$H^0(\widetilde{C}, \tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(f^*O_{\mathbf{P}^1}(2)) \mid s(\widetilde{Q}_0) = s(\widetilde{Q}_1), \quad s(\sigma'\widetilde{Q}_0) = s(\sigma'\widetilde{Q}_1)\}.$$

Pour $t = 0$, $\widetilde{H}$ est hyperelliptique de genre 7 et

$$H^0(\widetilde{C}, \tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(\widetilde{H}, 4g^1_2) \mid s(\widetilde{Q}_0) = s(\widetilde{Q}_1)\},$$

de dimension 4.

Pour $t = 1$, H' est elliptique et

$$H^0(\widetilde{C}, \tilde{L}) \simeq \{s \in H^0(H', p'^*O_{\mathbf{P}^1}(2)) \mid s(Q'_0) = s(Q'_1)\},$$

de dimension 3.

Pour $t = 2$, $H^0(\widetilde{C}, \tilde{L})$ est de dimension 2.

L'ensemble W ne contribue donc à des singularités de Ξ que pour $t = 0$ ou $t = 2$.

2) Cas d) de la liste. Il faut chercher si la courbe C admet des faisceaux inversibles N avec $h^0(C, N) = 2$, $N^2 \simeq \omega_C$. Soit $n : H \to C$ sa normalisation. La courbe H est hyperelliptique de genre 3 et d'involution τ. On obtient C en identifiant Q_0 à Q_1 et τQ_0 à τQ_1. On a $n^*N = 2g^1_2 + \gamma$ avec $\gamma \in JH[2]$, et

$$2 = h^0(C, N) = \dim\{s \in H^0(n^*N) \mid s(Q_0) = s(Q_1), \quad s(\tau Q_0) = s(\tau Q_1)\}.$$

Si γ est nul, on est dans W_2. Si γ est non nul, il découle du fait qu'il existe une section non nulle de n^*N nulle en Q_0 et en Q_1 qu'on a

$$\exists x, y \in H, \qquad 2g^1_2 + \gamma \equiv Q_0 + Q_1 + x + y.$$

Il existe alors 4 points de Weierstrass $w_1, \ldots, w_4$ de H tels que $\gamma \equiv w_1 + w_2 - w_3 - w_4$. Le diviseur $Q_0 + Q_1$ est alors contenu dans un diviseur du pinceau sans point base $|w_1 + w_2 + w_3 + w_4|$, ce qui ne se produit pas pour Q_0 et Q_1 génériques sur H.

3) Cas f) de la liste. On obtient

$$(\tilde{n}^*)^{-1}\{f^*O_{\mathbf{P}^1}(1)(\widetilde{Q}_0 + \widetilde{Q}_1 + \sigma'\widetilde{Q}_0 + \sigma'\widetilde{Q}_1)\},$$

qui est égal à W pour $t = 0$, distinct sinon. Pour $t = 1$ ou 2, on obtient donc deux points singuliers d'ordre deux supplémentaires.

4) Cas g) de la liste. Ce cas n'intervient en fait pas : la courbe $H/(Q_1 \sim Q_0)$ n'a pas de thetanull puisque le système linéaire $|\omega_H(Q_1 + Q_0)|$ ne contient pas de diviseur de la forme $2D$ avec $h^0(D) \geq 2$.

On a donc bien trouvé le nombre requis de points singuliers d'ordre deux pour les éléments génériques de $\mathcal{H}^2_4$, $\mathcal{H}^2_{1,3}$, $\mathcal{H}^2_{2,2}$. Pour prouver que ces points correspondent bien à des singularités du diviseur thêta, il suffit de remarquer que, par II.E.1.1, on a

$$\mathcal{H}^2_4 \cup \mathcal{H}^2_{1,3} \subset \overline{\mathcal{E}^2_4}, \qquad \mathcal{H}^2_{2,2} \subset \overline{\mathcal{E}^2_{2,2}},$$

et d'appliquer II.E.4.1. Les résultats concernant $\mathcal{H}^2_{2,2}$ peuvent d'ailleurs se déduire de l'égalité $\overline{\mathcal{H}^2_{2,2}} = \mathcal{A}^2_{2,2}$. □

Remarque II.E.4.3. *Il découle des deux propositions précédentes, et du fait que le diviseur thêta d'une jacobienne non hyperelliptique de dimension* 4 *ne peut avoir deux points singuliers d'ordre deux, qu'aucun des éléments de* $\mathcal{E}^2_4$, $\mathcal{H}^2_4$ *ou* $\mathcal{H}^2_{1,3}$ *n'est une jacobienne. On a d'ailleurs aussi* $\mathcal{A}^2_{2,2} \cap \mathcal{J}_4 = \emptyset$, *par exemple par II.C.1.3 et II.B.1.*

II.F La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la recherche de trisécantes éventuelles aux variétés de Kummer des variétés de Prym irréductibles, en procédant de la façon suivante. Les résultats de la partie II.C nous permettent d'affirmer que l'existence d'une inclusion

$$\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d, \qquad a \neq 0, \qquad \{0, a\} \cap \{c, d\} = \emptyset,$$

sur une variété de Prym irréductible (P, Ξ) de dimension $g \geq 4$ entraîne $\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi) \geq g - 4$.

La variété (P, Ξ) appartient en particulier, lorsque $g \geq 5$, à l'une des familles étudiées en II.D et II.E, c'est-à-dire (II.E.1.2)

$$(P, \Xi) \in \mathcal{J}_g \cup \mathcal{E}^2_g \cup \mathcal{E}^2_{1,g-1} \cup \mathcal{H}^2_g \cup \mathcal{H}^2_{1,g-1} \cup \bigcup_{2 \leq t \leq g/2} \mathcal{P}^2_{t,g-t}.$$

Lorsque (P, Ξ) appartient à l'une des familles $\mathcal{E}^2_g$, $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $\mathcal{H}^2_g$ ou $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$, on a à notre disposition une description assez précise de $\operatorname{Sing} \Xi$ pour déterminer, en dimension ≥ 5, les éléments a de P vérifiant $\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi) \geq g - 4$. Pour chacune des trois premières familles ci-dessus, on arrive alors à prouver que, pour aucun de ces éléments a, il n'existe d'inclusion non triviale $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. C'est l'objet des paragraphes 1 à 3.

Dans le paragraphe 4, on étudie le cas des familles $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq g/2$, en faisant une hypothèse de récurrence. Il me semble important de préciser que les techniques employées s'appliquent de la même façon aux éléments de $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$, pourvu que la conjecture de la trisécante soit vraie en dimension $< g$. Le seul obstacle à cette approche de cette conjecture, mais il est de taille, est l'absence de description complète de N^g_{g-4}. S'il se révélait vrai que les composantes de N^g_{g-4} décrites en II.D et A1, à savoir $\overline{\mathcal{J}_g}$, $\overline{\mathcal{E}^2_g}$, $\overline{\mathcal{E}^2_{1,g-1}}$ et $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ pour $2 \leq t \leq g/2$ (pour $g \geq 5$), recouvrent $N^g_{g-4} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{irr}}_g$, la conjecture de la trisécante serait démontrée. Il suffirait aussi de montrer qu'une variété abélienne irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante, et qui n'est pas une jacobienne, appartient a priori à un $\mathcal{A}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$. C'est exactement de cette façon qu'on démontre la conjecture en dimension 4 : des résultats de Ziv Ran ([Ra]) nous permettent de prouver que $(P, \Xi) \in \mathcal{A}^2_{2,2} = \mathcal{P}^2_{2,2}$. L'étude de la famille $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ est reportée à la fin de cette section car elle fait appel aux techniques des paragraphes 1 à 4. On a aussi besoin de la conjecture en dimension 4 pour traiter le cas de $\mathcal{H}^2_{1,4}$.

On a ainsi montré la conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym (généralisées) de dimension quelconque, donc en particulier pour toutes les variétés abéliennes de dimension ≤ 5.

Théorème II.F. *Toute variété de Prym irréductible dont la variété de Kummer admet une trisécante est une jacobienne de courbe.*

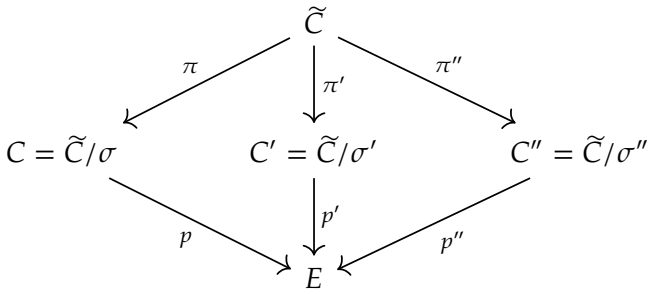
Démonstration. Soit (P, Ξ) la variété en question. On procède par récurrence sur sa dimension g. Le premier cas non trivial est le cas $g = 4$, traité en II.F.4.1. On suppose donc $g \geq 5$ et la conjecture vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$. Comme on l'a expliqué plus haut, soit (P, Ξ) est dans l'une des familles $\mathcal{E}^2_g$, $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $\mathcal{H}^2_g$, $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ ou $\mathcal{P}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$, auquel cas sa variété de Kummer n'a pas de trisécante par II.F.1.1, 2.1, 3.1, 5.1 et 4.1, soit (P, Ξ) est une jacobienne. □

II.F.1 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{E}^2_g$, $g \geq 5$

On rappelle les définitions et notations employées en II.D.1.

La famille $\mathcal{S}_{g+1,0}$ est la famille des revêtements doubles étales connexes $\pi : \widetilde{C} \to C$ des courbes lisses C de genre $g+1$ admettant une structure superelliptique, c'est-à-dire un morphisme p de degré 2 sur une courbe elliptique lisse E, pour laquelle le groupe de Galois de $p\pi : \widetilde{C} \to E$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$. Si on note ce groupe $\{1, \sigma, \sigma', \sigma''\}$, avec $C \simeq \widetilde{C}/\sigma$, on demande de plus que $g(\widetilde{C}/\sigma') = 1$ et $g(\widetilde{C}/\sigma'') = g+1$.

On prend les notations de II.D.1.1 :



$$\mathcal{O}(-\delta') = \bigwedge^2 p'_* \mathcal{O}_{C'}, \qquad \mathcal{O}(-\delta'') = \bigwedge^2 p''_* \mathcal{O}_{C''}, \qquad \mathcal{O}(-\delta) = \bigwedge^2 p_* \mathcal{O}_C = \mathcal{O}(-\delta' - \delta'').$$

L'ensemble $\mathcal{E}^2_g \subset \mathcal{P}_g$ est l'ensemble des variétés de Prym correspondant aux éléments de $\mathcal{S}_{g+1,0}$.

Théorème II.F.1.1. *Soit (P, Ξ) un élément de $\mathcal{E}^2_g$ de dimension $g \geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.*

Démonstration. Si la variété de Kummer de (P, Ξ) admet une trisécante, il existe (cf. II.A.1) des éléments non nuls a, c et d de P avec $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$ et $a \notin \{c, d\}$. Il résulte alors de II.C.2.3 qu'on a $\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi) \geq g-4$. On rappelle (II.D.1.2.2) que $\operatorname{Sing} \Xi$ est de dimension $g-4$, et a une seule composante de dimension $g-4$, à savoir

$$W_2 = \{\pi''^* \mathcal{O}(D'' + p''^* M) \mid D'' \in C''^{(g-4)},\ M \in E^{(2)},\ p''_* D'' + 2M \equiv \delta\}.$$

On a donc $W_2 \subset \Xi_a$.

On rappelle aussi qu'on a une isogénie $\pi''^* : P'' \to P$, où $P'' = \ker(JC'' \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JE)$; son noyau est $\{0, p''^*\delta'\}$ (cf. II.D.1.5.1). L'ensemble

$$Z = \{O(D'' + p''^*M) \mid D'' \in C''^{(g-4)},\ M \in E^{(2)},\ p''_*D'' + 2M \equiv \delta\}$$

est irréductible par A4.1. Si on désigne par Θ'' le diviseur thêta canonique de $J^gC'' = J^{g''-1}C''$, où $g'' = g(C'') = g + 1$, et si on écrit $a = \pi''^*a''$ avec $a'' \in P''$, on a alors $Z \subset \Theta''_{a''}$. Par A4.1, ceci entraîne $a'' = O(-p''^*e + x + y)$ avec $e \in E$, $x, y \in C''$. On a alors

$$\Xi \cdot \Xi_a = \pi''^*\{L'' \in \Theta'' \cdot \Theta''_{a''} \mid \mathrm{Nm}\, L'' = O(\delta)\},$$

qui est irréductible par A4.3(ii), sauf peut-être dans l'un des deux cas suivants (on rappelle que $g(C'') = g + 1 \geq 6$).

Premier cas : $a'' = O(x'' - y'')$. Comme $\mathrm{Nm}\, a'' = 0$, on a $y'' = \tau''x''$. On a alors (cf. II.B.2)

$$\begin{aligned}\Xi \cdot \Xi_a = \{&\pi''^*O(x'' + D'') \mid D'' \in C''^{(g''-2)},\ p''_*D'' \equiv \delta - p''x''\}\\ &\cup \{\pi''^*O(K_{C''} - \tau''x'' - D'') \mid D'' \in C''^{(g''-2)},\\ &\qquad p''_*(K_{C''} - \tau''x'' - D'') \equiv \delta\}.\end{aligned}$$

Pour un élément du second ensemble, on a

$$\begin{aligned}&O(K_{C''} - \tau''x'' - D'') \otimes \tau''^*O(K_{C''} - \tau''x'' - D'') \simeq p''^*O(\delta),\\ \Longrightarrow\quad &K_{C''} - \tau''x'' - D'' \equiv p''^*\delta' + x'' + \tau''D'', \qquad p''_*(\tau''D'') \equiv \delta - p''x''.\end{aligned}$$

Ces deux ensembles diffèrent donc de $\pi''^*p''^*\delta' = 0$. Ils sont égaux et irréductibles, et $\Xi \cdot \Xi_a$ est irréductible (bien que $(\pi''^*)^{-1}(\Xi \cdot \Xi_a)$ ne le soit pas).

Second cas : $a'' = O(-p''^*e + x + y)$ *avec* $\delta \equiv p''x - e + \delta''$. On a donc $\delta' \equiv p''x - e$. Comme $\mathrm{Nm}\, a'' = 0$, on a $p''x \equiv p''y \equiv \delta' + e$, donc $p''x = p''y$. Si $x = y$,

$$a'' = O(2x - p''^*(p''x - \delta')) = O(p''^*\delta' + x - \tau''x)$$

et $a = \pi''^*(x - \tau''x)$, cas déjà traité ci-dessus. Si $x = \tau''y$, on a

$$a'' = O(-p''^*e + p''^*p''x) = O(p''^*\delta')$$

et $a = 0$, ce qui est impossible. □

Remarque II.F.1.2. *Pour $g \geq 5$, aucun élément de $\mathcal{E}^2_g$ n'est donc une jacobienne. C'est encore vrai pour $g = 4$ par II.E.4.3 (ces résultats peuvent aussi se déduire de [Sho 1]).*

Remarque II.F.1.3. *On peut déduire de la démonstration ci-dessus et de II.C.2.1 que si $(P, \Xi) \in \mathcal{E}^2_g$, avec $g \geq 5$, et si $\Xi \cdot \Xi_a$ est réductible, alors il existe une courbe elliptique $F \hookrightarrow P$ avec $F \cdot \Xi = 2$ et $a \in F$. Comme la structure superelliptique de C'' est unique, on a*

$$\begin{array}{ccccc} F'' = (\pi''^*)^{-1}(F) & \hookrightarrow & P'' & \hookrightarrow & JC'' \\ \downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \\ F & \hookrightarrow & P & & \end{array}$$

et $F'' \cdot \Theta'' = 4$.

Il existe alors un morphisme de degré 4 de C'' sur F''. Pour un élément générique de $\mathcal{E}^2_g$, les intersections $\Xi \cdot \Xi_a$ sont toutes irréductibles.

II.F.2 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$, $g \geq 5$

La famille $\mathcal{S}_{g+1,1}$ a été définie en II.D.1.1. On a $\mathcal{E}^2_{1,g-1} = \Pr(\mathcal{S}_{g+1,1})$. Les notations sont les mêmes que celles du paragraphe précédent, excepté qu'on a maintenant $g(C') = g' = 2$ et $g(C'') = g'' = g$.

Théorème II.F.2.1. *Soit (P, Ξ) un élément de $\mathcal{E}^2_{1,g-1}$ de dimension $g \geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.*

Démonstration. On suppose qu'on a une inclusion non triviale $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. Il résulte de II.D.1.2.2 et II.D.1.2.9 que $\operatorname{Sing}\Xi$ a une seule composante irréductible de dimension $g-4$, à savoir

$$W_2 = \{O(\pi'^* x' + \pi''^* D'' + f^* M) \mid x' \in C',\ D'' \in C''^{(g''-5)},\\ M \in E^{(2)},\ p' x' + p''_* D'' + 2M \equiv \delta\}.$$

Comme dans II.F.1.1, on a $W_2 \subset \Xi_a$. On rappelle qu'on a une isogénie $(\pi'^*, \pi''^*) : P' \times P'' \to P$, où $P' = \ker(JC' \to JE)$, $P'' = \ker(JC'' \to JE)$ (cf. II.D.1.5.1). On écrit donc $a = \pi'^* a' + \pi''^* a''$ avec $\operatorname{Nm} a' = \operatorname{Nm} a'' = 0$.

Lemme II.F.2.2. *$W_2 \subset \Xi_a$ si et seulement si $a'' = O(x + y - p''^* e)$ avec $x, y \in C''$ et $e \in E$.*

Démonstration. Commençons par la remarque suivante :

$$\begin{aligned} &\pi'^* L' \otimes \pi''^* L'' \simeq O_{\widetilde{C}}, \qquad \deg L' = \deg L'' = 0 \\ \Longrightarrow \quad &\exists N \in \operatorname{Pic}^0 E, \quad L' \simeq p'^* N, \quad L'' \simeq p''^* N^{-1}. \end{aligned} \tag{II.F.2.3}$$

En effet, on a alors

$$\pi'^* L' \simeq \pi''^* L''^{-1} \simeq \sigma''^* \pi'^* L' \simeq \pi'^* \tau'^* L'.$$

Comme π' est ramifiée, π'^* est injective. On a donc $L' \simeq \tau'^* L'$. Comme p' est ramifiée en deux points, il existe un faisceau inversible N sur E tel que $L' \simeq p'^* N$ ([Mu 2], corollaire 2, p. 333). On en déduit $\pi''^* L'' \simeq \pi'^* L'^{-1} \simeq f^* N^{-1}$; puisque π''^* est injective (π'' ramifiée), on obtient $L'' \simeq p''^* N^{-1}$.

Soient maintenant $D'' \in C''^{(g''-5)}$ et $M \in E^{(2)}$ quelconques. On choisit $x' \in C'$ tel que $p' x' + p''_* D'' + 2M \equiv \delta$. On a alors, par hypothèse,

$$\exists \bar{x}' \in C', \quad \exists \bar{D}'' \in C''^{(g''-1)} : \quad \begin{cases} \pi'^*(\bar{x}' + a') + \pi''^*(\bar{D}'' + a'') \equiv \pi'^* x' + \pi''^* D'' + f^* M, \\ p' \bar{x}' + p''_* \bar{D}'' \equiv \delta. \end{cases}$$

Par la remarque II.F.2.3, il existe un diviseur N de degré 0 sur E tel que

$$\begin{cases} x' - p'^* N \equiv \bar{x}' + a', \\ D'' + p''^* M + p''^* N \equiv \bar{D}'' + a''. \end{cases} \tag{II.F.2.4}$$

Si on prend les mêmes x' et D'', mais qu'on change M en $M_1 = M + \varepsilon$, $\varepsilon \in \operatorname{Pic}^0 E[2]$, on obtient un autre diviseur N_1 tel que

$$\begin{cases} x' - p'^* N_1 \equiv \bar{x}'_1 + a', \\ D'' + p''^* M + p''^* \varepsilon + p''^* N_1 \equiv \bar{D}''_1 + a''. \end{cases}$$

On a alors $\bar{x}'_1 \equiv \bar{x}' + p'^*(N - N_1)$.

Par II.D.1.2.7, cela entraîne que l'une des équivalences suivantes est satisfaite :

$$(\mathrm{A}') \quad N \equiv N_1, \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{B}') \quad N - N_1 + p'\bar{x}' \equiv \delta'.$$

De même, on a $\bar{D}''_1 \equiv \bar{D}'' + p''^*(\varepsilon + N_1 - N)$ et, si $\bar{D}''$ est p''-simple (cf. II.D.1.2.7),

$$(\mathrm{A}'') \quad N \equiv N_1 + \varepsilon, \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{B}'') \quad N_1 - N + \varepsilon + p''_*\bar{D}'' \equiv \delta''.$$

Remarquons que, si (A') est vrai, (A'') est faux, (B'') est vrai et

$$\varepsilon \equiv \delta'' - p''_*\bar{D}''.$$

Si (B') est vrai, on a $p''_*\bar{D}'' \equiv \delta - p'\bar{x}' \equiv N - N_1 + \delta''$, donc (B'') est faux, (A'') est vrai et

$$\varepsilon \equiv N - N_1 \equiv \delta' - p'\bar{x}'.$$

Comme on peut toujours prendre ε dans

$$\mathrm{Pic}^0 E[2] \setminus \{0, \delta' - p'\bar{x}', \delta'' - p''_*\bar{D}''\},$$

on a montré que $\bar{D}''$ n'est pas simple, de sorte qu'on a, par (II.F.2.4),

$$\forall D'' \in C''^{(g''-5)}, \quad \forall M \in E^{(2)}, \quad \exists e \in E, \quad \exists G'' > 0, \quad \exists N \in \mathrm{Div}^0 E :$$
$$D'' + p''^*M - a'' \equiv p''^*(e - N) + G''.$$

Dans les notations de A4.2, cela s'écrit $(T_2)_{-a''} \subset \Theta$. Comme $g'' \geq 5$, on peut conclure. La réciproque est évidente. □

Lemme II.F.2.5. *Si on a une inclusion non triviale $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, alors $a \in \pi'^*P' \cup \pi''^*P''$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, de sorte qu'on suppose $a' \notin p'^* \mathrm{Pic}^0 E$, $a'' \notin p''^* \mathrm{Pic}^0 E$.

On introduit

$$\begin{aligned} U = \{(x', \mathcal{O}(D''), \alpha) \mid\ & x' \in C',\ D'' \in C''^{(g''-1)},\ \alpha \in \mathrm{Div}^0 E, \\ & p'x' + p''_*D'' \equiv \delta, \\ & H^0(x' - a' - p'^*\alpha) \neq 0, \\ & H^0(D'' - a'' + p''^*\alpha) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Il découle de la remarque II.F.2.3 que l'application naturelle $U \to \Xi \cap \Xi_a$, qui à $(x', \mathcal{O}(D''), \alpha)$ associe $\mathcal{O}(\pi'^*x' + \pi''^*D'')$, est surjective. On considère maintenant la projection

$$\mathrm{pr}_{1,3} : U \longrightarrow B' = \{(x', \alpha) \mid \mathcal{O}(x') \in \Theta' \cdot \Theta'_{a'+p'^*\alpha}\}.$$

La courbe B' est irréductible : en effet, la projection $\mathrm{pr}_2 : B' \to \mathrm{Pic}^0 E$ est de degré 2 puisque $a' + p'^*\alpha$ n'est jamais nul, et la projection $\mathrm{pr}_1 : B' \to \Theta'$ est aussi de degré 2 (la fibre de $x' \in \Theta'$ est $(p'^* \mathrm{Pic}^0 E) \cdot \Theta'_{a'-x'}$). Si B' était réductible, elle devrait être réunion de deux copies de E et de deux copies de $\Theta' \simeq C'$, ce qui est absurde.

La projection $\mathrm{pr}_{1,3}$ est surjective : la fibre de $(x', \alpha) \in B'$ est

$$\{L'' \in \Theta'' \cdot \Theta''_{a''-p''^*\alpha} \mid \mathrm{Nm}\, L'' \simeq \mathcal{O}(\delta - p'x')\},$$

de dimension $g'' - 3$ par A4.3 puisque $a'' \notin p''^* \mathrm{Pic}^0 E$. Toujours par A4.3, cette fibre est irréductible sauf si on est dans l'un des cas suivants (on rappelle que, par II.F.2.2, $a'' = \mathcal{O}(x + y - p''^*e)$) :

— $\alpha = O(e - p''x)$ ou $O(e - p''y)$;

— $\alpha = O(\delta' - p'x' + e - p''x)$ ou $O(\delta' - p'x' + e - p''y)$;

— $g'' = 5$ et $O(\delta - p'x')$ appartient à un sous-ensemble fini de $\mathrm{Pic}^4 E$.

Les fibres de $\mathrm{pr}_{1,3}$ sont donc de dimension pure $g'' - 3$, génériquement irréductibles, de sorte que U a une seule composante irréductible de dimension $\geq g'' - 3 + 1 = g - 2$. On en déduit que $\Xi \cdot \Xi_a$ est irréductible. Contradiction. □

On peut appliquer II.F.2.5 à a, b, c, d. Montrons qu'on a soit $a, b, c, d \in P'$, soit $a, b, c, d \in P''$, en identifiant ici ces variétés à leurs images dans P. Si ce n'est pas le cas, on a par exemple $a \in P' \setminus P''$ et $c \in P'' \setminus P'$. Mais on a aussi $\Xi \cdot \Xi_{a-c} \subset \Xi_{-c} \cup \Xi_d$, de sorte que $a - c \in P' \cup P''$, ce qui est impossible.

1) Si $a \in P'' \setminus P'$ et $b, c, d \in P''$, on écrit

$$a = \pi''^* a'', \quad b = \pi''^* b'', \quad c = \pi''^* c'', \quad d = \pi''^* d''.$$

Les éléments de $\Xi \cap \Xi_a$ sont les $O(\pi'^* x' + \pi''^* D'')$ avec

$$\begin{cases} p'x' + p''_* D'' \equiv \delta, \\ \exists \alpha \in \mathrm{Div}^0 E, \quad H^0(D'' - a'' - p''^*\alpha) \neq 0, \quad H^0(x' + p'^*\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

On déduit alors de II.D.1.2.7 que soit $\alpha \equiv 0$ et $O(D'') \in \Theta'' \cdot \Theta''_{a''}$, soit $\alpha + p'x' - \delta' \equiv 0$ et

$$\begin{aligned} D'' - a'' - p''^*\alpha &\equiv D'' - a'' - p''^*\delta' + p''^* p' x' \\ &\equiv D'' - a'' + p''^*\delta'' - p''^* p''_* D'' \\ &\equiv K_{C''} - a'' - \tau'' D'' \equiv K_{C''} - \tau''(D'' - a''), \end{aligned}$$

de sorte qu'on a encore $O(D'') \in \Theta'' \cdot \Theta''_{a''}$.

De l'inclusion $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, on déduit $\Theta'' \cdot \Theta''_{a''} \subset \Theta''_{c''} \cup \Theta''_{d''}$ et, par II.B.4, $a'' = O(m'' - \tau'' m'')$ avec $m'' \in C''$. Il est alors facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \Xi \cdot \Xi_a = \{ O(\pi'^* x' + \pi''^* m'' + \pi''^* D'') \mid x' \in C',\ D'' \in C''^{(g''-2)}, \\ p'x' + p''_* D'' \equiv \delta - p'' m'' \}, \end{aligned}$$

qui est irréductible. Contradiction.

2) Si $a, b, c, d \in P'$, on écrit $a = \pi'^* a'$, etc. On montre comme ci-dessus que $\Xi \cdot \Xi_a$ est réunion de

$$\begin{aligned} I' = \{ O(\pi'^* x' + \pi''^* D'' + f^* e) \mid x' \in C',\ D'' \in C''^{(g''-3)},\ e \in E, \\ p'x' + p''_* D'' + 2e \equiv \delta \}, \end{aligned}$$

irréductible indépendant de a', et de

$$\begin{aligned} I'(a') = \{ O(\pi'^* x' + \pi''^* D'') \mid O(x') \in \Theta' \cdot \Theta'_{a'},\ D'' \in C''^{(g''-1)}, \\ p'x' + p''_* D'' \equiv \delta \}. \end{aligned}$$

Comme C' est de genre 2, on peut toujours écrire $a' = O_{C'}(m' - \tau' m')$ avec $m' \in C'$. On a alors

$$I'(a') = \{ O(\pi'^* m' + \pi''^* D'') \mid D'' \in C''^{(g''-1)},\ p''_* D'' \equiv \delta - p' m' \},$$

qui est irréductible.

On a alors $I'(a') \subset \Xi_c \cup \Xi_d$, soit par exemple $I'(a') \subset \Xi_c$. Il ressort de ce qui précède que $\Xi_c \supset I'$, puisque $c \in P'$, de sorte que $\Xi_c \supset \Xi_a$. Contradiction. □

II.F.3 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{H}^2_g$, $g \geq 5$

On rappelle la construction des éléments de $\mathcal{H}^2_g$ (II.E.2 et A2.4).

Soit H'' une courbe hyperelliptique lisse de genre $g \geq 5$, Q''_0 et Q''_1 deux points de Weierstrass de H'' et $\varepsilon = O(Q''_1 - Q''_0) \in JH''[2]$. Soit $h : X \to JH''$ le revêtement étale de degré 2 associé à ε. Si Θ'' est un diviseur thêta de JH'', $M = O(h^*\Theta'')$ définit une polarisation de degré 2 sur X. Le groupe $H(M)$, isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$, contient $\ker h = \{0, \alpha\}$. Pour chacun des deux éléments de $H(M) \setminus \ker h$, le quotient de (X, M) par cet élément est une variété abélienne principalement polarisée (P, Ξ), élément de $\mathcal{H}^2_g$.

Théorème II.F.3.1. *Soit (P, Ξ) un élément de $\mathcal{H}^2_g$ de dimension $g \geq 5$. Alors la variété de Kummer associée n'a pas de trisécante.*

Démonstration. Comme dans le paragraphe 1, on suppose qu'on a une inclusion $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$ avec $a \neq 0$, $\{0, a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. On déduit de II.C.2.3 que

$$\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi) \geq g - 4. \tag{II.F.3.2}$$

On a montré en II.E.2.2 que $\operatorname{Sing} \Xi$ a une seule composante de dimension $\geq g - 4$, dont on va maintenant donner une description différente. On rappelle le diagramme (II.E.2.3) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & JH'' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''^*} \\ P & \longrightarrow & K. \end{array} \tag{II.F.3.3}$$

On prendra les notations suivantes, outre celles de II.E.2 :

— Θ'' est un diviseur thêta sur JH'' ;

— Ξ est un diviseur thêta sur P, $\widetilde{\Xi} = q^*\Xi$, tel que $M = O(\widetilde{\Xi}) = O(h^*\Theta'')$ est une polarisation de degré 2 sur X ;

— $\ker \pi''^* = \{0, \varepsilon\}$, où ε est l'élément de JH'' associé à $O_{H''}(Q''_0 - Q''_1)$;

— $\ker h = \{0, \alpha\}$ et $\ker q = \{0, \beta\}$, de sorte que α et β engendrent $H(M)$;

— $s \in H^0(X, M)$ est une équation de $h^*\Theta''$ et $t \in H^0(X, M)$ une équation de $h^*\Theta''_\varepsilon$, telles que $\widetilde{\Xi} = \operatorname{div}(s + t)$ (cf. A2.1.2).

Sur $J^{g-1}H''$, on a

$$\operatorname{Sing} \Theta'' \cdot \operatorname{Sing} \Theta''_\varepsilon = Z + Z_\varepsilon, \qquad Z = g^1_2 + Q''_0 + W^{g-4}.$$

Il est clair sur l'équation de $\widetilde{\Xi}$ que les points de $h^{-1}(\operatorname{Sing} \Theta'' \cap \operatorname{Sing} \Theta''_\varepsilon)$ sont singuliers sur $\widetilde{\Xi}$.

Comme on l'a remarqué juste après II.E.2.3, l'image inverse $\widetilde{Z}$ de Z par h est irréductible de dimension $g - 4$ (pour $g \geq 5$). Ainsi,

$$\text{la composante de dimension } g - 4 \text{ de } \operatorname{Sing} \Xi \text{ est } q(\widetilde{Z}). \tag{II.F.3.4}$$

Enfin, on remarque que

$$\widetilde{\Xi} \cdot \widetilde{\Xi}_\alpha = \text{partie fixe de } |M| = h^{-1}(\Theta'' \cdot \Theta''_\varepsilon) = \widetilde{T} + \widetilde{T}_\beta,$$

avec $\widetilde{T} = h^{-1}(Q''_0 + W^{g-2})$, sous-variété irréductible de dimension $g-2$ de X. En particulier, $\Xi \cdot \Xi_{q(\alpha)} = q(\widetilde{T})$ est irréductible. Revenons à notre trisécante. Soit $\tilde{a}$ un antécédent de a par q. On déduit de (II.F.3.2) et (II.F.3.4) qu'on a $\widetilde{\Xi}_{\tilde{a}} \supset \widetilde{Z} \cup \widetilde{Z}_\beta$. Comme $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_\alpha$, on a alors

$$\widetilde{Z} \subset \widetilde{\Xi}_{\tilde{a}} \cap \widetilde{\Xi}_{\tilde{a}+\alpha} = \widetilde{T}_{\tilde{a}} \cup \widetilde{T}_{\tilde{a}+\beta}.$$

Quitte à changer $\tilde{a}$ en $\tilde{a}+\beta$, on peut supposer que $\widetilde{Z}$ est contenu dans $\widetilde{T}_{\tilde{a}}$. On a alors $Z \subset T_{h(\tilde{a})}$, où $T = h(\widetilde{T})$, c'est-à-dire

$$Q''_0 + g^1_2 + W^{g-4} \subset h(\tilde{a}) + Q''_0 + W^{g-2} \subset J^{g-1}H''.$$

Il s'ensuit qu'il existe $x, y \in H''$ tels que $h(\tilde{a}) = O_{H''}(x-y)$, soit, en utilisant (II.F.3.3),

$$\tilde{n}^* a = \pi''^* O_{H''}(x-y) = O_{\widetilde{H}}(\tilde{x} + \sigma''\tilde{x} - \tilde{y} - \sigma''\tilde{y}),$$

où $\pi''\tilde{x} = x$, $\pi''\tilde{y} = y$.

Comme $\widetilde{H}/\sigma' = H'$ est rationnelle lisse, on a

$$\tilde{y} + \sigma'\tilde{y} \equiv g^1_2 \equiv \sigma''\tilde{x} + \sigma'\sigma''\tilde{x},$$

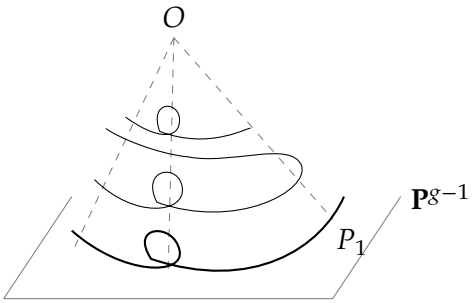
d'où

$$\tilde{n}^* a = O_{\widetilde{H}}(\tilde{x} + \sigma\tilde{y} - \sigma\tilde{x} - \tilde{y}).$$

Si $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont singuliers sur $\widetilde{C}$, on a alors $\tilde{n}^* a = 0$, soit $a = q(\alpha)$. Dans ce cas, on a vu que $\widetilde{\Xi} \cdot \widetilde{\Xi}_\alpha = \widetilde{T} + \widetilde{T}_\beta$, donc $\Xi \cdot \Xi_{q(\alpha)} = q(\widetilde{T})$ est irréductible.

Si au plus un des points $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ est singulier sur $\widetilde{C}$, il ressort de A3.2.2 que $\Xi \cdot \Xi_a$ est une sous-variété spéciale généralisée, irréductible si l'application rationnelle $\varphi_{\tilde{x},\tilde{y}} : C \dashrightarrow \mathbf{P}^{g-2}$, composée de l'application canonique avec la projection depuis la corde joignant $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, est birationnelle. L'image canonique de C dans $\mathbf{P}^g$ est représentée ci-dessous. La courbe rationnelle nodale dans $\mathbf{P}^{g-1}$ est l'image de $\mathbf{P}^1$ par le système

$$\{s \in H^0(\mathbf{P}^1, O(g)) \mid s(P_1) = s(P_0)\}.$$



Il est facile de voir que $\varphi_{\tilde{x},\tilde{y}}$ n'est pas birationnelle si et seulement si $\pi\tilde{y} = \tau\pi\tilde{x}$. Sous nos hypothèses, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont alors lisses sur $\widetilde{C}$ et, comme $\tilde{n}^* a \neq 0$, on a $\tilde{y} = \sigma'\tilde{x}$ et

$$\begin{aligned} \tilde{n}^* a &= O_{\widetilde{H}}(\tilde{x} + \sigma''\tilde{x} - \sigma'\tilde{x} - \sigma\tilde{x}) \\ &= \pi''^* O_{H''}(x - \tau''x). \end{aligned}$$

Comme les intersections $\Xi \cdot \Xi_a$, $\Xi \cdot \Xi_c$ et $\Xi \cdot \Xi_{a-c}$ sont toutes réductibles (II.A.1.3), il existe $x, y, z \in H''$ tels que

$$\begin{aligned} \tilde{n}^* a &= \pi''^* O_{H''}(x - \tau''x) \neq 0, \\ \tilde{n}^* c &= \pi''^* O_{H''}(y - \tau''y) \neq 0, \\ \tilde{n}^*(a-c) &= \pi''^* O_{H''}(z - \tau''z) \neq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte l'une des deux équivalences

$$x - \tau'' x - y + \tau'' y \equiv z - \tau'' z,$$
$$\text{ou} \qquad x - \tau'' x - y + \tau'' y \equiv z - \tau'' z + Q_1'' - Q_0''.$$

Chacune de ces équivalences n'est possible que si l'un des points x, y ou z est un point de Weierstrass de H'', ce qui est impossible puisque $\tilde{n}^* a$, $\tilde{n}^* c$ et $\tilde{n}^*(a-c)$ sont non nuls. □

Remarque II.F.3.5. Pour $g \geq 5$, aucun élément de $\mathcal{H}^2_g$ n'est donc une jacobienne. C'est encore vrai pour $g = 4$ par II.E.4.3 ; ces résultats peuvent aussi se déduire de [Sho 1].

II.F.4 La conjecture de la trisécante en dimension quatre et pour les éléments de $\mathcal{D}^2_{t,g-t}$, $g \geq 5, 2 \leq t \leq g/2$

Dans ce paragraphe, on montre la conjecture de la trisécante dans les cas suivants :

— La variété abélienne concernée est de dimension 4. On utilise alors de façon essentielle des résultats de Ziv Ran [Ra].

— La variété abélienne est une variété de Prym de dimension $g \geq 5$, élément de $\mathcal{D}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$ (ensembles définis en A2.3.5). On suppose alors que la conjecture de la trisécante est vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$.

Théorème II.F.4.1. *Soit (A, Θ) une variété de Prym irréductible de dimension $g \geq 4$ dont la variété de Kummer admet une trisécante. On suppose que, si $g \geq 5$, (A, Θ) est élément d'un $\mathcal{D}^2_{t,g-t}$ avec $2 \leq t \leq g/2$, et que la conjecture de la trisécante est vraie pour les variétés de Prym de dimension $< g$. Alors (A, Θ) est une jacobienne de courbe.*

Préliminaires particuliers au cas de la dimension quatre

On part d'une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension 4, (A, Θ), dont la variété de Kummer admet une trisécante. Par II.A.1.3, il existe des éléments non nuls a, b, c, d de A, avec $a + b = c + d = x$ et $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, et des complexes non nuls λ, μ, ν satisfaisant à

$$\forall \theta \in H^0(\Theta), \qquad \lambda \theta\theta_x + \mu \theta_a \theta_b + \nu \theta_c \theta_d = 0.$$

On suppose que (A, Θ) n'est pas une jacobienne. On a alors :

Proposition II.F.4.2. *Il existe des variétés abéliennes polarisées X_1 et X_2 de degré 2, dimension 2, et une isogénie $\pi : X_1 \times X_2 \to A$ faisant de (A, Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$, avec $\{a, b, c, d\} \cap \pi(X_1) \neq \emptyset$.*

Démonstration. On utilise les méthodes et résultats de [Ra] : les composantes des intersections de Θ avec ses translatés sont des surfaces dans une variété de dimension 4. On a donc à notre disposition le produit d'intersection.

Lemme II.F.4.3. *Une des composantes de $\Theta \cap (\Theta_a \cup \Theta_c \cup \Theta_d)$ est de self-intersection nulle.*

Démonstration. Soient $V_1, \ldots, V_r$ les composantes de $\Theta \cdot \Theta_a$. On suppose $V_i^2 > 0$ pour tout i.

Les valeurs $V_i^2 = 2$ et $V_i^2 = 4$ sont interdites respectivement par (3), page 474, et Lemma V.2 de [Ra].

Si $V_iV_j = 0$, on déduit de Lemma II.16 de [Ra] que, pour $V = V_i$ ou V_j, on a

$$\begin{cases} \exists E \subset T_0A, \quad \forall v \in V_{\text{lisse}}, \quad \tau_v^*(T_vV) \subset E, \quad \dim E = 3, \\ \text{ou } \exists \ell \subset T_0A, \quad \forall v \in V_{\text{lisse}}, \quad \tau_v^*(T_vV) \supset \ell, \quad \dim \ell = 1. \end{cases}$$

Ceci entraîne

$$\forall v, w \in V_{\text{lisse}}, \qquad \tau_v^*(T_vV) \cap \tau_w^*(T_wV) \neq 0,$$

soit, par Lemma II.14 de [Ra], $V^2 = 0$.

La valeur $V_iV_j = 1$ est aussi interdite par Lemma II.15 de [Ra]. On a donc

$$V_i^2 \geq 6, \qquad V_iV_j \geq 2 \quad (i \neq j), \qquad \left(\sum_{i=1}^r V_i\right)^2 = 24.$$

En particulier, $r = 2$. Si $a - V_1 = V_2$, on a $[V_1] = \frac{1}{2}[\Theta]^2$. Par Corollary II.2 de [Ra], V_1 est alors non dégénérée et $V_1^2 = 6$, ce qui contredit Theorem 5 de [Ra].

On a donc $a - V_1 = V_1$, $a - V_2 = V_2$ et

$$V_1^2 + V_2^2 = 24 - 2V_1V_2 \leq 20,$$

soit, par exemple, $V_1^2 \leq 10$.

Cette composante V_1 est contenue, par exemple, dans Θ_c. Si on fait aussi l'hypothèse qu'aucune composante de $\Theta \cdot \Theta_c$ n'est de self-intersection nulle, on a de même $c - V_1 = V_1$, de sorte que V_1 est invariant par translation par $a - c$. Comme $V_1^2 > 0$, $a - c$ est d'ordre fini $n \geq 2$. Soit $p : A \to X$ le quotient de A par le sous-groupe engendré par $a - c$, et W_1 l'image de V_1. On a alors $0 < V_1^2 = nW_1^2 \leq 10$. Rappelons que la valeur $W_1^2 = 2$ est interdite par [Ra]. La seule possibilité restante est $n = 2$, $W_1^2 = 4$. D'après Lemma V.2 de [Ra], il existe deux courbes lisses connexes C et D de genre 2 avec

$$X \simeq JC \times JD, \qquad W_1 \simeq C \times D.$$

Dans le contexte de ce lemme, la variété abélienne X est principalement polarisée, mais ce n'est pas utilisé dans la démonstration.

Le morphisme dual de p est une isogénie $\pi : JC \times JD \to A$ de degré 2, induisant des polarisations M et N sur JC et JD respectivement. On a alors $2 = \deg \pi = \deg M \deg N$. Une des polarisations M ou N est donc principale et A est un produit (voir par exemple A1.1.1). □

On suppose donc que $\Theta \cdot \Theta_a$, par exemple, possède une composante irréductible V vérifiant $V^2 = 0$.

Par Lemma II.16 de [Ra], on est dans l'une des situations suivantes :

— Il existe $v \in T_0A$, $v \neq 0$, tel que $v \in \tau_x^*(T_xV)$ pour tout $x \in V_{\text{lisse}}$.
Par Lemma II.13 de [Ra], on est dans l'un des cas suivants :

1. Il existe une sous-variété abélienne X' de A et $V' \subset A' = A/X'$ telles que, si $p : A \to A'$, alors
$$V = p^{-1}(V'), \qquad \dim X' = 1, \qquad \dim V' = 1.$$
2. Même chose avec $\dim X' = 2$, $V' = \{x'\}$, de sorte que $V = p^{-1}(x')$ est translaté d'une sous-variété abélienne X' de A.

— Il existe $h \in T^*_0 A$, $h \neq 0$, tel que $\tau_x^*(T_x V) \subset \ker h$ pour tout $x \in V_{\text{lisse}}$.
La variété abélienne X' engendrée par V est alors de dimension ≤ 3. On est donc dans le cas 2), ou dans le cas

3. $\dim X' = 3$.

Dans tous les cas, on a une isogénie $\pi : X' \times X'' \to A$ (voir A1.1.1) avec

$$\begin{array}{llll} \text{cas 1)} & \dim X' = 1, & V = \pi(X' \times C''), & C'' \text{ courbe dans } X'', \\ \text{cas 2)} & \dim X' = 2, & V = \pi(X' \times \{x''_0\}), & x''_0 \in X'', \\ \text{cas 3)} & \dim X' = 3, & V = \pi(S' \times \{x''_0\}), & S' \text{ surface dans } X'. \end{array}$$

Cas 1). Soient M' et M'' les polarisations respectives sur X' et X'' induites par celle de A. Elles sont de même type et il existe des bases $\{s'_1, \dots, s'_d\}$ et $\{s''_1, \dots, s''_d\}$ de $H^0(X', M')$ et $H^0(X'', M'')$ respectivement, telles que $\pi^*\Theta$ ait pour équation $\sum_{i=1}^d s'_i \otimes s''_i$ (A1.1.1.iv). On a alors

$$\forall x'' \in C'', \qquad \sum_{i=1}^{d} s''_i(x'') s'_i = 0 \quad \text{dans } H^0(X', M'),$$

soit $C'' \subset \operatorname{Bs} |M''|$.

Lemme II.F.4.4. *Soit (X, M) une variété abélienne polarisée de dimension 3, qui ne soit pas produit de deux variétés abéliennes polarisées dont l'une est principalement polarisée. On suppose que la partie fixe de $|M|$ contient une courbe irréductible C. Alors, soit $\deg M \leq 2$, soit C est une courbe elliptique.*

Démonstration. Soit $p : (X, M) \to (A, \Theta)$ une isogénie sur une variété abélienne principalement polarisée. Si A est irréductible, c'est la jacobienne d'une courbe D lisse de genre 3. On a

$$p(C) \subset \bigcap_{g \in G} \Theta_g,$$

où $G = p(H(M))$ (notation I.3.3) est de cardinal $d = \deg M$.

Si $d > 2$, on en déduit que $\Theta \cdot \Theta_g$ est réductible pour tout $g \in G \setminus \{0\}$. On utilise alors II.B.1.

Soient g et g' deux éléments distincts non nuls de G. On suppose $g = O_D(x - y)$ et $g' = O_D(x' - y')$. On a alors

$$\Theta \cap \Theta_g = D_x \cup (-D)_{-y}, \qquad \Theta \cap \Theta_{g'} = D_{x'} \cup (-D)_{-y'}.$$

Comme $p(C)$ est de dimension 1, on a l'un des cas suivants :

— $p(C) = D_x = D_{x'}$ et $x = x'$. On a alors $g - g' = O_D(y' - y)$ et $D_x \subset D_{y'} \cup (-D)_{-y}$. Comme $x \neq y'$ (puisque $g' \neq 0$), on en déduit que D est hyperelliptique d'involution τ et que $y = \tau x$. Mais alors $\Theta \supset p(C) - 2g = D - x + 2\tau x$, ce qui est impossible puisque $g \neq 0$.

— $p(C) = (-D)_{-y} = (-D)_{-y'}$ et $y = y'$. On procède comme ci-dessus.

— $p(C) = D_x = (-D)_{-y'}$, de sorte que D est hyperelliptique et $y' = \tau x$. On a $g' - g = O_D(x' - \tau y)$ et $\Theta \cdot \Theta_{g'-g} = D_{x'} \cup D_y \supset p(C)$, soit $x = x'$. On est ramené au premier cas.

La courbe D est donc superelliptique. Il existe $E \in \mathcal{A}_{1,(2)}$, $P \in \mathcal{A}_{2,(2)}$, une isogénie $\pi : E \times P \to A$, et un élément non nul g de $E \cap G$.

On a alors, par II.C.1.4,

$$\Theta \cdot \Theta_g = \pi(E \times \{p\}) \cup \pi(\{e\} \times \Delta), \qquad e \in E, \quad p \in P.$$

La courbe $p(C)$ est donc :

— soit $\pi(E \times \{p\})$, c'est-à-dire une courbe elliptique ;

— soit $\pi(\{e\} \times \Delta)$. On a alors, par II.C.2.5,

$$\forall g' \in A, \qquad \pi(\{e\} \times \Delta) \subset \Theta_{g'} \implies g' = 0 \text{ ou } g,$$

de sorte que $\deg M = \#G \leq 2$;

— soit une composante de $\pi(\{e\} \times \Delta)$. Le diviseur Δ est donc réductible. Par A2.1.1, il existe une isogénie $E_1 \times E_2 \to P$, où E_1 et E_2 sont des courbes elliptiques, et les composantes de Δ sont isomorphes à E_1 ou à E_2.

Si (A, Θ) est maintenant isomorphe à $(A_1, \Theta_1) \times (A_2, \Theta_2)$ avec $\dim A_1 = 1$, $\dim A_2 = 2$, l'hypothèse faite sur (X, M) entraîne qu'on n'a ni $G \subset A_1 \times \{0\}$, ni $G \subset \{0\} \times A_2$. Or, si $g = (g_1, g_2)$ avec $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$, on a

$$\Theta \cap \Theta_g = (\Theta_1 \times \Theta_{2,g_2}) \cup (\Theta_{1,g_1} \times \Theta_2) \cup (A_1 \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,g_2})).$$

Si Θ_2 est réductible, toutes les composantes sont des courbes elliptiques. Si C n'est pas elliptique, on a donc $p(C) = \Theta_{1,g_1} \times \Theta_2$ ou $p(C) = \Theta_1 \times \Theta_{2,g_2}$. Si $h = (h_1, h_2) \in G$, on a alors

$$\Theta_{1,g_1} \times \Theta_2 \subset (\Theta_{1,h_1} \times A_2) \cup (A_1 \times \Theta_{2,h_2}),$$

ou

$$\Theta_1 \times \Theta_{2,g_2} \subset (\Theta_{1,h_1} \times A_2) \cup (A_1 \times \Theta_{2,h_2}),$$

de sorte que

$$\text{soit } \forall h \in G, \quad g_1 = h_1 \text{ ou } h_2 = 0,$$
$$\text{soit } \forall h \in G, \quad h_1 = 0 \text{ ou } g_2 = h_2.$$

Dans le premier cas, si $g_1 = h_1$, alors $g_1 \neq g_1 + h_1$, donc $g_2 + h_2 = 0$, soit $h = (g_1, -g_2)$. Si $h_2 = 0$, alors $g_2 + h_2 \neq 0$, donc $g_1 = g_1 + h_1$ et $h = 0$. On a donc $G = \{0, (g_1, -g_2)\}$ et $d = 2$. Le second cas se traite de la même façon. □

Revenons à l'étude du cas 1). Comme (A, Θ) est supposée irréductible, (X'', M'') vérifie les hypothèses du lemme. On supposera que C'' n'est pas elliptique ; dans le cas contraire, on est ramené au cas 2). La polarisation M'' est alors de degré 2 et l'isogénie $\pi : X' \times X'' \to A$ fait de A un élément de $\mathcal{A}^2_{1,3}$. Notons F'' le lieu fixe de $|M''|$. On a

$$V \subset \Theta \implies \forall x'' \in C'', \quad s''_1(x'')s'_1 + s''_2(x'')s'_2 = 0 \implies C'' \subset F''.$$

De même, si on écrit $a = \pi(a', a'')$, l'inclusion $V \subset \Theta_a$ entraîne $C''_{-a''} \subset F''$.

Montrons d'abord que $a \in X'$. Supposons que $F'' = F''_{a''}$. Il suffit alors de remarquer que, X'' étant de dimension au moins 3, on a

$$\forall x'' \notin H(M''), \qquad H^0(X'', M''_{x''}) \hookrightarrow H^0(F'', M''_{x''}|_{F''}),$$

de sorte que $a'' \in H(M'')$ et $a \in X'$.

On suppose donc $F'' \neq F''_{a''}$; F'' est alors réductible. En vertu de A2.2.4, on peut choisir une isogénie de degré 2 de (X'', M'') sur une jacobienne irréductible (J, Θ). L'image de F'' est alors $\Theta \cdot \Theta_\varepsilon$, où ε est l'unique élément non nul de l'image de $H(M'')$ dans J. Par II.B.1, on est dans l'un des cas suivants :

— $\Theta \cdot \Theta_\varepsilon$ est irréductible et F'' a deux composantes qui diffèrent par une translation par un élément de $H(M'')$. Comme $F'' \supset C'' \cup C''_{a''}$, il est facile de voir qu'on ne peut avoir $F'' \neq F''_{a''}$.

— J est la jacobienne d'une courbe hyperelliptique. De nouveau, F'' a deux composantes qui diffèrent par une translation par un élément de $H(M'')$, ce qui mène à une contradiction.

— J est la jacobienne d'une courbe superelliptique. Il existe alors une isogénie $\pi'' : E \times P \to X''$ avec $E \in \mathcal{A}_{1,(2)}$, $P \in \mathcal{A}_{2,(2)}$, de sorte que $(A, \Theta) \in \mathcal{A}^2_{1,1,2}$. On a

$$F'' = \pi''(E \times \{p\}) \cup \pi''(\{e\} \times \Delta), \qquad e \in E, \quad p \in P, \quad \Delta \in |M_P|.$$

Si Δ est réductible, ses composantes sont des courbes elliptiques. Comme C'' n'est pas elliptique, Δ est irréductible et $C'' = C''_{-a''} = \pi''(\{e\} \times \Delta)$, de sorte que $a'' \in \pi''(H(M_P)) \subset H(M'')$ et $a \in X'$.

On a donc montré dans tous les cas que $a \in X'$, de sorte que, par II.C.1.4,

$$\Theta \cdot \Theta_a = \pi(X' \times F'') \cup \pi(\{x'\} \times \Delta''), \qquad x' \in X', \quad \Delta'' \in |M''|.$$

Il ressort de II.C.2.5 que le diviseur Δ'' doit être réductible. Par A2.1.1, il existe alors une isogénie de degré 2, $X''_1 \times X''_2 \to X''$, qui fait de A un élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,2}$. Comme en A2.2.1, on peut considérer A comme un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$, ce qui termine la démonstration de la proposition dans le cas 1).

Cas 2). Comme dans le cas 1), on a $x''_0 \in F''$.

Lemme II.F.4.5. *Soit (X, M) une variété abélienne polarisée de dimension 2, qui ne soit pas produit de deux variétés abéliennes polarisées dont l'une est principalement polarisée. Alors, si la partie fixe de $|M|$ est non vide, on a* $\deg M \leq 2$.

Démonstration. Soit $p : (X, M) \to (A, \Theta)$ une isogénie sur une variété abélienne principalement polarisée, et $G = p(H(M))$, de cardinal $d = \deg M$. On a

$$p(\mathrm{Bs}\,|M|) = \bigcap_{g \in G} \Theta_g.$$

Soit a un élément de cette intersection. On a alors

$$\forall g \in G \setminus \{0\}, \qquad a + G \subset \Theta \cdot \Theta_g.$$

Si $d > 2$, puisque $\Theta^2 = 2$, $\Theta \cdot \Theta_g$ est de dimension 1. Il s'ensuit que Θ est réductible, $A \simeq E_1 \times E_2$, avec $G \subset E_1 \times \{0\}$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur (X, M). □

L'isogénie $\pi : X' \times X'' \to A$ fait donc de (A, Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{2,2}$. Comme dans le cas 1), on écrit $a = \pi(a', a'')$. On a de la même façon

$$\pi(X' \times \{x''_0\}) \subset \Theta_a \implies x''_0 - a'' \in F''.$$

Comme $(M'')^2 = 4$ et $\dim F'' = 0$, on a $F'' = x''_0 + H(M'')$, donc $a'' \in H(M'')$ et $a \in X'$. Ceci termine le cas 2).

Cas 3). On prend les mêmes notations que pour les deux cas précédents. On a donc

$$\sum_{i=1}^{d} s''_i(x''_0)s'_i = 0 \quad \text{sur } S'.$$

Soit D' le diviseur de $|M'|$ défini par cette équation. Si $S' = D'$, on a $D' \subset \Theta_a$. On écrit $a = \pi(a', a'')$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{d} s''_i(x''_0 - a'')s'_{i,-a'} = 0 \quad \text{sur } D'.$$

Comme en II.C.2.5, on montre que cela implique $a' \in H(M')$. On suppose donc $a' = 0$. On a alors $s''_i(x''_0) = s''_i(x''_0 - a'')$ pour tout i. Comme $a'' \neq 0$, le système linéaire $|M''|$ n'est pas très ample et $d = \deg M'' \leq 2$.

La variété abélienne (A, Θ) est donc élément de $\mathcal{A}^2_{1,3}$. On termine par un raisonnement déjà employé : on a $a \in X''$ et, par II.C.2.5, il ne peut y avoir de trisécante que si D' est réductible. Il existe alors une isogénie de degré 2, $\pi' : X'_1 \times X'_2 \to X'$, avec $\dim X'_1 = 1$. Ceci termine la démonstration de la proposition dans ce cas.

Si $S' \neq D'$, D' est réductible et il existe une isogénie $\pi' : X'_1 \times X'_2 \to X'$ comme ci-dessus, avec

$$D' = \pi'(\{x'_1\} \times X'_2) \cup \pi'(X'_1 \times \Delta'_2), \qquad \Delta'_2 \in |M'_2|.$$

On est ainsi ramené au cas 2) ou au cas 1). □

II.F.4.6. Démonstration du théorème II.F.4.1

Démonstration. On part maintenant d'une variété abélienne principalement polarisée irréductible (A, Θ) de dimension $g \geq 4$ satisfaisant aux hypothèses du théorème II.F.4.1. Il ressort du préliminaire et de nos hypothèses, que (A, Θ) appartient en particulier à $\bigcup_{2 \leq t \leq g/2} \mathcal{A}^2_{t,g-t}$. Par A2.2.2, il existe des variétés abéliennes polarisées de degré 2, $(X_1, M_1), \ldots, (X_r, M_r)$, de dimensions $g_1, \ldots, g_r$, avec $r \geq 2$ et $g = g_1 + \cdots + g_r$, des générateurs α_i, β_i de $H(M_i)$ et une isogénie

$$\pi : X = X_1 \times \cdots \times X_r \longrightarrow A$$

dont le noyau est engendré par $(\alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_i, 0, \ldots, 0)$, pour $2 \leq i \leq r$, et $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$.

On peut choisir des éléments $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ du groupe thêta $\mathcal{G}(M_i)$, d'images α_i, β_i dans $H(M_i)$, tels que

$$\tilde{\alpha}_i^2 = \tilde{\beta}_i^2 = 1, \qquad \tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_i\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_i = -1.$$

Soit s^i une section non nulle de M_i, invariante par $\tilde{\alpha}_i$, et $t^i = \tilde{\beta}_i s^i$; alors $\{s^i, t^i\}$ est une base de $H^0(M_i)$.

On peut faire les hypothèses suivantes :

(4.7) $(X_i, M_i) \in \mathcal{P}_{g_i,(2)}$ (cf. A2.3.6).

(4.8) Pour tout i, soit $g_i = 1$, soit $\operatorname{div}(s^i)$ et $\operatorname{div}(t^i)$ sont irréductibles (cf. A2.3.6).

(4.9) Pour tout i, $g_i \leq g - 2$.

(4.10) Si $r = 2$, tout élément de $|M_1| \cup |M_2|$ est irréductible.

(4.11) Si $g = 4$, soit il existe i avec $g_i = 2$ et $a \in \pi(X_i)$, soit il existe i, j avec $g_i = g_j = 1$ et $a \in \pi(X_i \times X_j)$. Ceci résulte de la proposition 4.2.

Remarque II.F.4.12. *Comme en A2.2.1 et par A2.3.8, on peut regrouper certains X_i : si X'_1 est, par exemple, le quotient de $X_1 \times \cdots \times X_{r'}$ par le sous-groupe engendré par $(\alpha_1, 0, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0)$ pour $2 \leq i \leq r'$, alors A est un quotient de $X'_1 \times X_{r'+1} \times \cdots \times X_r$ du même type.*

On pourra donc supposer, par exemple, $r = 2$ pour simplifier certains calculs. On perd alors les hypothèses (4.8) et (4.10).

Supposons qu'il existe des éléments

$$x = (x_1, \dots, x_r), \quad a = (a_1, \dots, a_r), \quad b = (b_1, \dots, b_r),$$
$$c = (c_1, \dots, c_r), \quad d = (d_1, \dots, d_r)$$

de X, avec $x = a + b = c + d$, vérifiant

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\prod_i s^i + \prod_i t^i \right) \left(\prod_i s^i_{x_i} + \prod_i t^i_{x_i} \right) \\ &+\mu \left(\prod_i s^i_{a_i} + \prod_i t^i_{a_i} \right) \left(\prod_i s^i_{b_i} + \prod_i t^i_{b_i} \right) \\ &+\nu \left(\prod_i s^i_{c_i} + \prod_i t^i_{c_i} \right) \left(\prod_i s^i_{d_i} + \prod_i t^i_{d_i} \right) = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

où $\lambda\mu\nu \neq 0$. Les trois ensembles $\{0, x\} + \ker \pi$, $\{a, b\} + \ker \pi$ et $\{c, d\} + \ker \pi$ sont supposés deux à deux disjoints. Tous les produits non bornés de cette section portent sur $i = 1, \dots, r$.

Comme d'habitude, $s^i_{x_i}$ est l'image de s^i par

$$H^0(X_i, M_i) \xrightarrow{\tau^*_{-x_i}} H^0(X_i, M_{i,x_i}).$$

On choisit une fois pour toutes des isomorphismes $M_{i,a_i} \otimes M_{i,b_i} \simeq M_{i,c_i} \otimes M_{i,d_i} \simeq M_i \otimes M_{i,x_i}$, omis dans (4.13).

Le groupe $\mathcal{G}(M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_r)$ est un quotient de $\prod_i \mathcal{G}(M_i)$ [Mu 5, lemme 1, p. 323]. En faisant agir $(\tilde{\alpha}_1, 1, \dots, 1)$ sur (4.13), on obtient les deux relations

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\prod_i s^i s^i_{x_i} + \prod_i t^i t^i_{x_i} \right) + \mu \left(\prod_i s^i_{a_i} s^i_{b_i} + \prod_i t^i_{a_i} t^i_{b_i} \right) \\ &+\nu \left(\prod_i s^i_{c_i} s^i_{d_i} + \prod_i t^i_{c_i} t^i_{d_i} \right) = 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\prod_i s^i t^i_{x_i} + \prod_i s^i_{x_i} t^i \right) + \mu \left(\prod_i s^i_{a_i} t^i_{b_i} + \prod_i s^i_{b_i} t^i_{a_i} \right) \\ &+\nu \left(\prod_i s^i_{c_i} t^i_{d_i} + \prod_i s^i_{d_i} t^i_{c_i} \right) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Appliquons ensuite $(\tilde{\beta}_1, 1, \dots, 1)$ à (4.14). Pour $\varepsilon = \pm 1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\lambda (s^1 s^1_{x_1} + \varepsilon t^1 t^1_{x_1}) \left(\prod_{i=2}^r s^i s^i_{x_i} + \varepsilon \prod_{i=2}^r t^i t^i_{x_i} \right) \\ &+ \mu (s^1_{a_1} s^1_{b_1} + \varepsilon t^1_{a_1} t^1_{b_1}) \left(\prod_{i=2}^r s^i_{a_i} s^i_{b_i} + \varepsilon \prod_{i=2}^r t^i_{a_i} t^i_{b_i} \right) \\ &+ \nu (s^1_{c_1} s^1_{d_1} + \varepsilon t^1_{c_1} t^1_{d_1}) \left(\prod_{i=2}^r s^i_{c_i} s^i_{d_i} + \varepsilon \prod_{i=2}^r t^i_{c_i} t^i_{d_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

En continuant et en procédant de même avec (4.15), on trouve

$$\begin{cases} \lambda \bigotimes_{i=1}^{r} U_i^{\varepsilon_i} + \mu \bigotimes_{i=1}^{r} V_i^{\varepsilon_i} + \nu \bigotimes_{i=1}^{r} W_i^{\varepsilon_i} = 0, \\ \lambda \bigotimes_{i=1}^{r} \overline{U}_i^{\varepsilon_i} + \mu \bigotimes_{i=1}^{r} \overline{V}_i^{\varepsilon_i} + \nu \bigotimes_{i=1}^{r} \overline{W}_i^{\varepsilon_i} = 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \quad \prod_i \varepsilon_i = 1, \tag{4.16}$$

où, pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et $1 \leq i \leq r$,

$$\begin{aligned} U_i^{\varepsilon} &= s^i s^i_{x_i} + \varepsilon t^i t^i_{x_i}, & V_i^{\varepsilon} &= s^i_{a_i} s^i_{b_i} + \varepsilon t^i_{a_i} t^i_{b_i}, \\ W_i^{\varepsilon} &= s^i_{c_i} s^i_{d_i} + \varepsilon t^i_{c_i} t^i_{d_i}, & \overline{U}_i^{\varepsilon} &= s^i t^i_{x_i} + \varepsilon s^i_{x_i} t^i, \\ \overline{V}_i^{\varepsilon} &= s^i_{a_i} t^i_{b_i} + \varepsilon s^i_{b_i} t^i_{a_i}, & \overline{W}_i^{\varepsilon} &= s^i_{c_i} t^i_{d_i} + \varepsilon s^i_{d_i} t^i_{c_i} \end{aligned} \tag{4.17}$$

sont des éléments de $H^0(X_i, M_i \otimes M_{i,x_i})$.

Remarque II.F.4.18. *On a*

$$\begin{aligned} U_i^+ = 0 &\iff x_i = \alpha_i + \beta_i, \quad V_i^+ = 0 \iff a_i - b_i = \alpha_i + \beta_i, \quad \dots, \\ U_i^- = 0 &\iff x_i = \beta_i, \qquad \dots, \\ \overline{U}_i^+ = 0 &\iff x_i = \alpha_i, \qquad \dots, \\ \overline{U}_i^- = 0 &\iff x_i = 0, \qquad \dots. \end{aligned}$$

Montrons, par exemple, la première équivalence, en omettant l'indice i. On a $ss_x = -tt_x$. Comme s, t n'ont pas de composante commune, $\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(t_x)$, d'où $x \in H(M)$ et, plus précisément, $x \in \{\beta, \alpha + \beta\}$. Si $x = \beta$, l'élément $\tilde{\beta} \in \mathcal{G}(M)$ correspond à un isomorphisme $u\colon M \longrightarrow M_\beta$, induisant $u^*\colon H^0(M_\beta) \longrightarrow H^0(M)$. Puisque $t = \tilde{\beta} s$, on a par définition $t = u^*(s_\beta)$. L'isomorphisme u induit $v\colon M \otimes M \longrightarrow M \otimes M_\beta$, et

$$v^*(ss_\beta + tt_\beta) = s\, u^*(s_\beta) + t\, u^*(t_\beta) = 2st \neq 0.$$

On vérifie de même que $x = \alpha + \beta$ annule effectivement U^+.

(4.19) Premier cas : $a_1, c_1 \in H(M_1)$. En ajoutant des éléments de $\ker \pi$ à a, c, ainsi qu'à b, d pour conserver $x = a + b = c + d$, on se ramène à $a_1 = c_1 = 0$.

Supposons d'abord $x_1 \notin H(M_1)$. Les sections $s^1 s^1_{x_1}$, $t^1 t^1_{x_1}$, $s^1 t^1_{x_1}$ et $s^1_{x_1} t^1$ sont alors linéairement indépendantes. En regroupant $X_2, \dots, X_r$ comme en (4.12), on peut supposer $r = 2$. Les relations (4.14)–(4.15) donnent

$$\begin{aligned} &\lambda s^2 s^2_{x_2} + \mu s^2_{a_2} s^2_{b_2} + \nu s^2_{c_2} s^2_{d_2} \\ &= \lambda t^2 t^2_{x_2} + \mu t^2_{a_2} t^2_{b_2} + \nu t^2_{c_2} t^2_{d_2} \\ &= \lambda s^2 t^2_{x_2} + \mu s^2_{a_2} t^2_{b_2} + \nu s^2_{c_2} t^2_{d_2} \\ &= \lambda s^2_{x_2} t^2 + \mu s^2_{b_2} t^2_{a_2} + \nu s^2_{d_2} t^2_{c_2} = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tous $\sigma, \sigma' \in H^0(M_2)$,

$$\lambda \sigma \sigma'_{x_2} + \mu \sigma_{a_2} \sigma'_{b_2} + \nu \sigma_{c_2} \sigma'_{d_2} = 0.$$

Le lemme suivant donne $a_2 = c_2 = 0$, donc $a = c = 0$, en contradiction avec l'hypothèse.

Lemme II.F.4.20. *Soit (X, M) une variété abélienne polarisée irréductible de degré 2. Supposons qu'il existe $x, a, b, c, d \in X$ et des nombres complexes non nuls λ, μ, ν tels que $x = a + b = c + d$ et*

$$\lambda\sigma\sigma'_x + \mu\sigma_a\sigma'_b + \nu\sigma_c\sigma'_d = 0 \qquad \text{pour tous } \sigma, \sigma' \in H^0(M).$$

Alors $a = c = 0$.

Démonstration. La dimension 1 découle du lemme 4.22 ci-dessous. Supposons $\dim X \geq 2$. Par A2.1.2, le diviseur d'une section générique $\sigma \in H^0(M)$ est irréductible. Choisissons une base $\{s, t\}$ comme précédemment.

Premier cas : $c \notin H(M)$. Un point générique $y \in \operatorname{div}(\sigma)$ n'appartient pas à $\operatorname{div}(\sigma_c)$. Il existe $(p : q) \in \mathbb{P}^1$ tel que $ps_b(y) + qt_b(y) = 0$. En prenant $\sigma' = ps + qt$, on obtient aussi $ps_d(y) + qt_d(y) = 0$, donc $(s_bt_d - s_dt_b)(y) = 0$. Comme y est générique sur $\operatorname{div}(\sigma)$ et σ générique dans $H^0(M)$, on a $s_bt_d = s_dt_b$, d'où $b = d$ par la remarque 4.18. Ainsi

$$\lambda\sigma\sigma'_x + (\mu\sigma_a + \nu\sigma_c)\sigma'_b = 0 \qquad \text{pour tous } \sigma, \sigma'.$$

Le lieu fixe de $|M|$ étant de codimension 2, on en déduit $\operatorname{div}(\sigma'_b) \subset \operatorname{div}(\sigma'_x)$, donc $b = x$. Ceci contredit $c \notin H(M)$.

Deuxième cas : $a, c \in H(M)$. Parmi s, s_a, s_c, deux ont même diviseur, par exemple s, s_a. Avec $\gamma \neq 0$, on a

$$s(\lambda\sigma'_x + \gamma\mu\sigma'_b) + \nu s_c\sigma'_d = 0 \qquad (\sigma' \in H^0(M)).$$

Il s'ensuit $\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s_a) = \operatorname{div}(s_c)$. Le même argument avec t donne $a = c = 0$. □

On peut donc supposer $x_1 = 0$. Comme ci-dessus, on obtient en particulier, sans supposer désormais $r = 2$,

$$\lambda\prod_{i=2}^{r} s^i s^i_{x_i} + \mu\prod_{i=2}^{r} s^i_{a_i}s^i_{b_i} + \nu\prod_{i=2}^{r} s^i_{c_i}s^i_{d_i} = 0.$$

Le triplet $(s^i s^i_{x_i}, s^i_{a_i}s^i_{b_i}, s^i_{c_i}s^i_{d_i})$ de $H^0(M_i \otimes M_{i,x_i})$ est donc de rang au plus 1 pour tous les indices sauf, éventuellement, un. Lorsque ce rang est au plus 1, l'un de a_i, b_i et l'un de c_i, d_i appartiennent à $\{0, x_i\}$. L'étude précédente permet alors de supposer $a_i = b_i = c_i = d_i = 0$ pour $i \neq r$, par exemple. Ainsi

$$\lambda\sigma\sigma_{x_r} + \mu\sigma_{a_r}\sigma_{b_r} + \nu\sigma_{c_r}\sigma_{d_r} = 0 \qquad (\sigma \in H^0(M_r)). \tag{4.21}$$

Comme $\dim X_r \leq g - 2$ par (4.9), le lemme suivant permet de conclure.

Lemme II.F.4.22. *Soit $(X, M) \in \mathcal{P}_{g,(2)}$ une variété abélienne polarisée irréductible de degré 2. Supposons qu'il existe $x, a, b, c, d \in X$ et des nombres complexes non nuls λ, μ, ν tels que $x = a + b = c + d$ et*

$$\lambda\sigma\sigma_x + \mu\sigma_a\sigma_b + \nu\sigma_c\sigma_d = 0 \qquad (\sigma \in H^0(M)).$$

Si la conjecture des trisécantes est vraie pour les variétés de Prym de dimension $g + 1$, alors $\{a, b\} = \{c, d\} = \{0, x\}$.

Démonstration. Soit E une courbe elliptique munie d'une polarisation de degré 2. On peut construire une isogénie π de degré 4 de $E \times X$ sur une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), de dimension $g + 1$, appartenant à $\mathcal{P}^2_{1,g}$ (A2.3.8), donc à $\mathcal{P}_{g+1}$. Considérons X comme sous-variété de A. Si θ est une équation de Θ, on a

$$\lambda\theta\theta_x + \mu\theta_a\theta_b + \nu\theta_c\theta_d = 0.$$

Supposons d'abord $\dim X \geq 2$. Par A2.2.3, (A, Θ) est irréductible et sa variété de Kummer admet une trisécante si la conclusion du lemme est fausse. C'est donc la jacobienne d'une courbe C de genre $g+1 \geq 3$, admettant un morphisme de degré 2 sur E (cf. II.C.1.2).

Par II.B.4, il existe $x, y, z, t \in C$ tels que, quitte à intervertir c, d,

$$a \equiv x - y, \qquad b \equiv z - t, \qquad c \equiv x - t, \qquad d \equiv z - y.$$

Mais les images de a, b, c, d dans $\mathrm{Pic}^0 E$ sont nulles puisqu'ils appartiennent à X. Si τ est l'involution de $C \longrightarrow E$, on a donc

$$y = \tau x, \qquad t = \tau z, \qquad t = \tau x, \qquad z = \tau y,$$

d'où $a = b = c = d$, puis facilement $a = b = c = d = 0$.

Il reste le cas $\dim X = 1$. Choisissons $e, y \in X$ tels que $2[e] \in |M|$ et $2y = 2e + a$. Si $\sigma \in H^0(M)$ vérifie $\sigma(y) = 0$, alors $\sigma_a(y) = 0$; ainsi $\sigma_c(y) = 0$ ou $\sigma_d(y) = 0$. Supposons, par exemple, $\sigma_c(y) = 0$. On a $y - c \in \mathrm{div}(\sigma) = [y] + [2e - y]$.

Si $y - c = y$, alors $c = 0$ et

$$(\lambda + \nu)\sigma\sigma_x + \mu\sigma_a\sigma_b = 0 \qquad (\sigma \in H^0(M)).$$

Pour tout $z \in X$, cela donne l'égalité de diviseurs

$$[z] + [2e - z] + [z + x] + [2e - z + x] = [z + a] + [2e - z + a] \\ + [z + b] + [2e - z + b].$$

Si $a, b \neq 0$, alors pour tout z, $z = 2e - z + a$ ou $z = 2e - z + b$, ce qui est absurde. Donc a ou b est nul, ce qui démontre le lemme dans ce cas.

Si $y - c = 2e - y$, alors $c = a$ et

$$\lambda\sigma\sigma_x + (\mu + \nu)\sigma_a\sigma_b = 0 \qquad (\sigma \in H^0(M)).$$

On termine comme ci-dessus. □

(4.23) Deuxième cas. Pour tout i, supposons qu'on ne puisse choisir à la fois un élément de $\{a_i, b_i\} \cap H(M_i)$ et un élément de $\{c_i, d_i\} \cap H(M_i)$; autrement dit,

$$\{a_i, b_i\} \cap H(M_i) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \{c_i, d_i\} \cap H(M_i) = \emptyset.$$

On conserve les notations précédentes, notamment (4.17), et les hypothèses (4.7)–(4.11).

Lemme II.F.4.24. *Soit $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\dim X_i > 1$. Au plus un des quatre triplets*

$$(U_i^+, V_i^+, W_i^+), \quad (U_i^-, V_i^-, W_i^-), \quad (\overline{U}_i^+, \overline{V}_i^+, \overline{W}_i^+), \quad (\overline{U}_i^-, \overline{V}_i^-, \overline{W}_i^-)$$

de $H^0(M_i \otimes M_{i,x_i})$ est de rang au plus 1.

Démonstration. Prenons $i = 1$ et omettons cet indice, sauf pour X_1 ou lorsque c'est nécessaire.

Premier cas : les triplets (U^+, V^+, W^+) et (U^-, V^-, W^-) sont de rang au plus 1.

1) $U^+ \neq 0$ et $U^- \neq 0$. On peut écrire

$$s_a s_b = \gamma s s_x + \gamma' t t_x, \qquad s_c s_d = \delta s s_x + \delta' t t_x. \tag{4.25}$$

a) Supposons $a \in H(M)$. On peut supposer $a = 0$. En regroupant $X_2, \dots, X_r$ comme en (4.12), les relations (4.16) donnent

$$\overline{U}_1^{\varepsilon} \otimes (\lambda \overline{U}_2^{\varepsilon} + \mu \overline{V}_2^{\varepsilon}) + \nu \overline{W}_1^{\varepsilon} \otimes \overline{W}_2^{\varepsilon} = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Puisque $2 s^2_{c_2} t^2_{d_2} = \overline{W}_2^{+} + \overline{W}_2^{-}$, ces deux dernières sections ne sont pas toutes deux nulles. Supposons, par exemple, $\overline{W}_2^{+} \neq 0$. On peut alors écrire

$$s_c t_d + s_d t_c = \rho(s t_x + s_x t).$$

Avec (4.25), ceci donne, pour $p, q \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(p s_c + q t_c)(p s_d + q t_d) = s[(p^2\delta + q^2\delta')s_x + pq\rho t_x] \\ + t[pq\rho s_x + (p^2\delta' + q^2\delta) t_x].\end{aligned}$$

Si $(p^2\delta + q^2\delta')(p^2\delta' + q^2\delta) - p^2q^2\rho^2 = 0$, on a donc $\sigma_c \sigma_d = \sigma' \sigma''_x$, avec $\sigma = ps + qt \in H^0(M)$ et $\sigma', \sigma'' \in H^0(M)$.

Par (4.23), ni c ni d n'appartiennent à $H(M)$, puisque $a = 0$. Le diviseur de σ est donc réductible. Par A2.2.2, il existe une isogénie $\pi' : X'_1 \times \cdots \times X'_n \longrightarrow X_1$, où les X'_j sont polarisées de degré 2, dont le noyau est engendré par $(\alpha'_1, 0, \dots, \alpha'_j, 0, \dots)$ pour $2 \leq j \leq n$. Si, par exemple, $\operatorname{div}(s + t)$ est réductible, on a

$$\pi'^*(s + t) = s'^1 \cdots s'^n,$$

où $\operatorname{div}(s'^j)$ est irréductible lorsque $\dim X'_j > 1$, et

$$\beta = \pi'(\alpha'_1, 0, \dots, 0), \qquad \alpha = \pi'(\beta'_1, \dots, \beta'_n).$$

Si $c = \pi'(c'_1, \dots, c'_n)$ et $d = \pi'(d'_1, \dots, d'_n)$, alors, pour tout j, l'un de c'_j, d'_j appartient à $H(M'_j)$.

Comme dans la remarque 4.12, regroupons $X_2, \dots, X_r$ pour supposer $r = 2$, puis considérons X comme quotient de $X'_1 \times \cdots \times X'_n \times X_2$. C'est donc un élément de $A^2_{g'_1, \dots, g'_n, g_2}$. On a alors, par exemple, $a'_1 = c'_1 = 0$, ce qui ramène à (4.19).

b) Supposons $a, b, c, d \notin H(M)$ et $a - c \in H(M)$. On peut supposer $a = c$, $b = d$. On a encore

$$\lambda \overline{U}_1^{\varepsilon} \otimes \overline{U}_2^{\varepsilon} + \overline{V}_1^{\varepsilon} \otimes (\mu \overline{V}_2^{\varepsilon} + \nu \overline{W}_2^{\varepsilon}) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

ce qui ramène comme ci-dessus à (4.19).

c) Supposons $a, b, c, d, a - c, a - d \notin H(M)$. La variété abélienne principalement polarisée $(X_1^{\alpha}, \Theta) = (X_1, M_1)/\{0, \alpha_1\}$, irréductible par (4.8), admet donc une quadrisécante. En désignant par les mêmes lettres les images des éléments de X_1 dans X_1^{α}, on a, par (4.25),

$$\begin{aligned}\Theta \cdot \Theta_\beta \subset \Theta_a \cup \Theta_b, \quad \{a, b\} \cap \{0, \beta\} = \emptyset, \\ \Theta \cdot \Theta_\beta \subset \Theta_c \cup \Theta_d, \quad \{c, d\} \cap \{0, \beta\} = \emptyset.\end{aligned}$$

La conjecture des trisécantes étant supposée vraie pour les variétés de Prym de dimension $\dim X_1$, X_1^{α} est une jacobienne JC. Par II.B.4, on peut écrire

$$\begin{aligned}P, Q, R, S, Q_0, Q_1 \in C, \qquad \beta \equiv Q_0 - Q_1, \\ a \equiv Q_0 - P, \quad b \equiv Q - Q_1, \quad c \equiv Q_0 - R, \quad d \equiv S - Q_1.\end{aligned}$$

Comme β est d'ordre 2, X_1^{α} est une jacobienne hyperelliptique et Q_0, Q_1 sont des points de Weierstrass. L'égalité $a + b = c + d$ donne $Q + R \equiv S + P$. Il y a trois possibilités :

1. $P = Q, R = S$, donc $x = \beta$. Alors $s_a s_b$ est proportionnel à ss_x, d'où $a \in H(M)$ ou $b \in H(M)$, contrairement à l'hypothèse du cas c).
2. $P = R, Q = S$, donc $a = c, b = d$.
3. $R + Q \equiv S + P \equiv g^1_2$, donc $c - b = d - a = \beta$.

Les deux derniers cas sont exclus par $a - c, a - d \notin H(M)$. Ceci termine le cas 1).

2) $U^- = 0$ et $U^+ \neq 0$. On a $x = \beta \in H(M)$ par la remarque 4.18.

a) Supposons $a \in H(M)$. On peut supposer $a = 0$, d'où $V^+ = U^+ = 2st$. Ainsi

$$W^+ = s_c s_d + t_c t_d = \gamma st.$$

Comme dans 1)a), on a aussi

$$s_c t_d + s_d t_c = \rho(st_x + s_x t) = \rho(s^2 + t^2).$$

Par suite,

$$(s_c + t_c)(s_d + t_d) = \sigma'\sigma'', \qquad \sigma', \sigma'' \in H^0(M).$$

On termine comme en 1)a), en se ramenant à (4.19).

b) Supposons $a, b, c, d \notin H(M)$ et $a - c \in H(M)$. On procède comme en 1)b).

c) Supposons $a, b, c, d, a - c, a - d \notin H(M)$. L'hypothèse $\operatorname{rang}(U^+, V^+, W^+) = 1$ donne

$$\begin{cases} s_a s_b + t_a t_b = \gamma s s_x, \\ s_c s_d + t_c t_d = \delta s s_x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma s_{-a} s_b = s s_{b-a} + t t_{b-a}, \\ \delta s_{-c} s_d = s s_{d-c} + t t_{d-c}. \end{cases}$$

On distingue les possibilités suivantes :

1. $\gamma\delta \neq 0$. Comme en 1)c), la conjecture des trisécantes pour X^α_1 donne une contradiction.
2. $\gamma = 0$. L'hypothèse $\operatorname{rang}(V^-, W^-) \leq 1$ donne

$$s_c s_d - t_c t_d = \rho s_a s_b, \qquad \rho s_{a-c} s_{b-c} = s s_{d-c} - t t_{d-c}.$$

   Si $\rho\delta \neq 0$, on obtient la même contradiction.
3. $\gamma = \delta = 0$. Alors $s_c s_d = -t_c t_d$ et $2 s_c s_d = \rho s_a s_b$, ce qui contredit c) par la remarque 4.18.
4. $\gamma = \rho = 0$. Alors $s_c s_d = t_c t_d$ et $2 s_c s_d = \delta s s_x$, ce qui contredit encore c).

Deuxième cas : $\operatorname{rang}(\overline{U}^+, \overline{V}^+, \overline{W}^+) \leq 1$ *et* $\operatorname{rang}(\overline{U}^-, \overline{V}^-, \overline{W}^-) \leq 1$. On procède comme dans le premier cas, ou on s'y ramène en remplaçant b, d par $b + \beta, d + \beta$.

Troisième cas : $\operatorname{rang}(U^+, V^+, W^+) \leq 1$ *et* $\operatorname{rang}(\overline{U}^+, \overline{V}^+, \overline{W}^+) \leq 1$.

1) $U^+ \neq 0$ et $\overline{U}^+ \neq 0$. On peut écrire

$$\begin{cases} u_a u_b = \gamma u u_x + \gamma' v v_x, \\ u_c u_d = \delta u u_x + \delta' v v_x, \end{cases} \qquad u = s + t, \quad v = s - t. \tag{4.26}$$

a) Supposons $a \in H(M)$. Comme précédemment, supposons $a = 0$. En regroupant $X_2, \ldots, X_r$, on obtient

$$\begin{cases} U^-_1 \otimes (\lambda U^-_2 + \mu V^-_2) + \nu W^-_1 \otimes W^-_2 = 0, \\ \overline{U}^-_1 \otimes (\lambda \overline{U}^-_2 + \mu \overline{V}^-_2) + \nu \overline{W}^-_1 \otimes \overline{W}^-_2 = 0. \end{cases}$$

Puisque $W_2^-, \overline{W}_2^-$ ne peuvent être toutes deux nulles, on a

$$\operatorname{rang}(U_1^-, W_1^-) \leq 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{rang}(\overline{U}_1^-, \overline{W}_1^-) \leq 1.$$

Comme $U_1^- = V_1^-$ et $\overline{U}_1^- = \overline{V}_1^-$, on est ramené à l'un des deux premiers cas.

b) Supposons $a,b,c,d \notin H(M)$ et $a-c \in H(M)$. On a encore $\operatorname{rang}(U_1^-, W_1^-) \leq 1$ ou $\operatorname{rang}(\overline{U}_1^-, \overline{W}_1^-) \leq 1$, avec $V_1^- = W_1^-$ et $\overline{V}_1^- = \overline{W}_1^-$. On revient à l'un des deux premiers cas.

c) Supposons $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ et $X_1^\beta = X_1/\{0,\beta_1\}$ irréductible. On procède comme dans le premier cas, 1)c).

d) Supposons $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ et X_1^β réductible. Le diviseur de $s+t$ est réductible. Comme dans le premier cas, 1)a), il existe une isogénie $\pi' : X_1' \times \cdots \times X_n' \longrightarrow X_1$, avec

1. $\pi'^*(s+t) = s'^1 \cdots s'^n$, où $\operatorname{div}(s'^j)$ est irréductible pour $\dim X_j' > 1$;
2. $a_1 = \pi'(a_1', \ldots, a_n')$, et de même pour b_1, c_1, d_1, x_1.

La première égalité (4.26) donne

$$\prod_j s'^j_{a_j'} s'^j_{b_j'} - \gamma \prod_j s'^j s'^j_{x_j'} - \gamma' \prod_j t'^j t'^j_{x_j'} = 0.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ sauf au plus un, les sections $s'^j_{a_j'} s'^j_{b_j'}$, $s'^j s'^j_{x_j'}$, $t'^j t'^j_{x_j'}$ de $M_j' \otimes M'_{j,x_j'}$ sont donc proportionnelles. Ainsi $a_j', b_j' \in H(M_j')$, ce qui ramène à (4.19).

2) $U^+ = 0$ et $\overline{U}^+ \neq 0$. Par la remarque 4.18, $x = \alpha + \beta$. Les arguments de 1)a), 1)b), 1)d), qui n'utilisent pas les non-annulations de 1), permettent de supposer $a,b,c,d,a-c,a-d \notin H(M)$ et X_1^β irréductible. On procède comme dans le premier cas, 2)c). □

(4.27) Si $\dim X_i = 1$, les quatre triplets sont de rang au plus 1. En effet, $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ engendrent un sous-groupe de niveau maximal de $\mathcal{G}(M_i \otimes M_{i,x_i})$ [Mu 5, définition p. 291]. Les sections

$$s^i s^i_{x_i} + t^i t^i_{x_i}, \quad s^i_{a_i} s^i_{b_i} + t^i_{a_i} t^i_{b_i}, \quad s^i_{c_i} s^i_{d_i} + t^i_{c_i} t^i_{d_i}$$

sont invariantes par ce sous-groupe, donc proportionnelles. Pour les autres triplets, on utilise respectivement les sous-groupes engendrés par $\{\tilde{\alpha}_i, -\tilde{\beta}_i\}$, $\{-\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i\}$ et $\{-\tilde{\alpha}_i, -\tilde{\beta}_i\}$.

Lemme II.F.4.28. *Au plus une des variétés X_i est de dimension supérieure à 1. En particulier, $r \geq 3$.*

Démonstration. Supposons $\dim X_1 > 1$, $\dim X_2 > 1$. Le lemme précédent assure qu'au moins deux des quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rang}(U_i^+, V_i^+, W_i^+) \geq 2 \quad (i = 1,2),\\
&\operatorname{rang}(U_i^-, V_i^-, W_i^-) \geq 2 \quad (i = 1,2),\\
&\operatorname{rang}(\overline{U}_i^+, \overline{V}_i^+, \overline{W}_i^+) \geq 2 \quad (i = 1,2),\\
&\operatorname{rang}(\overline{U}_i^-, \overline{V}_i^-, \overline{W}_i^-) \geq 2 \quad (i = 1,2).
\end{aligned}$$

Si $r = 2$, les égalités (4.16) donnent une contradiction immédiate. Compte tenu de (4.9), le cas $r = 2$ est donc définitivement exclu.

Si $r \geq 3$, regroupons $X_3, \ldots, X_r$ comme en (4.12). Les égalités (4.16) imposent que deux des quatre triplets $(U_3^\varepsilon, V_3^\varepsilon, W_3^\varepsilon)$, $(\overline{U}_3^\varepsilon, \overline{V}_3^\varepsilon, \overline{W}_3^\varepsilon)$ soient identiquement nuls, ce qui est impossible. □

Désormais, supposons $\dim X_1 = \cdots = \dim X_{r-1} = 1$.

Lemme II.F.4.29. *Supposons $r \geq 4$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, au plus une des sections $U_i^\varepsilon, V_i^\varepsilon, W_i^\varepsilon$ (respectivement $\overline{U}_i^\varepsilon, \overline{V}_i^\varepsilon, \overline{W}_i^\varepsilon$) est nulle.*

Démonstration. Prenons $i = 1$. Si $U_1^+ = V_1^+ = 0$, la remarque 4.18 donne $x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = a_1 + b_1$ et $b_1 - a_1 = \alpha_1 + \beta_1$, donc $a_1, b_1 \in X_1[2] = H(M_1)$. De même, $U_1^+ = W_1^+ = 0$ donne $c_1, d_1 \in H(M_1)$. Si $V_1^+ = W_1^+ = 0$, alors $b_1 - a_1 = d_1 - c_1 = \alpha_1 + \beta_1$; avec $a_1 + b_1 = c_1 + d_1$, on en déduit $c_1 - a_1 = d_1 - b_1 \in H(M_1)$ et $b_1 - c_1, a_1 - c_1 \in H(M_1)$. La translatée par $-c$ de II.A.1.3 s'écrit

$$\lambda s_{-c} s_d + \mu s_{a-c} s_{b-c} + \nu s s_{d-c} = 0.$$

Dans chacun de ces cas, il suffit donc d'exclure $a_1, b_1 \in H(M_1)$. Supposons alors $a_1 = b_1 = x_1 = 0$.

Avec (4.15) et $s^1_{c_1} t^1_{d_1} + s^1_{d_1} t^1_{c_1} = \gamma s^1 t^1$ (4.27), on obtient

$$s^1 t^1 \Big[\lambda\Big(\prod_{i=2}^r s^i t^i_{x_i} + \prod_{i=2}^r s^i_{x_i} t^i\Big) + \mu\Big(\prod_{i=2}^r s^i_{a_i} t^i_{b_i} + \prod_{i=2}^r s^i_{b_i} t^i_{a_i}\Big) + \nu\gamma \prod_{i=2}^r s^i_{d_i} t^i_{c_i}\Big] + \nu s^1_{c_1} t^1_{d_1}\Big[\prod_{i=2}^r s^i_{c_i} t^i_{d_i} - \prod_{i=2}^r s^i_{d_i} t^i_{c_i}\Big] = 0.$$

Par (4.23), ni c_1 ni d_1 n'appartiennent à $H(M_1)$; les sections $s^1 t^1$ et $s^1_{c_1} t^1_{d_1}$ sont donc linéairement indépendantes. Les deux crochets sont nuls. L'égalité $\prod_{i=2}^r s^i_{c_i} t^i_{d_i} = \prod_{i=2}^r s^i_{d_i} t^i_{c_i}$ donne $d_i - c_i \in \{0, \alpha_i\}$ pour $i \geq 2$. On peut donc supposer $c_i = d_i$ pour $i \geq 2$.

Comme en (4.25), on peut aussi écrire $s^1_{c_1} s^1_{d_1} = \delta (s^1)^2 + \delta' (t^1)^2$. L'équation (4.14) donne

$$\begin{cases} \lambda \prod_{i=2}^r s^i s^i_{x_i} + \mu \prod_{i=2}^r s^i_{a_i} s^i_{b_i} + \nu\delta \prod_{i=2}^r (s^i_{c_i})^2 + \nu\delta' \prod_{i=2}^r (t^i_{c_i})^2 = 0, \\ \lambda \prod_{i=2}^r t^i t^i_{x_i} + \mu \prod_{i=2}^r t^i_{a_i} t^i_{b_i} + \nu\delta' \prod_{i=2}^r (s^i_{c_i})^2 + \nu\delta \prod_{i=2}^r (t^i_{c_i})^2 = 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Choisissons $y_3 \in X_3$, $y_4 \in X_4$ tels que $s^3_{c_3}(y_3) = t^4_{c_4}(y_4) = 0$. En substituant dans (4.30), on obtient l'une des deux alternatives suivantes :

— une dépendance linéaire entre $\prod_{i\in I} s^i s^i_{x_i}$ et $\prod_{i\in I} s^i_{a_i} s^i_{b_i}$, ou entre $\prod_{i\in I} t^i t^i_{x_i}$ et $\prod_{i\in I} t^i_{a_i} t^i_{b_i}$, où $I = \{2, 5, \dots, r\}$. Alors, pour tout $i \in I$, a_i ou b_i appartient à $\{0, \alpha_i\}$;

— les quatre produits suivants sont nuls :

$$\begin{aligned} s^3(y_3) s^3_{x_3}(y_3) s^4(y_4) s^4_{x_4}(y_4) &= s^3_{a_3}(y_3) s^3_{b_3}(y_3) s^4_{a_4}(y_4) s^4_{b_4}(y_4) \\ &= t^3(y_3) t^3_{x_3}(y_3) t^4(y_4) t^4_{x_4}(y_4) \\ &= t^3_{a_3}(y_3) t^3_{b_3}(y_3) t^4_{a_4}(y_4) t^4_{b_4}(y_4) = 0. \end{aligned}$$

Mais, dans la seconde alternative, on a par exemple

$$s^3(y_3) = 0 \implies c_3 = d_3 \in H(M_3), \quad x_3 = 0.$$

Par (4.23), $a_3 - c_3, b_3 - c_3 \notin H(M_3)$, donc

$$s^3_{a_3}(y_3) s^3_{b_3}(y_3) t^3_{a_3}(y_3) t^3_{b_3}(y_3) \neq 0.$$

Il s'ensuit

$$s^4_{a_4}(y_4)s^4_{b_4}(y_4) = t^4_{a_4}(y_4)t^4_{b_4}(y_4) = 0, \quad a_4 - c_4, b_4 - c_4 \in H(M_4).$$

D'autre part,

$$t^3(y_3)t^3_{x_3}(y_3) \neq 0 \implies t^4(y_4)t^4_{x_4}(y_4) = 0 \implies c_4 \in H(M_4),$$

ce qui contredit (4.23). La première alternative est donc vérifiée. On en déduit, pour tout $i \geq 2$, que a_i ou b_i appartient à $\{0, \alpha_i\}$. En reportant dans (4.30),

$$(\lambda \pm \mu)\prod_{i=2}^{r} s^i s^i_{x_i} + \nu\delta\prod_{i=2}^{r}(s^i_{c_i})^2 + \nu\delta'\prod_{i=2}^{r}(t^i_{c_i})^2 = 0.$$

Choisissons $y_2 \in X_2$ tel que $s^2(y_2) = 0$. Les sections $\prod_{i=3}^r (s^i_{c_i})^2$ et $\prod_{i=3}^r (t^i_{c_i})^2$ étant linéairement indépendantes, on a $\delta(s^2_{c_2}(y_2))^2 = \delta'(t^2_{c_2}(y_2))^2 = 0$. Ainsi $\delta = 0$ ou $\delta' = 0$, d'où $c_1, d_1 \in H(M_1)$, en contradiction avec (4.23). Tous les cas conduisent donc à une contradiction. □

Lemme II.F.4.31. *Pour $i < r$, aucun des quatre triplets $(U^\varepsilon_i, V^\varepsilon_i, W^\varepsilon_i)$, $(\overline{U}^\varepsilon_i, \overline{V}^\varepsilon_i, \overline{W}^\varepsilon_i)$, avec $\varepsilon = \pm 1$, n'est identiquement nul.*

Démonstration. Omettons i. Si, par exemple, $U^+ = V^+ = W^+ = 0$, la remarque 4.18 donne

$$\begin{aligned} U^+ = ss_x + tt_x = 0 &\Longrightarrow x = \alpha + \beta \in H(M), \\ V^+ = 0 &\Longrightarrow b - a = \alpha + \beta, \\ W^+ = 0 &\Longrightarrow d - c = \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Ainsi $2a = 2b = 2c = 2d = 0$. Comme $\dim X = 1$, on a $a, b, c, d \in X[2] = H(M)$, contrairement à (4.23). □

Lemme II.F.4.32. *Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\dim X_i = 1$.*

Démonstration. Supposons $\dim X_r > 1$ et, par le lemme 4.24,

$$\operatorname{rang}(U^\varepsilon_r, V^\varepsilon_r, W^\varepsilon_r) \geq 2 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{4.33}$$

Montrons d'abord qu'aucune des sections $U^\pm_i, V^\pm_i, W^\pm_i$, pour $i < r$, n'est nulle. Supposons par l'absurde $U^+_1 = 0$, d'abord pour $r = 3$. Les relations (4.16) donnent

$$\begin{aligned} \lambda U^-_1 U^{-\varepsilon}_2 U^\varepsilon_3 + \mu V^-_1 V^{-\varepsilon}_2 V^\varepsilon_3 + \nu W^-_1 W^{-\varepsilon}_2 W^\varepsilon_3 = 0, \\ \mu V^+_1 V^\varepsilon_2 V^\varepsilon_3 + \nu W^+_1 W^\varepsilon_2 W^\varepsilon_3 = 0 \end{aligned} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Par (4.33), ces deux relations sont proportionnelles pour chaque ε ; l'une est donc identiquement nulle. Comme $V^+_1 = W^+_1 = 0$ est impossible par le lemme 4.31, de même que $U^+_3 = U^-_3 = 0$, etc., ce n'est pas la même relation qui est triviale pour les deux signes. On a donc, par exemple,

$$\begin{cases} U^-_1 U^+_2 = V^-_1 V^+_2 = W^-_1 W^+_2 = 0, \\ V^+_1 V^+_2 = W^+_1 W^+_2 = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad U^+_2 = V^+_2 = W^+_2 = 0.$$

Le lemme 4.31 exclut donc $r = 3$. Pour $r > 3$, la même méthode donne

$$\prod_{i=2}^{r-1} U^{\varepsilon_i}_i = \prod_{i=2}^{r-1} V^{\varepsilon_i}_i = \prod_{i=2}^{r-1} W^{\varepsilon_i}_i = 0 \qquad \text{si } \prod_{i=2}^{r-1} \varepsilon_i = 1.$$

On en déduit que, pour tout $i \in \{2, \dots, r-1\}$, il existe $\varepsilon_i, \varepsilon_i', \varepsilon_i''$ tels que $U_i^{\varepsilon_i} = V_i^{\varepsilon_i'} = W_i^{\varepsilon_i''} = 0$, contrairement au lemme 4.29.

On peut donc supposer tous les $U_i^{\pm}$ non nuls pour $i < r$. Par (4.27), écrivons

$$V_i^{\varepsilon} = A_i^{\varepsilon} U_i^{\varepsilon}, \qquad W_i^{\varepsilon} = B_i^{\varepsilon} U_i^{\varepsilon}, \quad A_i^{\varepsilon}, B_i^{\varepsilon} \in \mathbb{C}^*.$$

Les relations (4.16) donnent

$$\lambda U_r^+ + \mu\Big(\prod_{i<r} A_i^{\varepsilon_i}\Big) V_r^+ + \nu\Big(\prod_{i<r} B_i^{\varepsilon_i}\Big) W_r^+ = 0 \quad \text{si } \prod_{i<r} \varepsilon_i = 1,$$
$$\lambda U_r^- + \mu\Big(\prod_{i<r} A_i^{\varepsilon_i}\Big) V_r^- + \nu\Big(\prod_{i<r} B_i^{\varepsilon_i}\Big) W_r^- = 0 \quad \text{si } \prod_{i<r} \varepsilon_i = -1.$$

Par (4.33), ces relations sont proportionnelles, donc pour $i < j < r$,

$$A_i^+ A_j^+ = A_i^- A_j^-, \qquad A_i^+ A_j^- = A_i^- A_j^+,$$
$$B_i^+ B_j^+ = B_i^- B_j^-, \qquad B_i^+ B_j^- = B_i^- B_j^+.$$

Il existe donc $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ tels que $A_i^- = \varepsilon A_i^+$ et $B_i^- = \varepsilon' B_i^+$ pour tout $i < r$. Sur chaque X_i, en omettant les indices,

$$s_a s_b + t_a t_b = A^+(s s_x + t t_x),$$
$$s_a s_b - t_a t_b = \varepsilon A^+(s s_x - t t_x).$$

Ainsi $s_a s_b$ est proportionnel à $s s_x$ ou à $t t_x$, d'où $a \in H(M)$ ou $b \in H(M)$. Le même raisonnement avec c, d contredit (4.23). □

Lemme II.F.4.34. *Au plus une des sections $U_i^{\varepsilon}, V_i^{\varepsilon}, W_i^{\varepsilon}$, pour $1 \le i \le r$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, est nulle.*

Démonstration. Puisque tous les X_i ont dimension 1, $r \ge 4$ et le lemme 4.29 s'applique. Trois situations pourraient contredire la conclusion :

i) $U_1^+ = V_2^+ = 0$. Les relations (4.16) donnent $\prod_{i=3}^r W_i^{\varepsilon_i} = 0$ pour $\prod_{i=3}^r \varepsilon_i = 1$. Pour chaque $i \ge 3$, il existe donc $\varepsilon_i'' \in \{\pm 1\}$ tel que $W_i^{\varepsilon_i''} = 0$. Reprenons l'argument avec $U_1^+ = W_3^{\varepsilon_3''} = 0$: pour chaque $i \ge 4$, il existe ε_i' tel que $V_i^{\varepsilon_i'} = 0$. Avec $V_2^+ = W_3^{\varepsilon_3''} = 0$, on trouve aussi, pour chaque $i \ge 4$, un signe ε_i tel que $U_i^{\varepsilon_i} = 0$. Deux des trois signes $\varepsilon_4, \varepsilon_4', \varepsilon_4''$ sont égaux, contrairement au lemme 4.29.

ii) $U_1^+ = V_1^+ = 0$. Les relations (4.16) donnent encore $\prod_{i=2}^r W_i^{\varepsilon_i} = 0$ pour $\prod_{i=2}^r \varepsilon_i = 1$. On termine comme ci-dessus.

iii) $U_1^+ = V_1^- = 0$. Alors

$$\lambda U_1^- \prod_{i=2}^r U_i^{\varepsilon_i} + \nu W_1^- \prod_{i=2}^r W_i^{\varepsilon_i} = 0 \quad \text{si } \prod_{i=2}^r \varepsilon_i = -1,$$
$$\mu V_1^+ \prod_{i=2}^r V_i^{\varepsilon_i} + \nu W_1^+ \prod_{i=2}^r W_i^{\varepsilon_i} = 0 \quad \text{si } \prod_{i=2}^r \varepsilon_i = 1.$$

Pour $i \ge 2$, écrivons $W_i^{\varepsilon} = B_i^{\varepsilon} U_i^{\varepsilon} = C_i^{\varepsilon} V_i^{\varepsilon}$, avec $B_i^{\varepsilon}, C_i^{\varepsilon} \in \mathbb{C}^*$. Puisque $r \ge 4$, on en déduit, pour $2 \le i < j \le r$,

$$B_i^+ B_j^+ = B_i^- B_j^-, \qquad C_i^+ C_j^+ = C_i^- C_j^-.$$

Il existe donc $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ tels que, pour tout $i \ge 2$, $B_i^- = \varepsilon B_i^+$ et $C_i^- = \varepsilon' C_i^+$. Comme à la fin de 4.32, cela implique

$$[c_i \in H(M_i) \text{ ou } d_i \in H(M_i)]$$

et

$$[a_i - c_i = d_i - b_i \in H(M_i)] \quad \text{ou} \quad [a_i - d_i = c_i - b_i \in H(M_i)],$$

contrairement à (4.23). □

Nous pouvons enfin terminer la démonstration. Écrivons, pour $1 \leq i \leq r$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,

$$V_i^\varepsilon = A_i^\varepsilon U_i^\varepsilon, \qquad W_i^\varepsilon = B_i^\varepsilon U_i^\varepsilon.$$

On a les deux propriétés suivantes :

1. Les $A_i^\varepsilon, B_i^\varepsilon$ sont des nombres complexes, tous non nuls sauf au plus un (lemme 4.34), et $r \geq 4$.
2. Si $r = 4$, (4.11) donne deux indices i tels que $a_i = 0$, donc $A_i^+ = A_i^- = 1$ pour ces deux indices.

Les relations (4.16) deviennent

$$\lambda + \mu \prod_{i=1}^r A_i^{\varepsilon_i} + \nu \prod_{i=1}^r B_i^{\varepsilon_i} = 0, \qquad \prod_{i=1}^r \varepsilon_i = 1. \tag{4.35}$$

Montrons que toute solution satisfaisant aussi 1) et 2) vérifie

$$\exists i \in \{1, \dots, r\}, \qquad A_i^- = \pm A_i^+, \quad B_i^- = \pm B_i^+. \tag{4.36}$$

Ceci contredit (4.23), comme plus haut, et achève la démonstration du théorème. On se ramène aisément au cas où

$$A = \prod_{i=1}^r A_i^-, \qquad B = \prod_{i=1}^r B_i^-$$

sont non nuls. Posons

$$\lambda' = \frac{\lambda}{AB}, \quad \mu' = \frac{\mu}{B}, \quad \nu' = \frac{\nu}{A}, \qquad \mu_i = \frac{A_i^+}{A_i^-}, \quad \nu_i = \frac{B_i^+}{B_i^-}.$$

Pour $r > 5$, on se ramène immédiatement à $r = 5$ en prenant $\varepsilon_6 = \cdots = \varepsilon_r = 1$ dans (4.35). Le système s'écrit

$$r = 4 : \begin{cases} \lambda' + \mu' + \nu' = 0, \\ \lambda' + \mu' \mu_i \mu_j + \nu' \nu_i \nu_j = 0 & (1 \leq i < j \leq 4), \\ \lambda' + \mu' \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 1; \end{cases}$$

$$r = 5 : \begin{cases} \lambda' + \mu' \mu_i + \nu' \nu_i = 0 & (1 \leq i \leq 5), \\ \lambda' + \mu' \mu_i \mu_j \mu_k + \nu' \nu_i \nu_j \nu_k = 0 & (1 \leq i < j < k \leq 5), \\ \lambda' + \mu' \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 + \nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 = 0. \end{cases}$$

Dans les deux cas, au plus un des μ_i, ν_i est nul.

Pour $r = 4$, on a

$$\begin{aligned} \lambda' + \mu' + \nu' = \lambda' + \mu' + \nu' \nu_1 \nu_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \nu_1 \nu_2 = 1, \\ \lambda' + \mu' \mu_3 + \nu' \nu_1 \nu_3 = \lambda' + \mu' \mu_3 + \nu' \nu_2 \nu_3 = 0 \quad &\Longrightarrow \nu_1 \nu_3 = \nu_2 \nu_3. \end{aligned}$$

De même, $\nu_1 \nu_4 = \nu_2 \nu_4$. Comme ν_3, ν_4 ne sont pas tous deux nuls, $\nu_1 = \nu_2 = \pm 1$, d'où (4.36).

Supposons maintenant $r = 5$.

1) L'un des μ_i, ν_i est nul. Les autres sont non nuls. Si, par exemple, $\mu_1 = 0$, alors $1 = \nu_j\nu_k = \nu_2\nu_3$ pour $k > j \geq 2$. Ainsi $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_5 = \varepsilon \in \{\pm 1\}$. On a

$$\mu_i = \mu_i\mu_j\mu_k = \mu_2\mu_3\mu_4 \quad (k > j > i \geq 2),$$

d'où $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, ce qui prouve (4.36).

2) Aucun des μ_i, ν_i n'est nul. Si $\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 \neq 0$, le système

$$\begin{cases} \lambda' + \mu'\mu_1 x + \nu'\nu_1 y = 0, \\ \lambda' + \mu'\mu_2 x + \nu'\nu_2 y = 0 \end{cases}$$

a une unique solution, $x = y = 1$. On en déduit

$$\mu_i\mu_j = \nu_i\nu_j = 1 \qquad (j > i \geq 3),$$

ce qui entraîne (4.36). On peut donc supposer

$$\frac{\mu_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{\mu_5}{\nu_5} = k.$$

On a alors

$$\begin{cases} \lambda' + \nu_1(k\mu' + \nu') = 0, \\ \lambda' + \nu_1^3(k^3\mu' + \nu') = 0, \\ \lambda' + \nu_1^5(k^5\mu' + \nu') = 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$(k\mu' + \nu')(k^5\mu' + \nu') = (k^3\mu' + \nu')^2 \implies k(k^2-1)^2 = 0 \implies k = \pm 1, \quad \nu_1 = \pm 1.$$

Ceci prouve (4.36) et termine la démonstration du théorème. □

II.F.5 La conjecture de la trisécante pour les éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$, $g \geq 5$

Les éléments de $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$ sont définis en A2.4. L'étude géométrique des singularités de leur diviseur thêta est l'objet de II.E.3. Les notations suivantes sont celles de A2; elles diffèrent légèrement de celles de II.E.3.

Soient H une courbe hyperelliptique lisse de genre $g-1$, Q_0, Q_1 deux points de Weierstrass, $\varepsilon \in JH[2]$ l'élément associé à $O_H(Q_0 - Q_1)$ et $h\colon (X_2, M_2) \to (JH, \Theta)$ l'isogénie de degré 2 associée à ε. Prenons aussi $(X_1, M_1) \in \mathcal{A}_{1,(2)}$. Choisissons des générateurs α_1, β_1 de $H(M_1)$ et α_2, β_2 de $H(M_2)$ avec $h(\alpha_2) = 0$. Le quotient (P, Ξ) de $X_1 \times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) est principalement polarisé et appartient à $\mathcal{H}^2_{1,g-1}$.

Rappelons que les variétés abéliennes principalement polarisées ainsi obtenues sont irréductibles (A2.4.5) et sont des variétés de Prym (II.E.1.1 ou A2.4.2).

Théorème II.F.5.1. *Soit $(P, \Xi) \in \mathcal{H}^2_{1,g-1}$ de dimension $g \geq 5$. Si $g = 5$, supposons en outre que la conjecture de la trisécante est vraie en dimension 4. Alors la variété de Kummer de (P, Ξ) n'a pas de trisécante.*

Démonstration. Partons comme d'habitude d'une inclusion non triviale $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi_c \cup \Xi_d$. On en déduit

$$\dim(\Xi_a \cap \operatorname{Sing} \Xi) \geq g - 4.$$

On a montré en II.E.3.2 que $\operatorname{Sing}\Xi$ a deux composantes de dimension $\geq g-4$, dont nous allons donner une autre description.

Outre les notations de II.E.3, utilisons celles de A2.2.1. En particulier, si $\pi\colon X_1\times X_2\to P$ est l'isogénie, il existe des bases respectives $\{s^1,t^1\}$ et $\{s^2,t^2\}$ de $H^0(X_1,M_1)$ et $H^0(X_2,M_2)$ telles que $s^1s^2+t^1t^2$ soit une équation de $\widetilde{\Xi}=\pi^*\Xi$, et s^2 une équation de $h^*\Theta$.

Les deux composantes en question sont

$$\begin{aligned} W_2&=\pi(X_1\times Z_2),\quad Z_2=h^{-1}(g^1_2+Q_0+W^{g-5}),\\ W_1&=\pi(\{y_1\}\times S_2),\quad S_2=h^{-1}(g^1_2+W^{g-4}),\quad t^1(y_1)=0.\end{aligned}$$

Sur Z_2, on a $s^2=\partial s^2/\partial x_j^2=t^2=\partial t^2/\partial x_j^2=0$; sur S_2, $s^2=\partial s^2/\partial x_j^2=t^2=0$. Il est facile de vérifier que W_1,W_2 correspondent bien à des singularités de Ξ.

Revenons à notre trisécante.

Lemme II.F.5.2. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes,*

$$\dim(\Xi_a\cap\operatorname{Sing}\Xi)\geq g-4\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{aligned}&\exists a_1\in X_1,\ a_2\in X_2,\ x,y\in H,\\ &a=\pi(a_1,a_2),\qquad h(a_2)=O_H(x-y).\end{aligned}$$

Démonstration. Écrivons $a=\pi(a_1,a_2)$. Si $X_1\times Z_2\subset\widetilde{\Xi}_{(a_1,a_2)}$, on a

$$\begin{aligned}&\forall x\in X_1,\ z\in Z_2,\quad s^1(x-a_1)s^2(z-a_2)+t^1(x-a_1)t^2(z-a_2)=0\\ \Longleftrightarrow\quad&\forall z\in Z_2,\quad s^2(z-a_2)=t^2(z-a_2)=0\\ \Longleftrightarrow\quad&g^1_2+Q_0+W^{g-5}-h(a_2)\subset(Q_0+W^{g-3})\cup(Q_1+W^{g-3}).\end{aligned}$$

Ainsi $h(a_2)$ ou $h(a_2)+\varepsilon$ appartient à $H-H$. Ceci prouve le lemme, quitte à ajouter à (a_1,a_2) l'élément $(\beta_1,\beta_2)\in\ker\pi$.

Si $\{y_1\}\times S_2\subset\widetilde{\Xi}_{(a_1,a_2)}$, la stabilité de S_2 par translation par α_2 donne

$$\{y_1\}\times S_2\subset\widetilde{\Xi}_{(a_1,a_2)}\cdot\widetilde{\Xi}_{(a_1,a_2+\alpha_2)}.$$

Donc, pour tout $w\in S_2$,

$$s^1(y_1-a_1)s^2(w-a_2)=t^1(y_1-a_1)t^2(w-a_2)=0.$$

En projetant sur JH, on obtient

$$g^1_2+W^{g-4}-h(a_2)\subset W^{g-2}\cup W^{g-2}_\varepsilon,$$

ce qui prouve encore le lemme, comme ci-dessus. □

Lemme II.F.5.3. *Aucun des quatre éléments a,b,c,d de P n'appartient à $\pi(X_1)$.*

Démonstration. Supposons par exemple $a=\pi(a_1,0)$. Par II.C.1.4,

$$\Xi\cdot\Xi_a=\pi(X_1\times T_2)\cup\pi(\{e\}\times D_2),$$

avec

$$\begin{aligned}T_2&=h^{-1}(Q_0+W^{g-3}),\\ e&\in\operatorname{div}(s^1t^1_{a_1}-s^1_{a_1}t^1),\\ D_2&=\operatorname{div}(s^1(e)s^2+t^1(e)t^2)\in|M_2|.\end{aligned}$$

Si D_2 est réductible, il ressort de A1 qu'une des variétés abéliennes

$$X_2^\alpha = X_2/\{0,\alpha_2\} = JH, \quad X_2^\beta = X_2/\{0,\beta_2\}, \quad X_2^{\alpha+\beta} = X_2/\{0,\alpha_2+\beta_2\}$$

est réductible, contrairement à A2.4.2. On a donc, par exemple, $\{e\} \times D_2 \subset \widetilde{\Xi}_{(c_1,c_2)}$. Comme en II.C.2.5, cela permet de supposer $c_2 = 0$. Mais alors $\Xi \cdot \Xi_a \subset \Xi \cdot \Xi_c$, contradiction. □

Il découle de II.A.1.3 que chacun des éléments $a, b, c, d, a-c, a-d, b-c, b-d$ de P satisfait aux hypothèses du lemme 5.2.

Lemme II.F.5.4. *On peut écrire $a = \pi(a_1,a_2)$, $b = \pi(b_1,b_2)$, $c = \pi(c_1,c_2)$, $d = \pi(d_1,d_2)$ avec*

$$h(a_2) = O_H(x-y), \quad h(b_2) = O_H(z-t),$$
$$h(c_2) = O_H(x-t), \quad h(d_2) = O_H(z-y),$$

où x, y, z, t sont des points de H distincts deux à deux.

Démonstration. Par 5.2, écrivons $a = \pi(a_1,a_2)$, $c = \pi(c_1,c_2)$, $a-c = \pi(m_1,m_2)$, avec

$$h(a_2) = O_H(x-y), \quad h(c_2) = O_H(z-t), \quad h(m_2) = O_H(u-v).$$

Les points x, y (respectivement z, t et u, v) sont distincts par 5.3. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer qu'on ne peut avoir simultanément

$$x \notin \{z, \tau t, u, \tau v\}, \qquad y \notin \{\tau z, t, \tau u, v\},$$
$$z \notin \{\tau u, v\}, \qquad t \notin \{u, \tau v\}.$$

Raisonnons par l'absurde. On est dans l'un des cas

$$1) \quad x - y - (z-t) \equiv u - v,$$
$$2) \quad x - y - (z-t) \equiv u - v + Q_0 - Q_1.$$

Les points Q_0, Q_1 sont des points de Weierstrass de H. Dans le cas 1), puisque $x \notin \{y,z,u\}$, $|x+t+v|$ est un g^1_3. Mais $x \notin \{\tau t, \tau v\}$ et $t \neq \tau v$, contradiction.

Dans le cas 2), puisque $x \notin \{y,z,u\}$, $|x+t+Q_1+v|$ est un g^1_4. On en déduit $Q_1 \in \{x,t,v\}$ et $\#(\{x,t,v\} \cap \{u,y,z\}) = 2$, contradiction. □

Pour aller plus loin, utilisons les résultats de la démonstration (4.6) du théorème 4.1. L'hypothèse (4.23) est satisfaite ici. En effet, par le lemme 5.3, il suffit de vérifier qu'on ne peut avoir $a, c \in \pi(X_2)$. Si c'était le cas, on aurait, comme en (4.19), $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$, et (4.21) serait valide avec $r = 2$. Les deux variétés abéliennes principalement polarisées

$$X_2^\beta = X_2/\{0,\beta_2\}, \qquad X_2^{\alpha+\beta} = X_2/\{0,\alpha_2+\beta_2\},$$

éléments de $\mathcal{H}^2_{g-1}$ par construction et irréductibles par A2.4.2, admettraient chacune une trisécante. Ceci contredirait 3.1 si $g-1 \geq 5$ et, par II.E.4.3, la conjecture de la trisécante en dimension 4 si $g-1 = 4$.

(5.5) Nous sommes donc dans le deuxième cas (4.23) de la démonstration de 4.1.

Avec les notations de cette démonstration, en particulier (4.17), il découle de 5.3 qu'aucune des sections $U_2^\pm, V_2^\pm, W_2^\pm, \overline{U}_2^\pm, \overline{V}_2^\pm, \overline{W}_2^\pm$ de $H^0(X_2, M_2 \otimes M_{2,x_2})$ n'est nulle.

Par 5.4, on a aussi $\Theta \cdot \Theta_{h(a_2)} \subset \Theta_{h(c_2)} \cup \Theta_{h(d_2)}$ dans JH, soit, par II.A.1, une relation

$$\theta\theta_{h(a_2+b_2)} + \gamma\theta_{h(a_2)}\theta_{h(b_2)} + \delta\theta_{h(c_2)}\theta_{h(d_2)} = 0,$$

avec $\gamma, \delta \in \mathbb{C}^*$, pour tout $\theta \in H^0(JH, O(\Theta)) \setminus \{0\}$. Comme $h^*\theta$ est proportionnelle à s^2,

$$s^2 s^2_{x_2} + \gamma s^2_{a_2} s^2_{b_2} + \delta s^2_{c_2} s^2_{d_2} = 0.$$

En faisant agir $\tilde{\beta}_2 \in \mathcal{G}(M_2)$ comme en (4.14), on obtient

$$\begin{cases} U_2^+ + \gamma V_2^+ + \delta W_2^+ = 0, \\ U_2^- + \gamma V_2^- + \delta W_2^- = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Distinguons deux cas.

i) $\operatorname{rang}(U_2^+, V_2^+, W_2^+) = \operatorname{rang}(U_2^-, V_2^-, W_2^-) = 2$. Les relations (4.16) et (5.6) donnent

$$V_1^\pm = \gamma U_1^\pm, \qquad W_1^\pm = \delta U_1^\pm,$$

d'où

$$s^1_{a_1} s^1_{b_1} = \gamma s^1 s^1_{x_1}, \qquad s^1_{c_1} s^1_{d_1} = \delta s^1 s^1_{x_1}.$$

Ceci impose à la fois $\{a_1, b_1\} \cap H(M_1) \neq \emptyset$ et $\{c_1, d_1\} \cap H(M_1) \neq \emptyset$, contrairement à (5.5).

ii) *Par le lemme 4.24, il reste à étudier le cas*

$$\operatorname{rang}(U_2^+, V_2^+, W_2^+) = 1, \qquad \operatorname{rang}(\overline{U}_2^+, \overline{V}_2^+, \overline{W}_2^+) = 2.$$

Soit $\theta \in H^0(JH, O(\Theta)) \setminus \{0\}$. Par hypothèse, les quatre sections

$$\theta\theta_{x+z-y-t}, \quad \theta_\varepsilon\theta_{x+z-y-t+\varepsilon}, \quad \theta_{x-y}\theta_{z-t}, \quad \theta_{x-y+\varepsilon}\theta_{z-t+\varepsilon}$$

de $H^0(JH, O(\Theta + \Theta_{x+z-y-t}))$ sont linéairement dépendantes, avec $\varepsilon = O_H(Q_0 - Q_1) \in JH[2]$. Comme $\theta, \theta_\varepsilon, \theta_{x-y}$ s'annulent sur $\operatorname{Sing}\Theta = g^1_2 + W^{g-4}$, on a par exemple

$$g^1_2 + W^{g-4} - x + y + Q_0 - Q_1 \subset W^{g-2},$$

d'où $\{Q_0, Q_1\} \cap \{x, y\} \neq \emptyset$.

Supposons par exemple $x = Q_0$. Alors

$$\begin{aligned} h(a_2 + \beta_2) &= O_H(x - y + Q_0 - Q_1) = O_H(Q_1 - y), \\ h(c_2 + \beta_2) &= O_H(Q_1 - t), \\ h(d_2) &= O_H(z - y). \end{aligned}$$

Par II.A.1, il existe donc une relation

$$s^2 t^2_{x_2} + \gamma' s^2_{b_2} t^2_{a_2} + \delta' s^2_{d_2} t^2_{c_2} = 0,$$

qui donne

$$\overline{U}_2^\pm + \gamma' \overline{V}_2^\pm + \delta' \overline{W}_2^\pm = 0.$$

Cette relation est analogue à (5.6). Comme dans le cas i), on en déduit une contradiction avec (5.5). □

CHAPITRE III

Annulation de thétaconstantes sur les variétés abéliennes de dimension 4

On rappelle ([Be 1]) qu'en dimension 4, le diviseur N_0^4 de $\mathcal{A}_4$ formé des variétés abéliennes principalement polarisées dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes irréductibles : $\overline{\mathcal{J}}_4$, adhérence du lieu des jacobiennes, et θ_{null}, lieu des variétés abéliennes (A, Θ), avec Θ symétrique, telles que $\operatorname{Sing}\Theta$ contienne un point d'ordre 2. Cette propriété est indépendante du choix du diviseur Θ symétrique. Elle équivaut à l'annulation, au point $\tau \in \mathfrak{H}_4$ correspondant à A, d'une des fonctions $\theta[\,{}^{a}_{b}\,](0, 2\tau)$, où $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^4/\mathbb{Z}^4$ et $2\,{}^t a \cdot b \in \mathbb{Z}$. C'est pourquoi l'on dit aussi qu'une thétaconstante est nulle sur A.

Nous allons étudier ici la structure des sous-ensembles $\theta_{\text{null}}^{(p)}$ de $\mathcal{A}_4$ formés des variétés abéliennes pour lesquelles au moins p thétaconstantes s'annulent.

Notre résultat principal est qu'il n'y a qu'une seule variété abélienne irréductible de dimension 4 pour laquelle dix thétaconstantes s'annulent et qui ne soit pas une jacobienne hyperelliptique. Celle-ci a déjà été étudiée en détail par Varley ([Va]).

Plus précisément, avec les notations

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4^{\text{irr}} &= \{\text{éléments irréductibles de } \mathcal{A}_4\},\\
\theta_{\text{null}}^{(p),\text{irr}} &= \theta_{\text{null}}^{(p)} \cap \mathcal{A}_4^{\text{irr}},\\
\mathcal{H}_4 &= \{\text{jacobiennes hyperelliptiques de dimension 4}\},\\
\mathcal{A}_{r,s} &= \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_r,\ A_2 \in \mathcal{A}_s\},
\end{aligned}$$

on a :

Théorème III.1.

i) $\theta_{\text{null}}^{(2)}$ *est irréductible de dimension 8.*

ii) $\theta_{\text{null}}^{(3)}$ *a trois composantes irréductibles, dont* $\overline{\mathcal{H}}_4$ *et* $\mathcal{A}_{1,3}$*, chacune de dimension 7.*

iii) $\theta_{\text{null}}^{(9),\text{irr}} \setminus \mathcal{H}_4$ *est irréductible de dimension 1. Ses éléments sont dans* $\mathcal{A}_{1,1,1,1}^2$*, quotients d'un produit* E^4*, où* E *est une courbe elliptique.*

iv) $\theta_{\text{null}}^{(10),\text{irr}} \setminus \mathcal{H}_4$ *a un seul élément, correspondant au cas où* E *a multiplication complexe par* i*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_4(4,8)$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées avec une structure de niveau convenable (cf. [Ig 2] ou [V] pour plus de précisions). On utilisera uniquement le fait que les fonctions $\theta[\,{}^{a}_{b}\,](0, 2\tau)$ (cf. I.3.14), pour $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^4/\mathbb{Z}^4$ et $2\,{}^t a \cdot b \in \mathbb{Z}$, définissent des diviseurs de Cartier amples sur $\mathcal{A}_4(4,8)$. On note p la projection $\mathcal{A}_4(4,8) \to \mathcal{A}_4$ et, pour deux de ces diviseurs D et D', q la restriction de p à $D \cap D'$. On remarque que $\theta_{\text{null}}^{(2)}$ est de dimension pure 8 (puisque θ_{null} est irréductible de dimension 9) et qu'il contient $\overline{\mathcal{E}}_4^2$ (cf. II.E.4.1 ; l'adhérence est ici dans $\mathcal{A}_4$), qui, étant de dimension 8, en est une composante. Nous allons montrer que c'est la seule. Raisonnant par l'absurde, on écrit

donc

$$D \cap D' = M + M',$$

où M et M' sont des diviseurs de Weil sur D, réduits, sans composante commune, avec $M = q^{-1}(\overline{\mathcal{E}_4^2})$.

On notera aussi $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ la compactification de Satake, et toutes les adhérences seront prises dans cette compactification.

On veut tout d'abord montrer que $M \cap M'$, contenu dans le lieu singulier de $D \cap D'$, est de dimension 7. Pour cela, on regarde la trace sur $\mathcal{J}_4'(4,8) = p^{-1}(\mathcal{J}_4')$, où $\mathcal{J}_4'$ dénote l'adhérence de $\mathcal{J}_4$ dans $\mathcal{A}_4$. On a

$$D \cap D' \cap \mathcal{J}_4'(4,8) \subset q^{-1}(\mathcal{J}_4' \cap \theta_{\text{null}}^{(2)}) = q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}),$$

où $\mathcal{H}_4'$ est l'adhérence dans $\mathcal{A}_4$ de la famille $\mathcal{H}_4$ des jacobiennes hyperelliptiques de dimension 4. On a aussi $\mathcal{H}_4 \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}$ par II.E.1.1, et $\mathcal{A}_{1,3} \subset \overline{\mathcal{E}_4^2}$. Il suffit en effet de considérer les revêtements étales

$$\pi : \widetilde{C} = \widetilde{C}_0 \cup F_1 \cup F_2 \longrightarrow C = C_0 \cup F,$$

où $\pi_0 : \widetilde{C}_0 \to C_0$ est dans $\mathcal{S}_{4,0}$, F_1, F_2, F sont des courbes elliptiques isomorphes coupant transversalement en un point $\widetilde{C}_0, \widetilde{C}_0, C_0$ respectivement, et C_0 est une courbe superelliptique de genre 4, pour en déduire que $\overline{\mathcal{E}_4^2}$ contient $\mathcal{E}_3^2 \times \mathcal{A}_1$. Il ressort alors de la démonstration de II.D.1.4.2 que $\mathcal{E}_3^2$ est de dimension 6, donc dense dans $\mathcal{A}_3$. On en déduit

$$M \supset q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}).$$

La variété M contient donc toutes les composantes de l'intersection $D \cap D' \cap \mathcal{J}_4'(4,8)$.

Maintenant, $\overline{\mathcal{J}_4'(4,8)}$ est un diviseur de Cartier irréductible ample sur $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ (cf. par exemple [Ig 3]). Il rencontre donc $\overline{M'}$ et $\dim(\overline{M'} \cap \overline{\mathcal{J}_4'(4,8)}) \geq 7$. Comme le complémentaire de $\mathcal{A}_4(4,8)$ dans $\overline{\mathcal{A}_4(4,8)}$ est de dimension 6, $M' \cap \mathcal{J}_4'(4,8)$ est non vide et de dimension au moins 7. Or

$$\begin{aligned} M' \cap \mathcal{J}_4'(4,8) \subset D \cap D' \cap \mathcal{J}_4'(4,8) &= M \cap \mathcal{J}_4'(4,8) \\ &= q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3}). \end{aligned}$$

Il existe donc une composante Z de $q^{-1}(\mathcal{H}_4') \cup q^{-1}(\mathcal{A}_{1,3})$ contenue à la fois dans M et dans M', donc dans le lieu singulier de $D \cap D'$. Or le critère jacobien montre que si (A, Θ) correspond à un point singulier de $D \cap D'$, alors $\operatorname{Sing}\Theta$ contient au moins deux points d'ordre 2 et, soit les cônes tangents en deux de ces points sont égaux, soit la multiplicité de l'un d'eux est au moins 4.

Comme $q(Z)$ est soit $\mathcal{H}_4'$, soit $\mathcal{A}_{1,3}$, il suffit de vérifier qu'aucune de ces deux conditions n'est satisfaite en un point générique de chacune de ces familles pour aboutir à une contradiction.

Sur une jacobienne hyperelliptique, les dix points d'ordre 2 de $\operatorname{Sing}\Theta$ correspondent aux systèmes linéaires $g_2^1 + w_j$, $1 \leq j \leq 10$, où les w_j sont les points de Weierstrass. Ils sont de multiplicité 2 et les cônes tangents à Θ en ces points sont d'équation

$$(s_0^2 u_j)(s_1^2 u_j) - (s_0 s_1 u_j)^2 = 0,$$

où s_0, s_1, u_j sont des sections de g_2^1 telles que $\{s_0, s_1\}$ engendre $H^0(g_2^1)$ et $\operatorname{div}(u_j) = 2w_j$ (cf. I.2.4). Ces dix quadriques sont distinctes deux à deux.

Sur un produit $E \times JC$, où C est une courbe lisse non hyperelliptique de genre 3, les 28 thétaconstantes nulles correspondent aux points d'ordre 2 du diviseur Θ de JC. Les cônes tangents sont réductibles, réunion de $T_x JC$ et de $E \times T_x\Theta$. Les 28 hyperplans $T_x\Theta$ correspondent aux 28 bitangentes à la courbe canonique de C, et sont donc distincts deux à deux.

On a donc montré par l'absurde que $D \cap D' = q^{-1}(\overline{\mathcal{E}}_4^2)$, donc que

$$\theta_{\text{null}}^{(2)} = \overline{\mathcal{E}}_4^2,$$

ce qui prouve (i).

Pour montrer les autres points, on utilise la description II.E.1.1 de $\overline{\mathcal{E}}_4^2$ (adhérence dans $\mathcal{A}_4$). Avec les notations de cette partie, on a

$$\overline{\mathcal{E}}_4^2 \setminus (\mathcal{A}_{1,3} \cup \mathcal{A}_{2,2}) = \mathcal{E}_4^2 \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}_{1,3}^2 \cup \mathcal{H}_{2,2}^2 \cup \mathcal{H}_{1,1,2}^2 \cup \mathcal{H}_{1,1,1,1}^2.$$

En vertu de (i), $\theta_{\text{null}}^{(3)}$ est de dimension pure 7. Un élément générique est donc dans $\mathcal{A}_{1,3}$, $\mathcal{E}_4^2$, $\mathcal{H}_4$ ou $\mathcal{H}_4^2$. Cette dernière famille est exclue par II.E.4.2. Par II.E.4.1, un élément de $\mathcal{E}_4^2 = \Pr(\mathcal{S}_{5,0})$ a trois thétaconstantes nulles si, pour l'élément de $\mathcal{S}_{5,0}$ correspondant, Δ est somme de deux éléments de $|\delta|$. La famille correspondante est déterminée par le choix d'une courbe elliptique E, de $\delta \in \mathrm{Pic}^4 E$, de $\delta' \in (\mathrm{Pic}^0 E)[2] \setminus \{0\}$ et de $P_1+P_2+P_3+P_4$, $P_5+P_6+P_7+P_8 \in |\delta|$; elle est donc irréductible, ce qui prouve (ii). Pour prouver (iii) et (iv), on va examiner les nombres possibles de thétaconstantes nulles pour les éléments des familles ci-dessus. On commence par en réduire la liste. On rappelle que $\mathcal{E}_{2,(2)}$ est la famille des variétés de Prym, au sens de [Mu 2], associées aux structures superelliptiques sur des courbes lisses de genre 3. C'est un sous-ensemble irréductible de $\mathcal{A}_{2,(2)}$.

Lemme III.2. *On a* $\mathcal{A}_{2,(2)}^{\text{irr}} = \mathcal{E}_{2,(2)}$.

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{A}_{2,(2)}^{\text{irr}}$ et E une courbe elliptique quelconque. L'élément de $\mathcal{A}_{1,2}^2$ construit à l'aide de E et P est irréductible par A2.2.3. C'est donc la jacobienne d'une courbe lisse C de genre 3 qui admet une structure superelliptique $C \to E$ (cf. par exemple II.C.1.2), dont la variété de Prym associée est P. □

La courbe E de la démonstration ci-dessus est quelconque. Pour $P', P'' \in \mathcal{A}_{2,(2)}^{\text{irr}}$ quelconques, on peut trouver deux morphismes $C' \to E$, $C'' \to E$, avec la même courbe E, de variétés de Prym respectives P' et P''. On en déduit (II.D.1.5)

$$\mathcal{A}_{2,2}^{2,\text{irr}} = \mathcal{E}_{2,2}^2$$

et

$$(\overline{\mathcal{E}}_4^2 \setminus \mathcal{H}_4) \cap \mathcal{A}_4^{\text{irr}} = \mathcal{E}_4^2 \cup \mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}_{1,3}^2 \cup \mathcal{E}_{2,2}^2.$$

On examine tour à tour ces familles dans une série de lemmes.

Lemme III.3. *Les éléments de* $\mathcal{E}_4^2$ *ne peuvent avoir plus de huit thétaconstantes nulles.*

Démonstration. On a vu (II.E.4.1) que le nombre de thétaconstantes nulles est deux plus le nombre de décompositions de Δ en somme de deux éléments de $|\delta|$.

On suppose que $\delta \equiv P_1+P_2+P_3+P_4 \equiv P_5+P_6+P_7+P_8$. Pour chaque autre décomposition $\Delta = \Delta_1+\Delta_2$, on peut supposer que $\#(\mathrm{Supp}\,\Delta_1 \cap \{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = 2$. Lorsque cette intersection

est fixée, Δ_1 ne peut prendre que deux valeurs distinctes. Enfin, changer Δ_1 en $\Delta - \Delta_1$ donne la même décomposition. On obtient donc au maximum $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$ autres décompositions. Si cette borne est atteinte, on est, quitte à réordonner les P_i, dans la situation suivante :

$$\begin{aligned} \forall\, 1 \leq i < j \leq 4, \quad P_i + P_j &\equiv P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - P_i - P_j \\ \equiv P_{4+i} + P_{4+j} &\equiv P_5 + P_6 + P_7 + P_8 - P_{4+i} - P_{4+j}, \\ \Longrightarrow \quad 2P_i + 2P_j &\equiv 2P_{4+i} + 2P_{4+j} \equiv \delta, \\ \Longrightarrow \quad P_j = P_1 + \varepsilon_j, &\qquad P_{4+j} = P_5 + \varepsilon'_j, \end{aligned}$$

avec $E[2] = \{\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\} = \{\varepsilon'_1 = 0, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4\}$. Si on revient à la première équivalence, on obtient

$$\begin{aligned} i = 1 &\implies 2P_1 + \varepsilon_j \equiv 2P_5 + \varepsilon'_j, \\ 1 < i < j &\implies 2P_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j \equiv 2P_5 + \varepsilon'_i + \varepsilon'_j. \end{aligned}$$

On a donc $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$, puis $2P_1 \equiv 2P_5$. Le point P_5 est alors égal à l'un des points P_1, P_2, P_3, P_4, contradiction. On a donc au plus $2 + 1 + 5 = 8$ thétaconstantes nulles.

En prenant

$$P_i = P_1 + \varepsilon_i, \qquad P_{4+i} = P_5 + \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq 4), \qquad E[2] = \{\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\},$$

avec les deux translatés de $E[2]$ disjoints et $\delta \equiv 2P_1 + 2P_5$, on obtient une variété abélienne avec huit thétaconstantes nulles. C'est essentiellement la seule façon de les obtenir. □

Lemme III.4. *Les éléments de $\mathcal{H}_4^2 \cup \mathcal{H}_{1,3}^2$ ne peuvent avoir plus de huit thétaconstantes nulles.*

Démonstration. Les variétés abéliennes concernées sont les variétés de Prym de certains revêtements d'une courbe C obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique H de genre 3 et d'involution hyperelliptique τ, en identifiant Q_0 à Q_1 et τQ_0 à τQ_1 (II.E.1).

Le nombre de thétaconstantes nulles est deux plus le nombre de décompositions (II.E.4.2)

$$Q_0 + Q_1 + x + y \equiv w_i + w_j + w_k + w_\ell,$$

où w_i, w_j, w_k, w_ℓ sont des points de Weierstrass distincts sur H. On suppose qu'on a une telle décomposition pour $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ et on cherche les autres ensembles d'indices possibles.

1. Si $\{1, 2, 3, 5\}$ convient, alors $x = w_5$, et $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ et $\{2, 3, 4, 5\}$ conviennent. Si un autre ensemble d'indices convient, on peut supposer, quitte à prendre son complémentaire, qu'il rencontre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en trois points. On en déduit que y est un autre w_i, par exemple w_6. Mais alors

   $$Q_0 + Q_1 \equiv w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - w_5 - w_6 \equiv w_7 + w_8,$$

   ce qui est impossible. On a donc au plus cinq décompositions dans ce cas, soit sept thétaconstantes nulles.

2. On suppose maintenant que deux ensembles d'indices qui conviennent se rencontrent en deux points. Comme pour les éléments de $\mathcal{S}_{5,0}$, on obtient sept décompositions possibles. Si toutes les sept conviennent, on a

   $$O(Q_0 + Q_1) \in T = \Theta \cap \Theta_\varepsilon \cap \Theta_{\varepsilon'} \cap \Theta_{\varepsilon''} \cap \Theta_{\varepsilon+\varepsilon'} \cap \Theta_{\varepsilon+\varepsilon''} \cap \Theta_{\varepsilon'+\varepsilon''} \cap \Theta_{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''},$$

avec $\varepsilon = w_1 + w_2 - w_3 - w_4$, $\varepsilon' = w_1 + w_2 - w_5 - w_6$ et $\varepsilon'' = w_1 + w_3 - w_5 - w_7$. L'ensemble T contient alors les huit points distincts

$$Q_0 + Q_1 + \{0, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon + \varepsilon', \varepsilon + \varepsilon'', \varepsilon' + \varepsilon'', \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''\}.$$

Comme $\Theta^3 = 6$, l'intersection de trois quelconques de ces translatés de Θ est de dimension 1, donc l'intersection de deux est réductible. Ceci n'est possible que s'il existe un morphisme de degré 2, $p\colon H \to E$, sur une courbe elliptique (utiliser II.B.1). On a alors

$$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon + \varepsilon', \varepsilon + \varepsilon'', \varepsilon' + \varepsilon'', \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \in p^*E[2],$$

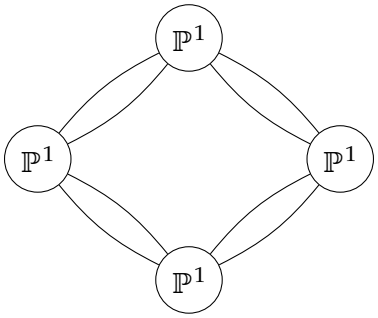
ce qui est absurde. On a donc au plus $2 + 6 = 8$ thétaconstantes nulles.

□

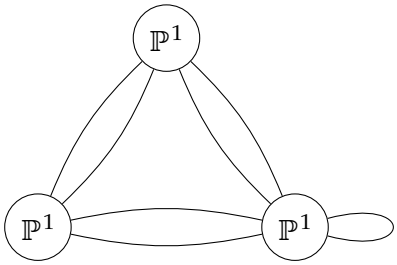
Avant le lemme suivant, introduisons un sous-ensemble $\mathcal{B}^2_{g_1,\dots,g_4}$ de $\mathcal{A}_{g_1+\cdots+g_4}$ construit de façon analogue à $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_4}$. Soient, comme en A2.2.1, $(X_i, M_i) \in \mathcal{A}_{g_i,(2)}$ pour $i = 1, \dots, 4$, et α_i, β_i des générateurs de $H(M_i)$. Le quotient de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0), \quad (0, 0, \alpha_3, \alpha_4), \quad (\alpha_1, 0, \beta_3, \beta_4), \quad (\beta_1, \beta_2, \alpha_3, 0)$$

est une variété abélienne principalement polarisée ; le sous-ensemble ainsi construit est noté $\mathcal{B}^2_{g_1,\dots,g_4}$. Il est contenu dans $\mathcal{A}^2_{g_1+g_2,g_3,g_4}$ et $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2,g_3+g_4}$. Par exemple, $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes du type A2.3.7. Toutes les composantes sont des $\mathbb{P}^1$. Le graphe dual suivant représente ces courbes : chaque sommet représente une composante, chaque arête un point double.



Tandis que $\mathcal{B}^2_{1,1,1,1}$ correspond aux revêtements de courbes de graphe dual



toutes les composantes étant des $\mathbb{P}^1$.

Lemme III.5. *Les éléments de $\mathcal{E}^2_{2,2}$ ne peuvent avoir plus de dix thétaconstantes nulles. Ceux qui en ont neuf ou dix sont dans $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ ou dans $\mathcal{B}^2_{1,1,1,1}$.*

Démonstration. Le nombre de thétaconstantes nulles est maintenant quatre plus le nombre de décompositions de Δ en somme de deux éléments de $|\delta|$ telles que, si $P_i+P_j+P_k+P_\ell$ est l'une d'elles, on ait

$$h^0(Q_i+Q_j+Q_k+Q_\ell+\eta) = h^0(Q_i+Q_j+Q_k+Q_\ell+Q_1+Q_2+Q_3+Q_4-p^*\delta')$$

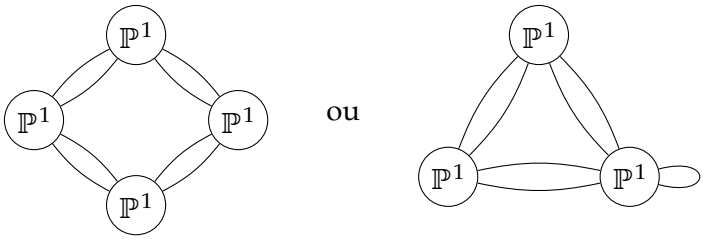
pair. On vérifie que c'est équivalent à la parité de $\#(\{1,2,3,4\}\cap\{i,j,k,\ell\})$. On obtient ainsi, comme dans le lemme 3, un maximum de $4+6=10$ thétaconstantes nulles.

Rappelons l'effet de la construction tétragonale sur les éléments de $\mathcal{S}_{5,2}$ (II.D.3.2.2). Soit $\phi\colon E\to\mathbb{P}^1$ un morphisme de degré 2. Une des courbes C' obtenues est construite ainsi : soient C_1, C_2 deux courbes elliptiques revêtements de $\mathbb{P}^1$ ramifiés en $\phi P_1+\cdots+\phi P_4$ et $\phi P_5+\cdots+\phi P_8$ respectivement. La courbe C' est réunion de C_1 et C_2, qui se coupent en quatre points.

Il est facile de vérifier que si on a au moins neuf thétaconstantes nulles, c'est-à-dire au moins cinq décompositions de Δ, alors on a une relation du type

$$P_1+P_2\equiv P_3+P_4\equiv P_5+P_6\equiv P_7+P_8.$$

Si on prend pour ϕ le morphisme associé à $O_E(P_1+P_2)$, les courbes C_1, C_2 deviennent réductibles, chacune isomorphe à deux copies de $\mathbb{P}^1$ se coupant en deux points. La courbe C' est alors de l'un des deux types suivants, après réduction stable le cas échéant (représentation par les graphes duaux) :



Chacune des composantes représentées est une $\mathbb{P}^1$. La variété de Prym est donc dans $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ ou dans $\mathcal{B}^2_{1,1,1,1}$. □

Rappelons brièvement la construction des éléments de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$. On part de quatre courbes elliptiques E_1, E_2, E_3, E_4. On choisit des générateurs α_j, β_j de $E_j[2]$. Le quotient de $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1,\alpha_2,0,0),\quad (\alpha_1,0,\alpha_3,0),\quad (\alpha_1,0,0,\alpha_4),\quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

est une variété abélienne principalement polarisée, élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$.

Lemme III.6. *On a $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}\subset\theta^{(6),\mathrm{irr}}_{\mathrm{null}}$. Les sous-variétés $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}\cap\theta^{(p)}_{\mathrm{null}}$, $6\le p\le 10$, sont irréductibles de dimension $10-p$. En particulier, un seul élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ a dix thétaconstantes nulles.*

Démonstration. On a une isogénie $\pi\colon E_1\times E_2\times E_3\times E_4\to A$. Soit o_j l'élément neutre de E_j et M_j le faisceau inversible symétrique $O(2o_j)$. On choisit $\tilde\alpha_j, \tilde\beta_j\in\mathcal{G}(M_j)$ d'images respectives α_j, β_j dans $H(M_j)=E_j[2]$, tels que

$$\tilde\alpha_j^2=\tilde\beta_j^2=1,\qquad \tilde\alpha_j\tilde\beta_j\tilde\alpha_j\tilde\beta_j=-1.$$

Soit s_j une section de M_j invariante par $\tilde\alpha_j$, et $t_j=\tilde\beta_j\cdot s_j$. On a $\mathrm{div}(s_j)=x_j+(x_j+\alpha_j)$, avec $2x_j=\alpha_j$. Une équation de l'image inverse dans $E_1\times E_2\times E_3\times E_4$ du diviseur thêta de A est

$$s=s_1s_2s_3s_4+t_1t_2t_3t_4.$$

Soit $(y_1,\dots,y_4)$ un point singulier de $\mathrm{div}(s)$. On distingue deux cas.

i) Si $2y_1 \neq 0$, alors $s_1(y_1)\dot{t}_1(y_1) - \dot{s}_1(y_1)t_1(y_1) \neq 0$, où un point désigne la dérivation par rapport à un paramètre local sur les courbes E_j. On a donc

$$s_2(y_2)s_3(y_3)s_4(y_4) = t_2(y_2)t_3(y_3)t_4(y_4) = 0.$$

Si $s_2(y_2)t_2(y_2) \neq 0$, alors $s_3(y_3)s_4(y_4) = t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$. On a par exemple $s_3(y_3) = t_4(y_4) = 0$. En particulier, y_3 et y_4 ne sont pas d'ordre 2. Par la même méthode, on a donc $s_1(y_1)s_3(y_3) = t_1(y_1)t_3(y_3) = s_1(y_1)s_4(y_4) = t_1(y_1)t_4(y_4) = 0$, ce qui est impossible. On a donc montré que, pour chaque $j \in \{2,3,4\}$, $s_j(y_j) = 0$ ou $t_j(y_j) = 0$.

En particulier, y_2 n'est pas d'ordre 2 et on a aussi $s_1(y_1) = 0$ ou $t_1(y_1) = 0$. Plus précisément, il faut et il suffit que

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_4, \qquad \begin{cases} s_{\sigma(1)}(y_{\sigma(1)}) = s_{\sigma(2)}(y_{\sigma(2)}) = 0, \\ t_{\sigma(3)}(y_{\sigma(3)}) = t_{\sigma(4)}(y_{\sigma(4)}) = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi les six points distincts suivants sur A, singuliers sur Θ :

$$\pi(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \beta_1 + \beta_j + \epsilon\alpha_1), \qquad j \in \{2,3,4\}, \quad \epsilon \in \{0,1\}.$$

Ils sont d'ordre 2 puisque $2\sum_j x_j = \sum_j \alpha_j$ est dans le noyau de π.

ii) Si un y_j est d'ordre 2, le premier cas montre que tous les y_j sont d'ordre 2. Les images de $o_j, \alpha_j, \beta_j, \alpha_j + \beta_j$ par $(s_j, t_j) : E_j \to \mathbb{P}^1$ sont $\lambda_j, -\lambda_j, 1/\lambda_j, -1/\lambda_j$ ([Mu 5], p. 350), avec

$$\lambda_j \in U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1, i, -i\}.$$

Le complexe λ_j détermine la courbe E_j, les éléments α_j, β_j et une théta-structure pour la polarisation de degré 2 sur E_j (cf. [Ig 2] ou [V]), de sorte que U est l'espace de modules $\mathcal{A}_1(2,4)$.

On peut donc définir un morphisme surjectif $U^4 \to \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$.

Le birapport des quatre éléments $\lambda, -\lambda, 1/\lambda, -1/\lambda$ de $\mathbb{P}^1$ est

$$\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\right)^2.$$

Il est invariant par le groupe G de transformations engendré par $\lambda \mapsto -\lambda$ et $\lambda \mapsto -1/\lambda$.

Le morphisme $U^4 \to \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est donc invariant par l'action du groupe G^4 sur U^4, ainsi que par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. L'image de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in U^4$ appartient à $\theta^{(7)}_{\text{null}}$ si et seulement s'il existe $g_1, \dots, g_4 \in G$ tels que

$$1 + g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) = 0.$$

Ainsi $\theta^{(7)}_{\text{null}} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image de l'hypersurface irréductible de U^4 d'équation $1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0$.

De même, $\theta^{(8)}_{\text{null}} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image de la réunion des sous-variétés de U^4 définies par

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0, \\ 1 + g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) = 0, \end{cases}$$

où

$$g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)g_4(\lambda_4) \notin \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{-1}\}.$$

En utilisant les actions de G^4 et de $\mathfrak{S}_4$, on se ramène aux quatre sous-variétés

$$\lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = \pm i, \qquad \lambda_1\lambda_3 = -\lambda_2\lambda_4 = \pm 1,$$

puis aux points de la forme $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ou $(\lambda_1, \lambda_2, i\lambda_1, i\lambda_2)$.

Or la transformation $\lambda \mapsto i\lambda$ transforme (E, α, β) en $(E, \alpha, \alpha + \beta)$. Le morphisme $U^4 \to \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est donc invariant par

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longmapsto (i\lambda_1, i\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Il en résulte que $\theta^{(8)}_{\text{null}} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image de la surface irréductible de U^4 formée des points $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$.

On montre de même que $\theta^{(9)}_{\text{null}} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ est l'image de la diagonale de U^4 et que $\theta^{(10)}_{\text{null}} \cap \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$ correspond au cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, avec $\lambda^4 = -1$. Les courbes $E_1, \dots, E_4$ sont alors isomorphes à la courbe elliptique à multiplication complexe par i, d'invariant $j = 1728$. On retrouve ainsi la variété de Varley [Va]. □

Le lemme suivant traite le cas de $\mathcal{B}^2_{1,1,1,1}$ et termine la démonstration des deux derniers points du théorème III.1.

Lemme III.7. *On a*

$$\mathcal{B}^2_{1,1,1,1} \subset \theta^{(4)}_{\text{null}}, \qquad \mathcal{B}^2_{1,1,1,1} \cap \theta^{(7)}_{\text{null}} \subset \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}.$$

Démonstration. Avec les notations du lemme précédent, une équation de Θ est

$$s = s_1 s_2 (s_3 s_4 + t_3 t_4) + t_1 t_2 (s_3 s_4 - t_3 t_4).$$

Soit (y_1, y_2, y_3, y_4) un point singulier.

i) Supposons $2y_1 \neq 0$. On a alors

$$s_2(y_2)(s_3(y_3)s_4(y_4) + t_3(y_3)t_4(y_4)) = 0,$$
$$t_2(y_2)(s_3(y_3)s_4(y_4) - t_3(y_3)t_4(y_4)) = 0.$$

1) Si $s_3(y_3)s_4(y_4) = t_3(y_3)t_4(y_4) = 0$, les points y_3, y_4 ne sont pas d'ordre 2. On a donc

$$s_4(y_4)(s_1(y_1)s_2(y_2) + t_1(y_1)t_2(y_2)) = 0,$$
$$t_4(y_4)(s_1(y_1)s_2(y_2) - t_1(y_1)t_2(y_2)) = 0,$$
$$s_3(y_3)(s_1(y_1)s_2(y_2) + t_1(y_1)t_2(y_2)) = 0,$$
$$t_3(y_3)(s_1(y_1)s_2(y_2) - t_1(y_1)t_2(y_2)) = 0.$$

Il en résulte $s_1(y_1)s_2(y_2) = t_1(y_1)t_2(y_2) = 0$; pour tout j, on a donc $s_j(y_j) = 0$ ou $t_j(y_j) = 0$. On obtient les quatre points distincts d'ordre 2 de A suivants :

$$\pi(x_1, x_2 + \beta_2, x_3, x_4 + \beta_4),$$
$$\pi(x_1, x_2 + \beta_2, x_3 + \alpha_3, x_4 + \beta_4),$$
$$\pi(x_1, x_2 + \beta_2, x_3 + \beta_3, x_4),$$
$$\pi(x_1, x_2 + \beta_2, x_3 + \beta_3, x_4 + \alpha_4).$$

2) Si, par exemple, $s_3(y_3)s_4(y_4) + t_3(y_3)t_4(y_4) \neq 0$, on a $s_2(y_2) = 0$, donc $2y_2 \neq 0$. De même, $s_1(y_1) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} s_3(y_3)s_4(y_4) - t_3(y_3)t_4(y_4) &= 0, \\ \dot{s}_3(y_3)s_4(y_4) - \dot{t}_3(y_3)t_4(y_4) &= 0, \\ s_3(y_3)\dot{s}_4(y_4) - t_3(y_3)\dot{t}_4(y_4) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que y_3, y_4 sont d'ordre 2. On peut donc supposer

$$(y_3, y_4) \in \{(o_3, o_4), (o_3, \beta_4)\},$$

soit $1 - \lambda_3\lambda_4 = 0$ ou $\lambda_3 = \lambda_4$. Il existe alors un isomorphisme $E_3 \to E_4$ envoyant α_3 sur α_4. On a le diagramme suivant (A2.2.3) :

$$\begin{array}{ccc} E_3 \times E_3 & & E_3' \times E_3' \\ & {\scriptstyle p} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle p'} & \\ & (Y, M) & \end{array} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Ker} p &= \langle (\alpha_3, \alpha_3) \rangle, \\ \operatorname{Ker} p' &= \langle (\alpha_3', \alpha_3') \rangle. \end{aligned}$$

où $E_3' = E_3/\{0, \alpha_3\}$ et α_3' est l'image de β_3. Les points

$$p(\beta_3, \beta_3) = p'(\alpha_3', 0), \qquad p(\alpha_3, 0) = p'(\beta_3', \beta_3')$$

engendrent $H(M)$. Ainsi (A, Θ) est un élément de $\mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$, quotient de $E_1 \times E_2 \times E_3' \times E_3'$.

ii) Si $(A, \Theta) \notin \mathcal{A}^2_{1,1,1,1}$, les autres points singuliers éventuels de Θ sont donc de la forme $\pi(y_1, \dots, y_4)$, avec $2y_j = 0$ pour tout j. Supposons que l'un d'eux soit $\pi(o_1, o_2, o_3, o_4)$. On a alors

$$1 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2(1 - \lambda_3\lambda_4) = 0.$$

D'après ce qui précède, on peut supposer $\lambda_3\lambda_4 \neq \pm 1$. Tout autre point singulier appartient alors à l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{\pi(o_1, \beta_2, \alpha_3, o_4),\ \pi(o_1, \beta_2, \beta_3, o_4),\ \pi(o_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, o_4), \\ &\pi(o_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_4),\ \pi(o_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4),\ \pi(o_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \beta_4)\}, \end{aligned}$$

et il ne peut y en avoir deux.

□

□

CHAPITRE IV

Problème de Schottky pour les variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6}

IV.A Variétés de Prym et ensembles N^g_{g-6}

Nous avons montré en II.D.1.2.5 que la famille $\mathcal{P}_g$ des variétés de Prym de dimension g était contenue, pour $g \geq 6$, dans l'ensemble d'Andreotti et Mayer

$$N^g_{g-6} = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid \dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 6\}.$$

Nous allons préciser ce résultat en montrant l'analogue suivant du théorème principal de [An-M] :

Théorème IV.A. *Pour $g \geq 7$, $\mathcal{P}_g$ est une composante irréductible de N^g_{g-6}.*

L'assertion correspondante pour $g = 6$ est fausse, puisque $\mathcal{P}_6$ est de dimension 18, $\mathcal{A}_6$ de dimension 21, et que, pour tout g, N^g_0 est un diviseur de $\mathcal{A}_g$ ([Be 1], [Mu 1]).

La méthode utilisée est essentiellement celle de [An-M]. Andreotti et Mayer exhibent une jacobienne de courbe (J, Θ) avec $\dim \operatorname{Sing} \Theta = g - 4$, telle que les cônes tangents à Θ aux points de multiplicité 2 engendrent un espace vectoriel de codimension $3g - 3$ dans $S^2 T^*_0 J$. Ils montrent ensuite que ceci entraîne leur résultat.

On pourrait employer la même méthode pour les variétés de Prym. Malheureusement, si l'on sait que pour une variété de Prym générique on a $\dim \operatorname{Sing} \Xi = g - 6$, on ne sait pas, à ma connaissance, décrire un exemple explicite vérifiant cette propriété. De plus, le problème des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta semble difficile à aborder directement.

Pour contourner cette difficulté, on a recours à des dégénérescences de variétés de Prym, à savoir certaines extensions de variétés de Prym par $\mathbf{C}^*$. Via l'isomorphisme $\operatorname{Ext}^1(P, \mathbf{C}^*) \simeq P$, ce sont les extensions correspondant à $a = O(r + s - \sigma r - \sigma s) \in P$, où $P = \operatorname{Prym}(\widetilde{C} \to \widetilde{C}/\sigma)$ et $r, s \in \widetilde{C}$.

On montre au paragraphe 2 que la méthode d'Andreotti et Mayer s'applique sur le bord de $\mathcal{A}_g$. On est ramené à étudier $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$ pour $(P, \Xi) \in \mathcal{P}_{g-1}$ et a comme ci-dessus. On a pour cela recours à une seconde dégénérescence : le cas où (P, Ξ) est une jacobienne de courbe $(JN, \Theta) \in \mathcal{J}_{g-1}$ et $a = O_N(p+q-r-s)$, avec $p, q, r, s \in N$. Dans ce cas, on a $\dim \operatorname{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a) = g - 6$.

À l'aide des résultats des paragraphes 4 et 5, qui décrivent le comportement en famille de $\operatorname{Sing} \Xi$ et de $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$, on met en évidence au paragraphe 6 celles des composantes de $\operatorname{Sing}(\Theta \cdot \Theta_a)$ qui sont spécialisations de la situation générique. Il est alors facile de faire les calculs sur ce cas particulier. On conclut au paragraphe 7.

Tout comme N^g_{g-4}, qui a toujours des composantes autres que $\mathcal{J}_g$ pour $g \geq 4$, N^g_{g-6} a toujours des composantes autres que $\mathcal{P}_g$ pour $g \geq 7$ (A1.4.5).

Signalons enfin une autre analogie avec les jacobiennes. Si C n'est pas hyperelliptique, son plongement canonique est projectivement normal (théorème de Noether). Si de plus C n'est ni trigonale ni une quintique plane lisse, l'idéal de la courbe canonique est engendré par des

quadriques (théorème d'Enriques–Babbage–Petri). On en déduit, grâce à [Gr 1], que pour $g \geq 5$ l'intersection des cônes tangents aux points doubles du diviseur thêta dans $\mathbf{P}T_0JC \simeq \mathbf{P}H^0(C,\omega_C)^*$ est la courbe canonique. Ceci prouve le théorème de Torelli pour ces courbes.

Considérons maintenant une variété de Prym (P,Ξ) de dimension $g \geq 6$, associée à une courbe générique C et à un élément η d'ordre 2 de JC. La courbe semi-canonique

$$X = \varphi_{|\omega_C\otimes\eta|}(C) \subset \mathbf{P}H^0(C,\omega_C\otimes\eta)^* \simeq \mathbf{P}T_0P$$

est projectivement normale [Gr-L]. On peut déduire de nos résultats que les cônes tangents aux points doubles de Ξ engendrent l'espace des quadriques contenant X.

Dans un article actuellement en préparation, nous montrons que, pour $g \geq 7$, l'idéal de X dans $\mathbf{P}^{g-1}$ est engendré par ses éléments de degré 2. En particulier, X est l'intersection des quadriques qui la contiennent, ce qui fournit une démonstration constructive du théorème de Torelli générique pour les variétés de Prym, prouvé par d'autres méthodes dans [Fr-S 1] pour $g \geq 6$.

IV.A.1 Notations, conventions et rappels

Si C est une courbe lisse connexe, on notera (I.2) $C^{(d)}$ l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur C, c'est-à-dire le produit symétrique de d copies de C, et

$$C_d^r = \{D \in C^{(d)} \mid h^0(C,\mathcal{O}(D)) \geq r+1\}, \qquad W_d^r = \{L \in J^dC \mid h^0(C,L) \geq r+1\}.$$

Un élément de W_d^r est appelé un g_d^r. On notera souvent W au lieu de W_{g-3}^0. Si $p,q \in C$, on notera

$$\begin{aligned} W_{p,q} &= \{L(p+q) \in J^{g-1}C \mid L \in W\} \\ &= \{L \in J^{g-1}C \mid h^0(L(-p-q)) \geq 1\}, \\ C_{p,q}^{(d)} &= \{D \in C^{(d+2)} \mid D \geq p+q\}. \end{aligned}$$

On notera s_{pq} une section de $\mathcal{O}(p+q)$ de diviseur $p+q$. De même, pour $D \in C^{(d)}$, on notera s_D une section de $\mathcal{O}(D)$ de diviseur D.

On notera aussi « $-$ » l'involution $L \mapsto \omega_C \otimes L^{-1}$ de $J^{g-1}C$, et $(-Z)$ l'image d'un sous-ensemble Z de $J^{g-1}C$ par cette involution.

Il existe sur les W_d^r et C_d^r des structures naturelles de schéma ([A-C-G-H 1], chapitre IV). On a alors :

— Si $L \in W_d^r \setminus W_d^{r+1}$, l'espace tangent $T_LW_d^r \subset T_LJ^dC \simeq H^0(C,\omega_C)^*$ est l'orthogonal de l'image de l'application naturelle

$$H^0(C,L) \otimes H^0(C,\omega_C\otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(C,\omega_C).$$

— Si C est une courbe générale de genre g, W_d^r est de dimension $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$, irréductible si $\rho > 0$, lisse en dehors de W_d^{r+1}, et Cohen–Macaulay ([A-C-G-H 1], chapitre VII).

On a utilisé, et on utilisera dans toute la suite, la convention qu'un ensemble de dimension < 0 est vide.

IV.A.2 Le théorème d'Andreotti et Mayer et son application aux variétés quasi-abéliennes de rang un

Commençons par rappeler les résultats du §3 de [An-M] relatifs aux lieux de ramification supérieurs d'une application analytique. Le théorème ci-dessous n'apparaît pas tel quel dans

[An-M], mais est une conséquence directe des résultats de cet article.

IV.A.2.1. Soient X et B deux variétés analytiques lisses et connexes, et $p : X \to B$ un morphisme propre et lisse. Soit D un diviseur de X, $S \subset D$ le lieu critique de $p|_D : D \to B$, et $\pi : S \to B$ la restriction de p à S.

On notera toujours f une équation locale de D dans X. Pour tout $x \in X$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_b^*B \xrightarrow{p^*} T_x^*X \xrightarrow{i^*} T_x^*X_b \longrightarrow 0,$$

où $b = p(x)$ et $X_b = p^{-1}(b)$. Si $x \in S$, on a par définition $i^*df(x) = 0$. L'écriture $(p^*)^{-1}(df(x))$ a donc un sens. On notera

$$\forall x \in S, \qquad T_x = \ker[(p^*)^{-1}(df(x))] \subset T_bB.$$

Cet espace vectoriel ne dépend pas de l'équation locale f choisie. On note aussi

$$\begin{aligned} S_k &= \{x \in S \mid \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) \geq k\}, \quad \text{fermé analytique dans } S, \\ \pi_k &= \pi|_{S_k}, \\ N_k &= \pi(S_k), \qquad\qquad\qquad\quad \text{fermé analytique dans } B. \end{aligned} \tag{IV.A.2.2}$$

Soit $b \in B$. On suppose $\dim \pi^{-1}(b) = k$, de sorte que $b \in N_k$. Soit N une composante irréductible locale de N_k en b, et $S^1, \dots, S^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(N)$ qui dominent N. On écrira

$$S(N) = \bigcup_{i=1}^{r} (S^i \cap \pi^{-1}(b)),$$

de sorte que $S(N)$ est une réunion de composantes irréductibles de dimension k de $S_b = \pi^{-1}(b) = \operatorname{Sing} D_b$. Le résultat est le suivant :

Théorème IV.A.2.3. *Le cône tangent réduit à N en b est contenu dans $\bigcap_{x \in S(N)} T_x \subset T_bB$. En particulier,*

$$\dim N \leq \operatorname{codim}_{T_b^*B} \left\langle (p^*)^{-1}(df(x)) \mid x \in S(N) \right\rangle.$$

Démonstration. La démonstration se trouve dans [An-M], pages 214–217. On en reprend ici les grandes lignes. Il existe des points $x_1, \dots, x_m$ dans $S(N)$ tels que

$$\bigcap_{x \in S(N)} T_x = \bigcap_{\alpha=1}^{m} T_{x_\alpha} = T.$$

Pour $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, il existe $j(\alpha) \in \{1, \dots, r\}$ tel que $x_\alpha \in S^{j(\alpha)}$. Soit U_α un voisinage connexe de x_α dans $S^{j(\alpha)}$. Par semi-continuité supérieure, on peut supposer que les fibres de tous les $\pi^j : S^j \to N$ sont de dimension partout égale à k. On en déduit comme dans [An-M], par un théorème de Remmert, que les morphismes π^j sont ouverts.

L'ensemble $\bigcap_{\alpha=1}^m \pi^{j(\alpha)}(U_\alpha)$ est ouvert et tout point lisse y de N dans cet ouvert a un antécédent dans chaque U_α.

Les ouverts U_α peuvent être choisis arbitrairement petits. Pour toute suite $y^{(n)}$ de points lisses de N convergeant vers b, on peut choisir des suites $x_\alpha^{(n)}$ de points de $\pi_k^{-1}(N)$ convergeant vers x_α, avec $\pi_k(x_\alpha^{(n)}) = y^{(n)}$.

Par Lemma 8 de [An-M], on a

$$T_{y^{(n)}}N \subset \bigcap_{\alpha=1}^{m} T_{x_\alpha^{(n)}}.$$

Si l'on suppose que la limite des espaces tangents existe, on a donc

$$\lim_n T_{y^{(n)}} N \subset T.$$

Le cône tangent réduit à N en b étant contenu dans la réunion de toutes ces limites, on a le résultat. □

IV.A.2.4. Dans tout cet article, on appellera variété quasi-abélienne de rang 1 et de dimension $g+1$ toute extension d'une variété abélienne principalement polarisée de dimension g par le tore $\mathbf{C}^*$.

Il existe un espace de modules grossier $\mathcal{A}_{g+1}^{(1)}$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées ou quasi-abéliennes de rang 1 de dimension $g+1$ ([Ig 1], [Mu 1], [Na]). Il est réunion disjointe d'un ouvert isomorphe à $\mathcal{A}_{g+1}$ et d'un diviseur $\partial\mathcal{A}_{g+1}$. Il existe un morphisme $\rho_{g+1} : \partial\mathcal{A}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$, dont la fibre au-dessus de (A,Θ) est isomorphe à $A/\operatorname{Aut}(A,\Theta)$. C'est le morphisme induit sur $\partial\mathcal{A}_{g+1}$ par le morphisme de $\mathcal{A}_{g+1}^{(1)}$ dans la compactification de Satake $\mathcal{A}_{g+1}^* = \mathcal{A}_{g+1} \cup \mathcal{A}_g \cup \cdots \cup \mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}_{g+1}$.

Il existe une « famille universelle » de variétés quasi-abéliennes de rang 1 au-dessus de $B = \mathbf{C}^g \times \mathfrak{H}_g$, dont nous allons construire une compactification $p : X \to B$. Soient

— $\widetilde{X} = (\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbf{C}^g \times B$;

— $\Gamma = \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}^g \times \mathbf{Z}^g$, agissant sur $\widetilde{X}$ par

$$(\alpha,p,q)\cdot(\lambda,\mu,z,a,\tau) = (\alpha\lambda, \alpha\mu e^{-2\pi i\,{}^t qa}, z+p+\tau q, a, \tau);$$

— $X = \widetilde{X}/\Gamma$;

— $p : X \to B$ la projection sur les deux derniers facteurs.

La fibre de $(a,\tau) \in B$ est isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(O_A(\Theta) \oplus O_A(\Theta_a))$ sur la variété abélienne principalement polarisée (A,Θ) associée à $\tau \in \mathfrak{H}_g$. Ce fibré, privé de ses deux sections canoniques, est une extension de A par $\mathbf{C}^*$.

On définit un morphisme $f : \widetilde{X} \to \mathbf{C}$ par

$$f(\lambda,\mu,z,a,\tau) = \lambda\theta(z,\tau) + \mu\theta(z-a,\tau).$$

On a

$$\begin{aligned} f((\alpha,p,q)\cdot(\lambda,\mu,z,a,\tau)) &= \alpha\lambda\theta(z+p+\tau q,\tau) + \alpha\mu e^{-2\pi i\,{}^t qa}\theta(z-a+p+\tau q,\tau) \\ &= \alpha\lambda e^{\pi i(-{}^t q\tau q - 2{}^t qz)}\theta(z,\tau) \\ &\quad + \alpha\mu e^{-2\pi i\,{}^t qa} e^{\pi i(-{}^t q\tau q - 2{}^t q(z-a))}\theta(z-a,\tau) \\ &= \alpha e^{\pi i(-{}^t q\tau q - 2{}^t qz)} f(\lambda,\mu,z,a,\tau). \end{aligned}$$

Le diviseur $\widetilde{D}$ de f est donc l'image inverse d'un diviseur D sur X. On prendra f comme équation locale de D. On reprend les notations de IV.A.2.1 pour en appliquer les résultats à notre situation.

La fibre de $(a,\tau) \in B$ sous $\widetilde{\pi} : \tilde{S} \to B$ est

$$\left\{ (\lambda,\mu,z) \;\middle|\; \begin{array}{c} \theta(z,\tau) = \theta(z-a,\tau) = 0, \\ \lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial z_j}(z,\tau) + \mu\dfrac{\partial\theta}{\partial z_j}(z-a,\tau) = 0 \quad (1 \le j \le g) \end{array} \right\}.$$

L'ensemble N_k introduit en IV.A.2.2 correspond donc à

$$\left\{(a,\tau)\in B \;\middle|\; \begin{array}{c}\dim \operatorname{Sing}(\Theta\cdot\Theta_a)\geq k \text{ ou}\\ \dim(\operatorname{Sing}\Theta\cap\operatorname{Sing}\Theta_a)\geq k-1\end{array}\right\}.$$

Pour éviter toute confusion avec les ensembles d'Andreotti et Mayer, on le notera ici Γ_k^g.

IV.A.2.5. Il résulte de [Mu 1], (2.4), pages 363–364, que la frontière de l'ensemble d'Andreotti et Mayer

$$N_k^{g+1}=\{(A,\Theta)\in\mathcal{A}_{g+1}\mid \dim\operatorname{Sing}\Theta\geq k\}$$

dans la compactification partielle $\mathcal{A}_{g+1}^{(1)}$ est contenue dans

$$\rho_{g+1}^{-1}(N_k^g)\cup\partial' N_k^{g+1},$$

où $\partial' N_k^{g+1}$ est l'image de Γ_k^g par le morphisme $B=\mathbf{C}^g\times\mathfrak{H}_g\to\partial\mathcal{A}_{g+1}$.

On appliquera le théorème IV.A.2.3 sous la forme suivante :

Proposition IV.A.2.6. *Soit $f:(\mathcal{A},\Theta)\to T$ une famille de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, avec T lisse connexe, munie d'une section a. On lui associe une famille de variétés quasi-abéliennes de rang 1, donc un morphisme $\varphi:T\to\partial\mathcal{A}_{g+1}$. On pose*

$$\mathcal{T}=\bigcup_{t\in T}\operatorname{Sing}(\Theta_t\cdot\Theta_{t,a_t})\subset\mathcal{A}.$$

On fait les hypothèses suivantes :

(*i*) *Pour tout $t\in T$, $\mathcal{T}_t$ est de dimension k, et est irréductible pour t générique. Une seule composante $\mathcal{T}^0$ de $\mathcal{T}$ domine donc T.*

(*ii*) *Pour t générique dans T, on a $\dim(\operatorname{Sing}\Theta_t\cap\operatorname{Sing}\Theta_{t,a_t})\leq k-2$.*

(*iii*) *Pour tout $t\in T$, les seuls automorphismes de (A_t,Θ_t) sont $\pm\mathrm{id}$, et a_t n'est pas d'ordre 2.*

En particulier, $\varphi(T)\subset\partial' N_k^{g+1}$. Soit N une composante irréductible de $\partial' N_k^{g+1}$ contenant $\varphi(T)$. Alors, pour tout $t\in T$, la dimension de N en $\varphi(t)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de $\mathcal{T}_t^0$ par l'application rationnelle

$$\mathcal{T}_t=\operatorname{Sing}(\Theta_t\cdot\Theta_{t,a_t})\dashrightarrow\mathbf{P}^{g+\binom{g+1}{2}-1},$$

$$z\longmapsto\left[\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau)\right)_{1\leq i\leq g},\quad\left(\lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i\partial z_j}(z,\tau)+\mu\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i\partial z_j}(z-a_t,\tau)\right)_{1\leq i\leq j\leq g}\right],$$

où $\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau)+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z-a_t,\tau)=0$ pour tout i.

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer T simplement connexe. Grâce à l'hypothèse (iii), le morphisme $\varphi:T\to\partial\mathcal{A}_{g+1}$ se relève en $\psi:T\to B$. On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}P=\mathbf{P}(O_{\mathcal{A}}(\Theta)\oplus O_{\mathcal{A}}(\Theta_a)) & \xrightarrow{\Psi} & X\\ \downarrow{\scriptstyle\bar f} & & \downarrow\\ T & \xrightarrow[\psi]{} & B.\end{array}$$

Considérons le relèvement $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ dans le lieu critique de P. La projection $h : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ est birationnelle, sauf au-dessus des points de $\operatorname{Sing}\Theta_t \cap \operatorname{Sing}\Theta_{t,a_t}$. Grâce aux hypothèses (ii) et (i), pour t générique, $\mathcal{T}_t'$ est de dimension k et est irréductible. Une seule composante $\mathcal{T}'^0$ de $\mathcal{T}'$ domine donc T. Son image par h est $\mathcal{T}^0$.

Soit N' une composante irréductible locale de Γ_k^g qui contienne $\psi(T)$ et dont l'image dans $\partial\mathcal{A}_{g+1}$ contienne N. Comme en IV.A.2.2, on note $S^1, \dots, S^r$ les composantes irréductibles de $\pi_k^{-1}(N')$ qui dominent N'. Par construction, pour tout $t \in T$, les $S^j_{\psi(t)}$ sont des composantes de $\mathcal{T}_t'$ de dimension $\geq k$. On déduit de ce qui précède que, pour t générique, $S^j_{\psi(t)} = \mathcal{T}'^0_t$ pour tout j, de sorte que $S^j \supset \Psi(\mathcal{T}'^0)$. On peut alors appliquer le théorème IV.A.2.3.

Plaçons-nous en un point $\tilde{x} = (\lambda, \mu, z, a, \tau)$ de $\widetilde{X}$ au-dessus de $x \in S_t$. Si $\mu \neq 0$, on peut supposer $\mu = 1$. Avec

$$f(\lambda, 1, z, a, \tau) = \lambda\theta(z, \tau) + \theta(z - a, \tau),$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda} &= 0 = \theta(z,\tau), \\
\frac{\partial f}{\partial z_j} &= 0 = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z,\tau) + \frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z-a,\tau), && \tilde{x} \in \tilde{S}_t = \operatorname{Sing}\widetilde{D}_t, \\
\frac{\partial f}{\partial a_j} &= -\frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z-a,\tau) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_j}(z,\tau), \\
\frac{\partial f}{\partial \tau_{jk}} &= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\tau_{jk}}(z,\tau) + \frac{\partial\theta}{\partial\tau_{jk}}(z-a,\tau) \\
&= \frac{1}{2\pi i(1+\delta_{jk})}\left(\lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial z_j\partial z_k}(z,\tau) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z_j\partial z_k}(z-a,\tau)\right),
\end{aligned}$$

par l'équation de la chaleur (I.3.14). On en déduit la proposition par application de IV.A.2.3. □

IV.A.3 Quelques résultats sur les systèmes linéaires sur les courbes

Nous rassemblons ici des résultats relatifs aux sous-schémas W_d^r d'une jacobienne de courbe lisse dont nous aurons besoin par la suite.

Pour une courbe lisse C de genre g, on adoptera ici et dans la suite la notation

$$W = W_{g-3}^0 \subset J^{g-3}C.$$

Conformément à IV.A.1, pour $p, q \in C$, on notera

$$\begin{aligned}
W_{p,q} &= W + p + q \subset J^{g-1}C, \\
C_p^{(d)} &= \{D \in C^{(d+1)} \mid D \geq p\}, \\
C_{p,q}^{(d)} &= \{D \in C^{(d+2)} \mid D \geq p + q\}.
\end{aligned}$$

Proposition IV.A.3.1. *Soit C une courbe lisse générique de genre g. Alors, pour p et q génériques sur C,*

$$\forall L \in \operatorname{Pic}(C), \qquad h^0(L) \geq 2 \implies h^1(L^2(-p-q)) = 0.$$

Démonstration. On sait [Gi] que, sur une courbe générique,

$$h^0(L) \geq 2 \implies h^1(L^2) = 0 \implies h^0(L^2) = 2d + 1 - g,$$

où $d = \deg L$. De plus, si p était point base de $|L^2|$, il serait aussi point base de $|L|$ et l'on aurait

$$h^0(L(-p)) \geq 2 \implies h^0(L^2(-2p)) = 2d - 2 + 1 - g = h^0(L^2) - 2.$$

C'est une contradiction. On en déduit

$$\forall p \in C, \qquad h^0(L^2(-p)) = h^0(L^2) - 1 = 2d - g \iff h^0(\omega_C \otimes L^{-2}(p)) = 0.$$

Pour $d > g$, on a immédiatement $h^1(L^2(-p-q)) = 0$, puisque $\deg(\omega_C \otimes L^{-2}(p+q)) < 0$. Traitons aussi le cas $d = g$. Sur la diagonale $p = q$, un faisceau exceptionnel devrait vérifier $L^2 = \omega_C(2p)$, donc $L = \kappa(p)$ avec $\kappa^2 = \omega_C$. La propriété de Gieseker rappelée ci-dessus donne $h^0(\kappa) \leq 1$, car $h^0(\kappa) \geq 2$ entraînerait $h^1(\omega_C) = 0$. Il n'y a qu'un nombre fini de caractéristiques thêta κ. Choisissons p hors des diviseurs des sections de celles qui sont effectives. Alors $h^0(\kappa(-p)) = 0$ pour toutes, et Riemann–Roch donne $h^0(\kappa(p)) = 1$. Aucun faisceau exceptionnel de degré g n'existe donc pour ce (p,p). La propreté du lieu d'incidence ci-dessous montre qu'il n'en existe pas pour (p,q) générique.

Il reste les degrés $d < g$, pour lesquels $2g - 2d > 0$. Considérons le fermé

$$F = \{(L,p,q) \in J^dC \times C^2 \mid h^0(L) \geq 2,\ h^1(L^2(-p-q)) \neq 0\}.$$

Si sa projection sur le facteur C^2 est surjective, il existe une surface Σ, un revêtement fini $\pi = (p,q) : \Sigma \to C^2$ et un morphisme $f : \Sigma \to J^dC$ tels que, pour tout $x \in \Sigma$,

$$h^0(L_x) \geq 2, \qquad h^1(L_x^2(-p(x) - q(x))) = h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x) + q(x))) \geq 1,$$

où $L_x = f(x)$. Ce qui précède donne $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x))) = 0$, donc $h^0(\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x)+q(x))) = 1$.

À tout $x \in \Sigma$, on peut donc associer l'unique élément D_x de $|\omega_C \otimes L_x^{-2}(p(x) + q(x))|$. On a un morphisme

$$g : \Sigma \longrightarrow C^{(2g-2d)}, \qquad x \longmapsto D_x,$$

et $q(x) \notin \operatorname{Supp} D_x$. En fixant $q(x) = q$, on obtient un morphisme $\Sigma_q = \pi^{-1}(C \times \{q\}) \to C^{(2g-2d)}$ dont l'image ne rencontre pas le diviseur ample $C_q^{(2g-2d-1)}$ de $C^{(2g-2d)}$ ([Fu-L], Lemma 2.7). Il est donc constant, égal à D_q, avec $q \notin \operatorname{Supp} D_q$. On a

$$\forall x \in \Sigma, \qquad L_x^{-2}(p(x) + q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{q(x)}),$$

donc aussi $L_x^{-2}(p(x)+q(x)) = \omega_C^{-1}(D_{p(x)})$. On en déduit que $D_{p(x)}$ est constant, égal à D. Mais on doit alors avoir $p \notin \operatorname{Supp} D$ pour tout p, ce qui est absurde. La projection de F sur C^2 n'est donc pas surjective, ce qui prouve la proposition. □

Proposition IV.A.3.2. *Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geq 6$. Alors, pour p, q génériques sur C, $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$ est irréductible réduit de dimension $g - 5$. Sa classe de cohomologie est $\theta^5/24$.*

Démonstration. Considérons les images inverses de $\operatorname{Sing} \Theta$ et de $W_{p,q}$ dans $C^{(g-1)}$. La première est C_{g-1}^1, irréductible de dimension $g-3$; la seconde est $C_{p,q}^{(g-3)}$, lieu des zéros d'une section d'un faisceau localement libre ample de rang 2 ([Fu-L], Lemma 2.7). Leur intersection T, de dimension pure $g-5$ pour (p,q) générique, est donc connexe en codimension 1 pour $g-3 > 2$ ([Fu-L] ou [A-C-G-H 1], p. 314). Si T est réductible, il est donc singulier en codimension 1.

Comme le morphisme $C_{p,q}^{(g-3)} \to \Theta$ est un isomorphisme hors de $(C_{g-3}^1)_{p,q}$, qui est de dimension $g-7$ par IV.A.1, sa restriction à T est un isomorphisme en codimension 1, et l'image de T, à savoir $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$, est aussi singulière en codimension 1.

Soit L un point générique d'une composante Z de $\operatorname{Sing}(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta)$ de dimension $\geq g-6$. Comme $\dim W_{g-1}^2 = g-9$ et $\dim W_{g-3}^1 = g-8$, on a $h^0(L) = 2$ et $h^0(L(-p-q)) = 1$. Pour $D \in |L(-p-q)|$, on a les égalités suivantes (notations de IV.A.1) :

$$\begin{aligned} H^0(L) &= \mathbf{C}s_D s_{pq} \oplus \mathbf{C}s_2, \\ H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) &= \mathbf{C}t_1 \oplus \mathbf{C}t_2, \\ T_L \operatorname{Sing}\Theta &= \langle s_D s_{pq} t_1, s_D s_{pq} t_2, s_2 t_1, s_2 t_2 \rangle^\perp, \\ H^0(L(-p-q)) &= \mathbf{C}s_D, \\ H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q)) &= \mathbf{C}t_1 s_{pq} \oplus \mathbf{C}t_2 s_{pq} \oplus \mathbf{C}t, \\ T_L W_{p,q} &= \langle s_D t_1 s_{pq}, s_D t_2 s_{pq}, s_D t \rangle^\perp. \end{aligned}$$

Mais L est singulier sur $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ et lisse sur $\operatorname{Sing}\Theta$ et sur $W_{p,q}$. On a donc $T_L \operatorname{Sing}\Theta \subset T_L W_{p,q}$ et, quitte à modifier t et t_1,

$$s_D t = s_2 t_1. \tag{IV.A.3.3}$$

Soit F la partie fixe de L. Supposons d'abord $p, q \notin \operatorname{Supp} F$. On peut écrire

$$\begin{aligned} D &= F + E, \\ \operatorname{div} s_1 &= p + q + F + E, \\ \operatorname{div} s_2 &= F + M, \qquad \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}(p+q+E) = \emptyset. \end{aligned}$$

L'égalité IV.A.3.3 s'écrit $s_E t = s_M t_1$. Donc t s'annule sur M et s'écrit $t = s_M u$, avec

$$\begin{aligned} u &\in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q-M)) \\ &= H^0(K_C - 2M + p + q - F) \subset H^0(K_C - 2M + p + q). \end{aligned}$$

Mais, par IV.A.3.1, pour un choix générique de p, q, ce dernier espace est nul pour tout M tel que $h^0(M) \geq 2$. On obtient la contradiction $t = 0$.

On ne peut avoir $p + q \leq F$, car $h^0(L(-p-q)) = 1$. On a donc, par exemple, $p \in \operatorname{Supp} F$, $q \notin \operatorname{Supp} F$, et

$$\begin{aligned} F &= p + G, \qquad D = G + E, \\ \operatorname{div} s_1 &= p + q + G + E, \\ \operatorname{div} s_2 &= p + G + M, \qquad \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}(q+E) = \emptyset. \end{aligned}$$

On a alors $s_E t = s_M s_p t_1$. Comme dans le premier cas, $t = s_M u$, avec

$$u \in H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q-M)) \subset H^0(K_C - 2M + p + q) = 0,$$

d'où une contradiction. On a ainsi montré que $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ est non singulier en codimension 1, donc irréductible. Sa classe de cohomologie est calculée en IV.A.3.7. □

Proposition IV.A.3.4. *Soit C une courbe lisse connexe de genre $g \geq 5$, non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, et p, q des points distincts de C. On considère l'application rationnelle*

$$\begin{aligned} \phi : \operatorname{Sing}\Theta &\dashrightarrow \mathbf{P}S^2 T_0^* JC \simeq \mathbf{P}S^2 H^0(C, \omega_C), \\ x \in \operatorname{Sing}_2 \Theta &\longmapsto \tau_x^*(\textit{cône tangent en } x \textit{ à } \Theta). \end{aligned}$$

Alors l'espace projectif engendré par l'image de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ est de codimension $3g-2$. C'est l'espace projectif des quadriques de $|\omega_C|^*$ contenant la courbe canonique et la corde pq.

Démonstration. Soit $X \subset \mathbf{P}H^0(C,\omega_C)^* = \mathbf{P}^{g-1}$ la courbe canonique de C, et $\mathcal{I}_X$ son idéal dans $\mathbf{P}^{g-1}$. On sait par [Gr 1] que l'application rationnelle

$$\psi : \operatorname{Sing}\Theta \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(\mathcal{I}_X(2)) \subset \mathbf{P}S^2H^0(C,\omega_C)$$

induite par ϕ est non dégénérée et associée à un sous-espace vectoriel V de $H^0(\operatorname{Sing}\Theta, O(\Theta))$. Soit $\langle pq\rangle$ la droite pq dans $\mathbf{P}^{g-1}$ pour $p,q \in X$, et

$$H_{p,q} = \mathbf{P}H^0(\mathcal{I}_{X\cup\langle pq\rangle}(2)) \subset \mathbf{P}H^0(\mathcal{I}_X(2)).$$

Sous nos hypothèses, l'intersection des quadriques contenant X est X elle-même, sauf si C est une quintique plane ($g=6$), auquel cas c'est la surface de Veronese dans $\mathbf{P}^5$, qui ne contient pas de droite [SD]. On en déduit que $H_{p,q}$ est un hyperplan de $\mathbf{P}H^0(\mathcal{I}_X(2))$. On va montrer que

$$\psi^*(H_{p,q}) = (W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) + ((-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing}\Theta) = D_{p,q}. \tag{IV.A.3.5}$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(O_{\operatorname{Sing}\Theta}) \longrightarrow H^0(O_{\operatorname{Sing}\Theta}(\Theta)) \xrightarrow{r} H^0(O_{D_{p,q}}(\Theta)),$$

qui montre que l'espace engendré par $\psi(W_{p,q}\cap\operatorname{Sing}\Theta) = \psi(D_{p,q})$ est l'hyperplan $H_{p,q}$, défini par la restriction $r(V)$. Cela termine la démonstration.

L'égalité IV.A.3.5 résulte des deux lemmes suivants et du fait que la classe de cohomologie de $\operatorname{Sing}\Theta$ est $\theta^4/12$ ([Gri-H], p. 358), donc que celle de $\psi^*(H_{p,q})$ est $\theta^5/12$. □

Lemme IV.A.3.6. *On a l'égalité ensembliste*

$$\phi^{-1}(H_{p,q}) = [W_{p,q} \cup (-W_{p,q})] \cap \operatorname{Sing}\Theta.$$

Démonstration. Soit d'abord $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}_2\Theta$. On a les bases

$$H^0(L) = \mathbf{C}s_{pq}s \oplus \mathbf{C}t, \qquad H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) = \mathbf{C}s' \oplus \mathbf{C}t'.$$

Alors $\phi(L) = (s_{pq}ss')(tt') - (s_{pq}st')(s't)$ correspond à une quadrique contenant la courbe canonique X et la corde $\langle pq\rangle$.

Réciproquement, soit $L \in \operatorname{Sing}_2\Theta$, et soient $\{s,t\}$ une base de $H^0(L)$ et $\{s',t'\}$ une base de $H^0(\omega_C\otimes L^{-1})$, choisies telles que $s(p) = s'(p) = 0$. Si $L \notin W_{p,q}$, on a aussi $t(p)s(q) \neq 0$. Si la quadrique $\phi(L) = [(st')(ts') - (ss')(tt')]$ contient $\langle pq\rangle$, on a

$$\begin{aligned}(st')(p)(ts')(q) + (st')(q)(ts')(p)\\ - (ss')(p)(tt')(q) - (ss')(q)(tt')(p) = 0,\end{aligned}$$

d'où $s'(q)t'(p) = 0$. Ainsi s' s'annule en p,q, ou p est un point base de $\omega_C\otimes L^{-1}$, ce qui donne $L \in (-W_{p,q})$. □

Lemme IV.A.3.7. *Sous les hypothèses de IV.A.3.4, $W_{p,q}\cap\operatorname{Sing}\Theta$ est de dimension pure $g-5$ et de classe de cohomologie $\theta^5/24$.*

Démonstration. Il découle de [Te] que, sous nos hypothèses, $\operatorname{Sing}\Theta$ est irréductible de dimension $g-4$. Si $\operatorname{Sing}\Theta \subset W_{p,q}$, on aurait

$$\forall r,s \in C, \qquad \operatorname{Sing}\Theta \subset \Theta_{p+q-r-s},$$

ce qui ne serait possible, d'après [We 2], que si

$$\exists x, y \in C, \qquad p+q-r-s \equiv x-y.$$

Il en résulterait $\dim W_3^1 \geq 1$, donc C hyperelliptique par [Ma].

On a donc $\dim(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) \leq g-5$. Grâce à la construction de [Ke-L], on voit que $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ est toujours de codimension ≤ 5 en tout point, donc de dimension pure $g-5$ dans notre situation. Sa classe de cohomologie w se calcule avec les notations de [Gri-H], page 352 :

$$\begin{aligned} w &= \alpha^*(\sigma_{3,2}) = \alpha^*(-\sigma_1\sigma_4 + \sigma_3\sigma_2) \\ &= -\theta\frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^3}{3!}\frac{\theta^2}{2!} = \frac{\theta^5}{24}. \end{aligned}$$

□

Proposition IV.A.3.8. *Soient C une courbe lisse de genre g, non hyperelliptique, non trigonale et non superelliptique, p,q,r,s quatre points distincts de C, et $a \in JC$ le point correspondant à $L_a = O_C(p+q-r-s)$. On a l'égalité de cycles*

$$\Theta_a \cdot \operatorname{Sing}\Theta = (W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) + ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta).$$

Démonstration. Soient u une section de $O_C(r+s)$ de diviseur $r+s$, et v une section de $O_C(p+q)$ de diviseur $p+q$. Le noyau du morphisme

$$H^0(L) \oplus H^0(L \otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(\cdot u, \cdot v)} H^0(L(r+s))$$

est isomorphe à $H^0(L(-p-q))$. On a donc

$$h^0(L(r+s)) + h^0(L(-p-q)) \geq h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}),$$

et, par Riemann–Roch, si $\deg L = g-1$,

$$h^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-r-s)) + h^0(L(-p-q)) \geq h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}) - 2.$$

On en déduit l'égalité de l'énoncé au point de vue ensembliste. L'égalité entre cycles découle alors de IV.A.3.7 et du fait que la classe de $\operatorname{Sing}\Theta$ est $\theta^4/12$. □

Lemme IV.A.3.9. *Soit C une courbe lisse générique de genre $g \geq 6$, et p,q deux points génériques de C. Alors $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing}\Theta$ est de dimension $\leq g-6$.*

Démonstration. Au vu de IV.A.3.2, il suffit de montrer qu'on ne peut avoir $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta \subset (-W_{p,q})$ pour p,q génériques. Sinon, pour p,q génériques, on aurait

$$\begin{aligned} \forall M \in W_{g-2}^1, \qquad M(p) &\in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta \\ &\Longrightarrow h^0(\omega_C \otimes M^{-1}(-2p-q)) \geq 1 \\ &\Longrightarrow h^0(\omega_C \otimes M^{-1}) \geq 4 \\ &\Longrightarrow h^0(M) \geq g-2+1-g+4 = 3. \end{aligned}$$

C'est impossible, puisque W_{g-2}^1 n'est pas contenu dans W_{g-2}^2 ; par IV.A.1, W_{g-2}^1 n'est pas vide pour $g \geq 6$. On a donc une contradiction. □

Proposition IV.A.3.10. *Soit C une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 6$. Alors, pour p, q, r, s génériques sur C, $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$ est irréductible de dimension $g-5$, de classe de cohomologie $6\theta^5/5!$. Son image par l'application de Gauss $\Theta \dashrightarrow \mathbf{P}T_0^*JC = |\omega_C|$ est $|\omega_C(-p-q-r-s)| \simeq \mathbf{P}^{g-5}$.*

Démonstration. Soit $\varphi : C^{(g-1)} \to \Theta$ l'application naturelle. Posons

$$Z = \{D \in C^{(g-3)} \mid \exists E \in |K_C - p - q - r - s|,\ E \geq D\}.$$

On a $W_{p,q} \cap (-W_{r,s}) = \varphi(Z_{p,q})$. Pour p, q, r, s génériques, $|H| = |K_C - p - q - r - s|$ est un g^{g-5}_{2g-6}, et Z est de dimension $g-5$ ([A-C-G-H 1], Lemma 3.2, p. 342), connexe pour $g \geq 6$ par [Fu-L]. Si $|H|$ avait un point base x pour tout $(p, q, r, s) \in C^4$, les $O(p+q+r+s+x)$ décriraient une sous-variété de dimension ≥ 3 de W^1_5, et C serait hyperelliptique par [Ma]. On peut donc supposer $|H|$ sans point base.

Il est classique ([A-C-G-H 1], p. 112, ou II.B.6) que Z est irréductible si $\varphi_{|H|} : C \to \mathbf{P}^{g-5}$ est birationnelle. Pour $g \geq 7$, cela découle du fait que l'application canonique est birationnelle et qu'une courbe non dégénérée dans $\mathbf{P}^r$, $r \geq 3$, possède au plus une famille de dimension 1 de trisécantes (exercice L.1, p. 152 de [A-C-G-H 1]) : la projection depuis un point générique de la courbe est donc birationnelle.

Pour $g = 6$, ce n'est jamais le cas et l'on adopte une autre approche. Comme Z est connexe, $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$ l'est aussi. Il suffit donc de montrer que cette intersection est lisse.

Soit $L \in W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. On a

$$\begin{aligned} H^0(L(-p-q)) &= \mathbf{C}u, \\ H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-r-s)) &= \mathbf{C}u', \\ H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(p+q)) &= \mathbf{C}u's_{pqrs} \oplus \mathbf{C}u'_1 \oplus \mathbf{C}u'_2, \\ H^0(L(r+s)) &= \mathbf{C}us_{pqrs} \oplus \mathbf{C}u_1 \oplus \mathbf{C}u_2. \end{aligned}$$

Donc, dans $T_LJC \simeq H^0(C, \omega_C)^*$,

$$\begin{aligned} T_L W_{p,q} &= \langle uu's_{pqrs}, uu'_1, uu'_2 \rangle^\perp, \\ T_L(-W_{r,s}) &= \langle uu's_{pqrs}, u'u_1, u'u_2 \rangle^\perp. \end{aligned}$$

Si l'intersection n'est pas lisse en L, on a une relation du type $uu'_1 = u'u_1$. Écrivons

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) = E + A, \quad \operatorname{div}(u') = E + B, \quad A \cap B = \emptyset, \\ \operatorname{div}(u_1) = F + C, \quad \operatorname{div}(u'_1) = F + D, \quad C \cap D = \emptyset. \end{aligned}$$

On a alors $A = C$ et $B = D$, de sorte que

$$\begin{cases} F \equiv p + q + r + s + E, \\ 2E + A + B \equiv K_C - p - q - r - s. \end{cases}$$

On ne peut avoir $F \geq p + q + r + s$, donc $h^0(F) \geq 2$.

Si $\deg E = 1$, F est un g^1_5. On a alors $\dim W^1_5 \geq 3$, donc C est hyperelliptique [Ma].

Si $\deg E \geq 2$, $2E + A + B + s$ correspond à une bitangente à la courbe $\varphi_{|K_C - p - q - r|}(C) \subset \mathbf{P}^2$, ou à une droite passant par un point de multiplicité ≥ 4. Comme une courbe de $\mathbf{P}^2$ n'a qu'un nombre fini de bitangentes, c'est la deuxième possibilité qui est génériquement vérifiée, c'est-à-dire $h^0(K_C - p - q - r - 2E) \geq 2$. Ceci contredit $\dim W^1_3 \leq 0$. On a montré que $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$ est lisse connexe, donc irréductible.

L'application de Gauss induit sur Z l'application rationnelle

$$\begin{aligned} &Z \dashrightarrow |\omega_C|, \\ &D \longmapsto (D+p+q)+(D'+r+s), \end{aligned} \qquad D' \in |\omega_C(-p-q-r-s-D)|,$$

dont l'image est $|H| \subset |\omega_C|$.

Enfin, pour calculer la classe de cohomologie, on applique les résultats de [M] ou de [A-C-G-H 1], chapitre VIII. Avec leurs notations,

$$\begin{aligned} [Z_{p,q}] &= \eta^2[t^2]((1+\eta t)^{-1}e^{t\varphi^*\theta}) \\ &= \eta^2\left(\eta^2 - \eta\varphi^*\theta + \tfrac{1}{2}\varphi^*\theta^2\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [W_{p,q} \cap (-W_{r,s})] &= \varphi_*\left(\eta^4 - \eta^3\varphi^*\theta + \tfrac{1}{2}\eta^2\varphi^*\theta^2\right) \\ &= \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^4}{4!}\theta + \frac{1}{2\cdot 3!}\theta^3\theta^2 = 6\frac{\theta^5}{5!}. \end{aligned}$$

□

IV.A.4 Singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym généralisée

Dans [Be 1], §3, Beauville a étendu au cas des courbes singulières les résultats de Mumford sur les singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym associée à un revêtement double étale de courbes lisses. Il ne considère cependant que les revêtements satisfaisant à la propriété $(*)$ de [Be 1], page 157, c'est-à-dire sans composantes échangées par l'involution.

Nous montrons ici qu'on peut étendre ces résultats au cas général des revêtements satisfaisant à la condition $(**)$ ci-dessous, qui donnent toutes les variétés de Prym généralisées.

Soit $\widetilde{C}$ une courbe connexe de genre $2g+1$, à singularités au plus nodales, munie d'une involution σ, et C la courbe quotient. On suppose :

$$\begin{gathered} \sigma \text{ n'est l'identité sur aucune composante de } \widetilde{C}; \\ \text{les points fixes de } \sigma \text{ sont des nœuds de } \widetilde{C}, \\ \text{sans échange des branches;} \\ \text{le nombre de composantes échangées par } \sigma \\ \text{égale le nombre de nœuds échangés par } \sigma. \end{gathered} \qquad (**)$$

Par Lemma 5.1 de [Be 1], C est de genre $g+1$, et $P^0 = (\ker \mathrm{Nm})^0 \subset J\widetilde{C}$ est une variété abélienne de dimension g.

Proposition IV.A.4.1. *Soit M un faisceau inversible sur $\widetilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$. Alors la fonction $L \mapsto h^0(L \otimes M) \bmod 2$ est constante sur P^0. Il existe un tel M avec $h^0(M) = 0$.*

Démonstration. La démonstration de la première assertion est identique à celle de Proposition 3.4 de [Be 1]. Montrons l'existence de M. Pour tout multidegré $\mathbf{d}$ sur C, il existe un multidegré $\widetilde{\mathbf{d}}$ sur $\widetilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}(\mathrm{Pic}^{\widetilde{\mathbf{d}}}(\widetilde{C})) \subset \mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}(C)$. Comme $\mathrm{Nm} : J\widetilde{C} \to JC$ est surjective, il existe un faisceau inversible M sur $\widetilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$.

Si $H^0(\widetilde{C}, M) \neq 0$, on montre comme dans Step II, Lemma 3.2 de [Mu 3], qu'il existe x lisse sur $\widetilde{C}$ tel que

$$h^0(\widetilde{C}, M \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{C}}(x - \sigma x)) = h^0(\widetilde{C}, M) - 1.$$

On peut donc trouver M tel que $\mathrm{Nm}\, M = \omega_C$ et $H^0(\widetilde{C}, M) = 0$. □

Il peut arriver qu'aucun M vérifiant ces deux propriétés ne soit de la forme $\pi^* L_0$ (voir l'exemple du paragraphe 6 et comparer avec Proposition 3.10 de [Be 1]).

Fixons désormais un tel M, et définissons $\mathrm{Pic}^M(\widetilde{C})$ comme le translaté de $J\widetilde{C}$ par M : c'est la composante connexe de $\mathrm{Pic}(\widetilde{C})$ formée des faisceaux inversibles de même multidegré que M. On définit aussi P comme la composante connexe de $\{L \in \mathrm{Pic}^M(\widetilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C\}$ contenant M, et

$$\widetilde{\Theta} = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\widetilde{C}) \mid h^0(L) \geq 1\}.$$

Alors $\widetilde{\Theta}$ est un diviseur de $\mathrm{Pic}^M(\widetilde{C})$ (Proposition 2.2 de [Be 1]).

Proposition IV.A.4.2. *On a*

$$P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\widetilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C,\ h^0(L)\ \textit{pair}\},$$

et $\widetilde{\Theta}|_P = 2\Xi$, *avec* $\Xi = \{L \in P \mid h^0(L) \geq 2\}$.

Démonstration. L'inclusion directe du premier point résulte de IV.A.4.1. D'après la démonstration de 5.4 de [Be 1], on est dans l'une des situations suivantes :

— $\widetilde{C} = A \cup \sigma A$ avec $\#(A \cap \sigma A) = 2$. Alors $\mathrm{Nm} : J\widetilde{C} \to JC$ a un noyau connexe P^0, et $P = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\widetilde{C}) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_C\}$.

— Une composante de $\widetilde{C}$ est invariante par σ, et $\ker \mathrm{Nm}$ a deux composantes connexes P^0 et P^1. Après translation par M, ce sont les deux composantes de la fibre de norme ω_C. Si L appartient à la première, et si x est lisse sur $\widetilde{C}$ et situé sur une composante invariante, on a

$$h^0(L \otimes O_{\widetilde{C}}(x - \sigma x)) = h^0(L) \pm 1.$$

Le faisceau tordu appartient donc à la seconde composante, où h^0 est impair. Ceci montre le premier point.

La démonstration du second point est identique à celle de 3.10 de [Be 1]. □

Les singularités de Ξ sont de deux types : soit $h^0(L) \geq 4$; soit $h^0(L) = 2$ et, pour toute base $\{s, t\}$ de $H^0(L)$,

$$\sigma^* s \otimes t = s \otimes \sigma^* t \quad \text{dans } H^0(\widetilde{C}, L \otimes \sigma^* L) = H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}).$$

Les premières sont dites stables, les secondes exceptionnelles. Étudions le comportement des premières dans une famille de revêtements doubles.

IV.A.4.3. Soit $\widetilde{\mathcal{C}} \to T$ une courbe stable de genre $2g+1$, munie d'une involution σ satisfaisant sur les fibres à $(**)$. On supposera $\widetilde{\mathcal{C}}$ lisse et T un polydisque ; on s'autorisera à réduire T sans toujours le mentionner.

Notons $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}/\sigma$. C'est un espace analytique normal. Par Theorem 3.1 de [Gro 2], les espaces de Picard $\mathrm{Pic}(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$ et $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}/T)$ existent. Ce sont des espaces analytiques sur T, en général non séparés, de fibres respectives $\mathrm{Pic}(\widetilde{C}_t)$ et $\mathrm{Pic}(C_t)$. On a un morphisme norme $\mathrm{Nm} : \mathrm{Pic}(\widetilde{\mathcal{C}}/T) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{C}/T)$.

On utilisera aussi le sous-espace analytique $\mathrm{Pic}^0(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$ de $\mathrm{Pic}(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$, de fibre $\mathrm{Pic}^0(\widetilde{C}_t)$ en t, qui est quasi-projectif sur T ([De], Proposition 4.3).

Lemme IV.A.4.4. *Il existe un faisceau inversible M sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ tel que*

$$\mathrm{Nm}\, M = \omega_{\mathcal{C}/T}, \qquad H^0(\widetilde{C}_t, M_t) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in T.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ un diviseur de Cartier effectif sur $\mathcal{C}$ tel que $O_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \omega_{\mathcal{C}/T}$, dont la restriction à C_0 est somme de $2g$ points distincts lisses sur C_0. Quitte à réduire T, on peut considérer $\mathcal{D}$ comme somme de $2g$ sections de $\mathcal{C} \to T$, qu'on remonte en des sections de $\widetilde{\mathcal{C}} \to T$. On obtient ainsi un diviseur de Cartier effectif $\widetilde{\mathcal{D}}$ sur $\widetilde{\mathcal{C}}$, et $M = O(\widetilde{\mathcal{D}})$ satisfait à la première condition.

Comme dans la preuve de IV.A.4.1, il existe des points $x_1^0, \dots, x_m^0$ lisses de $\widetilde{C}_0$ tels que

$$H^0\left(\widetilde{C}_0, M_0\Big(\sum_{i=1}^m (x_i^0 - \sigma x_i^0)\Big)\right) = 0.$$

Choisissons des sections locales $x_1, \dots, x_m$ de $\widetilde{\mathcal{C}} \to T$ prenant ces valeurs en 0. Si X_i sont leurs images, le faisceau $M \otimes O(\sum_{i=1}^m (X_i - \sigma X_i))$ satisfait aux deux conditions, quitte à réduire T. □

Fixons un tel M et définissons $\mathrm{Pic}^M(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$ comme le translaté de $\mathrm{Pic}^0(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$ par M. On lui associe la variété de Prym relative

$$\mathcal{P} = \{L \in \mathrm{Pic}^M(\widetilde{\mathcal{C}}/T) \mid \mathrm{Nm}\, L = \omega_{\mathcal{C}/T}\}^M,$$

dont la fibre en t est $\{L_t \in \mathrm{Pic}^{M_t}(\widetilde{C}_t) \mid \mathrm{Nm}\, L_t = \omega_{C_t},\ h^0(\widetilde{C}_t, L_t) \text{ pair}\}$; l'exposant M désigne la composante contenant M. En suivant la construction déterminantielle usuelle ([Kl-L]), on peut définir un sous-espace analytique $\mathcal{W}_M^r$ de $\mathrm{Pic}^M(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\{L_t \in \mathrm{Pic}^{M_t}(\widetilde{C}_t) \mid h^0(\widetilde{C}_t, L_t) \geq r+1\}.$$

On pose alors $\Xi = \mathcal{P} \cdot \mathcal{W}_M^1$ et $S = \mathcal{P} \cdot \mathcal{W}_M^3$, de sorte que, pour $t \in T$, (P_t, Ξ_t) est la variété de Prym associée au revêtement $\widetilde{C}_t \to C_t$, et S_t est l'ensemble des singularités stables de Ξ_t.

Proposition IV.A.4.5. *Le sous-espace S de $\mathcal{P}$ est vide ou de codimension partout inférieure ou égale à 6.*

Démonstration. On fait la construction de [Mu 3], généralisée dans Theorem 1.1 de [Be 1], et on applique la remarque (1.6) de [H] (cf. la démonstration de IV.A.5.5). □

Il est montré en II.D.1.2.5 que, lorsque $g \geq 6$, S_t n'est jamais vide si C_t est lisse. Il est facile d'en déduire que, dans la situation ci-dessus, S n'est jamais vide dès que $g \geq 6$.

IV.A.5 Les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour une variété de Prym

À beaucoup de titres, les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ pour les variétés de Prym jouent un rôle analogue aux intersections $\Theta \cdot \Theta_{p-q}$ pour les jacobiennes (cf. IV.B). On étudie ici les premières, et plus particulièrement leur lieu singulier et son comportement en famille.

Théorème IV.A.5.1. *Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement double étale de courbes lisses connexes, et σ l'involution associée. On suppose C non hyperelliptique et non trigonale, de genre $g+1$, et on note (P, Ξ) la variété de Prym associée à π dans $\mathrm{Pic}^{2g}\widetilde{C}$. On prend deux points $r, s \in \widetilde{C}$ avec $s \neq \sigma r$, et on note $a \in \mathrm{Pic}^0\widetilde{C}$ l'élément correspondant au faisceau inversible $L_a = O_{\widetilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$. Alors l'intersection $\Xi \cdot \Xi_a$ est réduite et*

$$\Xi \cdot \Xi_a = \{L \in P \mid h^0(\widetilde{C}, L(-r-s)) \geq 1\},$$
$$\mathrm{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a) \supseteq \{L \in P \mid h^0(\widetilde{C}, L(-r-s)) \geq 2\},$$

avec égalité dans la seconde formule pour C générique et r, s génériques sur $\widetilde{C}$.

Démonstration. On commence par le lemme suivant.

Lemme IV.A.5.2. *Si $L \in P$, on a*

$$h^0(L(-r-s)) \geq \tfrac{1}{2}[h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1})] - 1.$$

Démonstration. Soit t une section de $O(r+s)$ de diviseur $r+s$. Le noyau du morphisme

$$H^0(L) \oplus H^0(L \otimes L_a^{-1}) \xrightarrow{(\sigma^* t, -t)} H^0(L(\sigma r + \sigma s))$$

est isomorphe à $H^0(L(-r-s))$. On a donc

$$\begin{aligned} h^0(L) + h^0(L \otimes L_a^{-1}) - h^0(L(-r-s)) \\ &\leq h^0(L(\sigma r + \sigma s)) = h^0(\sigma^* L(r+s)) \\ &= h^0(\omega_{\widetilde{C}} \otimes (\sigma^* L)^{-1}(-r-s)) + 2 \\ &= h^0(L(-r-s)) + 2, \end{aligned}$$

par Riemann–Roch et l'isomorphisme $L \otimes \sigma^* L \simeq \omega_{\widetilde{C}}$. □

On en déduit l'égalité ensembliste

$$\Xi \cap \Xi_a = \{L \in P \mid h^0(L(-r-s)) \geq 1\}. \tag{IV.A.5.3}$$

Comme C est non hyperelliptique et non trigonale, le système linéaire $|H| = |\omega_C(-\pi r - \pi s)|$ est un g^{g-2}_{2g-2} sans point base. On lui associe, en suivant [Be 3], la sous-variété réduite $S = (\pi^{(2g-2)})^{-1}(|H|)$ de $\widetilde{C}^{(2g-2)}$.

L'image de $S + r + s \subset \widetilde{C}^{(2g)}$ dans $\mathrm{Pic}^{2g}\,\widetilde{C}$ a alors deux composantes connexes, dont une seule V est contenue dans P et n'est autre que $\Xi \cap \Xi_a$ par IV.A.5.3. Le théorème 1 de [Be 3] montre que la classe de V dans $H^4(P, \mathbf{Q})$ est $[\Xi]^2$, donc que l'intersection $\Xi \cdot \Xi_a$ est réduite.

Soit $L \in P$ tel que $h^0(L(-r-s)) \geq 2$. Montrons que L est singulier sur $\Xi \cdot \Xi_a$. Si $h^0(L) \geq 4$ ou $h^0(L \otimes L_a^{-1}) \geq 4$, alors L est singulier sur Ξ ou sur Ξ_a, donc sur $\Xi \cdot \Xi_a$. Si $h^0(L) = h^0(L \otimes L_a^{-1}) = 2$, prenons une base $\{u, v\}$ de $H^0(L(-r-s))$. On a alors, en notant s_{rs} la section de diviseur $r+s$,

$$\begin{aligned} H^0(L) &= \mathbf{C} u s_{rs} \oplus \mathbf{C} v s_{rs}, \\ H^0(L \otimes L_a^{-1}) &= \mathbf{C} u \sigma^* s_{rs} \oplus \mathbf{C} v \sigma^* s_{rs}. \end{aligned}$$

Par [Mu 2], §6, l'hyperplan $T_L\Xi$ de $T_L P \simeq H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}})^{*,-}$ correspond à

$$[u s_{rs}\, \sigma^* v\, \sigma^* s_{rs} - \sigma^* u\, \sigma^* s_{rs}\, v s_{rs}],$$

et $T_L\Xi_a$ à

$$[u \sigma^* s_{rs}\, \sigma^* v\, s_{rs} - \sigma^* u\, s_{rs}\, v \sigma^* s_{rs}].$$

Ces hyperplans sont donc égaux et L est singulier sur $\Xi \cdot \Xi_a$.

Supposons maintenant C générique et r, s génériques sur $\widetilde{C}$. Rappelons ([Be 3], §1) qu'on a un morphisme surjectif

$$f : S_0 \subset \widetilde{C}^{(2g-2)} \longrightarrow \Xi \cap \Xi_a, \qquad D \longmapsto O_{\widetilde{C}}(D + r + s).$$

La fibre au-dessus de L est isomorphe à $|L(-r-s)|$. Il suffit donc de montrer que S_0 est lisse, c'est-à-dire, par Proposition 3 de [Be 3], que, pour tout diviseur effectif A sur C,

$$h^0(H - 2A) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad h^0(H - A) = h^0(H) - \deg A.$$

Par Riemann–Roch, avec $r' = \pi(r)$ et $s' = \pi(s)$, cela s'écrit

$$h^0(A + r' + s') \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad h^0(K_C - 2A - r' - s') = 0.$$

Cette propriété est une conséquence de la proposition IV.A.3.1. □

Les points $L \in P$ tels que $h^0(\widetilde{C}, L(-r-s)) \geq 2$ seront dits singularités stables de $\Xi \cdot \Xi_a$.

Cette définition est justifiée par l'analogie de leurs propriétés avec celles des singularités stables du diviseur Ξ, définies au paragraphe IV.A.4. En particulier, on montrera qu'elles existent toujours pour $g \geq 5$ (cf. IV.A.6.9), et que leur ensemble est partout de dimension au moins $g - 5$ (cf. IV.A.5.5).

IV.A.5.4. Étudions maintenant le comportement de ces singularités en famille. Reprenons les hypothèses et notations de IV.A.4.3, avec une famille de revêtements doubles $\widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}/\sigma \to T$. On a aussi choisi un faisceau inversible M sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ satisfaisant à $\operatorname{Nm} M = \omega_{\mathcal{C}/T}$ et $H^0(\widetilde{C}_t, M_t) = 0$ pour tout t.

Prenons deux sections disjointes r, s et définissons le sous-espace analytique $S^{r,s}$ de $\mathcal{P}$ suivant la procédure de [Kl-L]. À l'aide du faisceau de Poincaré sur $\widetilde{\mathcal{C}} \times_T \operatorname{Pic}^M(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$, on construit deux faisceaux localement libres E, F sur $\operatorname{Pic}^M(\widetilde{\mathcal{C}}/T)$, de rangs respectifs $m, m+2$, ainsi qu'un morphisme $f : E \to F$ tel qu'ensemblistement

$$\{L_t \mid \operatorname{rk} f_{L_t} \leq m - 2\} = \{L_t \mid h^0(\widetilde{C}_t, L_t(-r(t) - s(t))) \geq 2\}.$$

L'espace $S^{r,s}$ est alors défini comme la variété déterminantielle

$$S^{r,s} = Z\left(\bigwedge^{m-1} f \Big|_{\mathcal{D}} \right).$$

Lorsque C_t est lisse, $S_t^{r,s}$ est donc l'ensemble des singularités stables de $\Xi_t \cdot \Xi_{t,a(t)}$, où $a(t) = r(t) + s(t) - \sigma r(t) - \sigma s(t)$.

Proposition IV.A.5.5. *Le sous-espace $S^{r,s}$ de $\mathcal{P}$ est vide ou de codimension partout inférieure ou égale à 5.*

Démonstration. Prenons $N + 1$ sections $x_0, \dots, x_N$ de $\widetilde{\mathcal{C}} \to T$ de façon que

$$r, s, \sigma x_0, \dots, \sigma x_N \quad \text{soient disjointes deux à deux,} \tag{IV.A.5.6}$$

et que, pour tout t,

$$\text{toutes les composantes du multidegré de } M_t\Big(r(t) + s(t) - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\Big) \text{ soient négatives.} \tag{IV.A.5.7}$$

On prend les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} \times_T \widetilde{\mathcal{C}} & & & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \searrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & & \\ \mathcal{P} \times_T \mathcal{C} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{P} & \xrightarrow{p} & T. \end{array}$$

On désignera encore par $r, s, x_0, \dots, x_N$ les sections de $\tilde{f}$ induites par les sections précédentes, et par $R, S, X_0, \dots, X_N$ leurs images dans $\mathcal{P} \times_T \widetilde{C}$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de Poincaré sur $\mathcal{P} \times_T \widetilde{C}$, satisfaisant à $\mathcal{F}|_{\{L_t\}\times\widetilde{C}_t} \simeq L_t$ pour $L_t \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{F}|_{X_0} \simeq O_{X_0}$.

Le faisceau $E = \pi_* \mathcal{F}$ est localement libre de rang 2 sur $\mathcal{P} \times_T C$. Il est muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans $\omega_{\mathcal{P}\times_T C/\mathcal{P}}$; cela se montre comme dans la proposition 3.4 de [Be 1]. En suivant [Mu 3], on introduit

$$\begin{aligned} A &= \pi_*\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big), && \text{diviseur de Cartier sur } \mathcal{P} \times_T C, \\ V &= f_*(E(A)/E(-A)), \\ W_1 &= f_*E(A), \qquad W_2 = f_*(E/E(-A)), && \text{sous-faisceaux de } V. \end{aligned}$$

Par IV.A.5.7, pour tout $L_t \in \mathcal{P}$,

$$H^0(C_t, E_{L_t}(-A_t)) \simeq H^0(\widetilde{C}_t, L_t(-\pi^* A_t)) = 0.$$

On en conclut, comme dans [Mu 3], que W_1, W_2, V sont localement libres de rangs respectifs $2N, 2N, 4N$. Il existe une forme quadratique non dégénérée sur V pour laquelle W_1, W_2 sont totalement isotropes. On a aussi

$$W_{1,L_t} \cap W_{2,L_t} \simeq H^0(\widetilde{C}_t, L_t) \qquad (L_t \in \mathcal{P}).$$

On aura aussi besoin de

$$W_0 = f_*(\pi_*(\mathcal{F}(-R-S)) \otimes O(A)) \subset W_1.$$

Ce faisceau est localement libre de rang $2N-2$ (appliquer IV.A.5.7), et

$$\begin{aligned} W_{0,L_t} &\simeq H^0(C_t, \pi_*(L_t(-r_t - s_t)) \otimes O(A_t)) \\ &\simeq H^0(\widetilde{C}_t, L_t(-r_t - s_t + \pi^* A_t)). \end{aligned}$$

On a le diagramme commutatif suivant, analogue à celui de [Mu 3], p. 183. Pour l'alléger, posons $\widetilde{C} = \widetilde{C}_t$, $L = L_t$, $r = r_t$, $s = s_t$ et $B = \pi^* A_t$:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(L(-r-s)) & \longrightarrow & H^0(L) = (W_1 \cap W_2)_{L_t} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(L(-r-s+B)) & \longrightarrow & H^0(L(B)) = W_{1,L_t} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^0(L(-r-s+B)|_B) & = & H^0(L(B)|_B). \end{array}$$

Il prouve que $(W_0 \cap W_2)_{L_t} \simeq H^0(\widetilde{C}_t, L_t(-r_t - s_t))$. Ensemblistement, on a donc

$$S^{r,s} = \{L \in \mathcal{P} \mid \dim(W_{0,L} \cap W_{2,L}) \geq 2\}.$$

Pour montrer la proposition, il suffit d'appliquer le lemme suivant.

Lemme IV.A.5.8. *Soient P une variété irréductible, $E \to P$ un fibré vectoriel de rang $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, et W^n, W^k des sous-fibrés isotropes pour Q, de rangs respectifs n et $k < n$. Alors le lieu*

$$\{x \in P \mid \dim(W_x^n \cap W_x^k) \geq r\}$$

est vide ou de codimension au plus $\frac{r(r-1)}{2} + r(n-k)$ en tout point.

Démonstration. Comme dans [H], 1.6, il suffit de montrer le fait suivant. Soient V un espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, Λ_0 un sous-espace isotrope de dimension n, et Σ^k la sous-variété irréductible de $\mathrm{Gr}(k, V)$ formée des sous-espaces isotropes ([Gri-H], p. 739). Alors

$$\Sigma^k(\Lambda_0) = \{\Lambda^k \in \Sigma^k \mid \dim(\Lambda^k \cap \Lambda_0) \geq r\}$$

est fermée irréductible de codimension $\frac{r(r-1)}{2} + r(n-k)$.

Comme dans [H], 1.5, introduisons

$$\Gamma = \{(\Lambda^k, \Delta) \in \Sigma^k \times \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0) \mid \Delta \subset \Lambda^k\}.$$

Par [Gri-H], p. 739, la fibre de $\mathrm{pr}_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0)$ est irréductible de dimension

$$(k-r)(2n-2r-k+r) - \frac{(k-r)(k-r+1)}{2}.$$

La projection $\mathrm{pr}_1 : \Gamma \to \Sigma^k$ est birationnelle sur son image $\Sigma^k(\Lambda_0)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{codim}_{\Sigma^k} \Sigma^k(\Lambda_0) &= \mathrm{codim}_{\Sigma^k}(\text{fibre de } \mathrm{pr}_2) - \dim \mathrm{Gr}(r, \Lambda_0) \\
&= k(2n-k) - \frac{k(k+1)}{2} \\
&\quad - (k-r)(2n-2r-k+r) + \frac{(k-r)(k-r+1)}{2} - r(n-r) \\
&= 2nr - r^2 - kr + \frac{r(r-1)}{2} - nr + r^2 \\
&= r(n-k) + \frac{r(r-1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Appliquons ce lemme à $n = 2N$, $k = 2N-2$ et $r = 2$. La codimension de $S^{r,s}$ est donc au plus $1 + 4 = 5$. □

IV.A.6 L'exemple fondamental

Appliquons maintenant les résultats des paragraphes IV.A.4 et IV.A.5 à la situation suivante. Soit Δ le disque unité de $\mathbf{C}$. Considérons une famille $\tilde{f} : (\widetilde{C}, \sigma) \to \Delta$ telle que :

— $\widetilde{C}$ est une surface lisse ;

— C_0 est obtenue à partir d'une courbe générique N de genre $g \geq 6$ en identifiant deux points génériques p, q de N ;

— pour $t \neq 0$, C_t est une courbe lisse irréductible générale de genre $g+1$;

— $\pi_0 : \widetilde{C}_0 \to C_0$ est le revêtement de Wirtinger de C_0 : la courbe $\widetilde{C}_0$ est obtenue à partir de l'union disjointe $N_1 \sqcup N_2$, où $N_1 = N_2 = N$, en identifiant p (resp. q) sur N_1 à q (resp. p) sur N_2.

Si L_0 est un faisceau inversible de degré g sur C_0 tel que $L_0^{\otimes 2} \simeq \omega_{C_0}$, il ressort de [H], Theorem 2.14, que $\pi_0^* L_0$ est de multidegré (g,g) et que

$$h^0(\pi_0^* L_0) = 2h^0(L_0) \pm 1 \quad \text{est impair.}$$

En utilisant ensuite Lemma 2.1(iii) de [Be 1], on conclut que tout faisceau M sur $\widetilde{C}$ satisfaisant aux conclusions de IV.A.4.4, à savoir

$$\operatorname{Nm} M = \omega_{C/\Delta}, \qquad h^0(\widetilde{C}_t, M_t) = 0,$$

est de multidegré $(g-1,g+1)$ ou $(g+1,g-1)$ sur $\widetilde{C}_0$. On passe d'un cas à l'autre en remplaçant M par $\sigma^* M$.

Le choix de M définit donc une famille de variétés de Prym $\mathcal{P}$. Si, par exemple, $\deg M_0 = (g-1,g+1)$, on a $P_0 \subset \operatorname{Pic}^{(g-1,g+1)} \widetilde{C}_0$. On sait d'autre part ([Be 1], Theorem 5.4) que $P_0 \simeq JN$. Voici comment le voir. Soient n la normalisation de $\widetilde{C}_0$ et pr_1 la projection $J(N_1 \sqcup N_2) \to JN_1 \xrightarrow{\sim} JN$. Alors

$$\operatorname{pr}_1 n^* : P_0 \longrightarrow J^{g-1}N$$

est un isomorphisme qui envoie

$$\Xi_0 = \{L \in P_0 \mid h^0(L) \geq 2\} \quad \text{sur} \quad \Theta = \{L \in J^{g-1}N \mid h^0(L) \geq 1\}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{L} \in P_0$. L'égalité $\mathcal{L} \otimes \sigma^* \mathcal{L} = \omega_{\widetilde{C}_0}$ donne

$$n^* \mathcal{L} = (L, \omega_N(p+q) \otimes L^{-1}), \qquad L \in J^{g-1}N.$$

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \xrightarrow{n^*} H^0(L) \oplus H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) \longrightarrow \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}.$$

Si $L \notin \Theta$, on a $H^0(L) = H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0$ et

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{L}) &\simeq \{u \in H^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) \mid u(p) = u(q) = 0\} \\ &\simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}) = 0, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L} \notin \Xi_0$. Ainsi $\operatorname{pr}_1 n^*(\Xi_0) \subset \Theta$; comme Θ est irréductible, on a égalité. □

Déterminons maintenant quels points de $\operatorname{Sing} \Theta$ correspondent à des singularités stables au sens des variétés de Prym. Adoptons les notations du paragraphe IV.A.3 :

$$W = W^0_{g-3} \subset J^{g-3}N, \qquad W_{p,q} = W + p + q \subset J^{g-1}N.$$

Lemme IV.A.6.1. *Les singularités stables de Ξ_0 sont les points de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$.*

Démonstration. Gardons les notations ci-dessus. Si $h^0(\mathcal{L}) \geq 4$, alors $\mathcal{L}$ est singulier sur Ξ_0, donc L est singulier sur Θ et $h^0(L) \geq 2$. Si $L \notin W_{p,q}$, alors $h^0(L(-p-q)) = 0$, $h^0(\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}) = 2$ et $h^0(L) = 2$. Toutes les sections de $\omega_N(p+q) \otimes L^{-1}$ sont donc nulles en p, q, et

$$H^0(\mathcal{L}) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$$

est de dimension 2, contradiction. Donc $L \in W_{p,q}$.

Réciproquement, si $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$, prenons $s \in H^0(L(-p-q))$ non nul et $\bar{s}, \bar{t} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$ linéairement indépendants. Alors

$$n^* H^0(\mathcal{L}) \supset \langle (ss_{pq}, 0), (0, \bar{s}s_{pq}), (0, \bar{t}s_{pq}) \rangle,$$

où s_{pq} est une section de diviseur $p+q$. Ainsi $h^0(\mathcal{L}) \geq 3$; cette dimension étant paire, elle est au moins 4. □

Remarque IV.A.6.2. On a introduit en IV.A.4.3 le fermé suivant de $\mathcal{P}$:

$$S = \bigcup_{t\in\Delta} \{\text{singularités stables de } \Xi_t\}.$$

Les singularités de Ξ étant toutes stables pour un revêtement générique, on a $S_t = \operatorname{Sing}\Xi_t$ pour $t \neq 0$. Il résulte de [We 4] que

$$\lim_{t\to 0} S_t \subset W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing}\Theta,$$

qui est de dimension au plus $g-6$ par IV.A.3.9. On en déduit que S est réductible, de codimension partout 6 dans $\mathcal{P}$. Une de ses composantes est $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$, au-dessus de 0 ; les autres dominent Δ.

Considérons maintenant deux sections disjointes r, s de $\widetilde{\mathcal{C}} \to \Delta$, choisies génériquement. Quitte à les remplacer par leurs images par σ, on peut supposer que $r_0, s_0 \in N_2 \setminus N_1$; leurs images dans N sont choisies générales, distinctes de p, q.

Le faisceau inversible $O_{\widetilde{\mathcal{C}}}(r+s-\sigma r-\sigma s+N_2)$ est de multidegré nul sur chaque fibre. Il correspond à une section a de $\mathcal{P}^0 \to \Delta$ telle que, pour $t \neq 0$, a_t correspond à $O_{\widetilde{C}_t}(r_t+s_t-\sigma r_t-\sigma s_t)$ et a_0 correspond, dans JN, à

$$\operatorname{pr}_1 n^* O_{\widetilde{C}_0}(r_0+s_0-\sigma r_0-\sigma s_0+N_2) = O_N(-r_0-s_0+p+q).$$

Introduisons, comme en IV.A.5.4, le sous-espace fermé $S^{r,s}$ de $\mathcal{P}$, dont l'ensemble sous-jacent est

$$\{L_t \in \mathcal{P} \mid h^0(\widetilde{C}_t, L_t(-r_t-s_t)) \geq 2\}.$$

Par le théorème IV.A.5.1, pour $t \neq 0$,

$$S^{r,s}_t = \operatorname{Sing}(\Xi_t \cdot \Xi_{t,a_t}).$$

Au-dessus de 0, on a le résultat suivant, en omettant les indices 0 dans r_0, s_0, a_0.

Proposition IV.A.6.3. *Pour $g \geq 6$, l'espace analytique $S^{r,s}_0$ est de dimension pure $g-5$ et a trois composantes irréductibles :*

$$W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta, \qquad (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a, \qquad W_{p,q} \cap (-W_{r,s}).$$

Il est lisse en tout point de $(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) \setminus (-W_{r,s})$.

Démonstration. On sait déjà (IV.A.6.1) que les points de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ correspondent à des faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur $\widetilde{C}_0$ avec $h^0(\mathcal{L}) \geq 4$, donc à des éléments de $S^{r,s}_0$.

Les points de $-(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) + a = (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$ correspondent à des faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur $\widetilde{C}_0$ avec $h^0(\mathcal{L}(\sigma r+\sigma s-r-s)) \geq 4$, donc aussi à des éléments de $S^{r,s}_0$.

Si $L \in W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$, on peut prendre $u \in H^0(L(-p-q))$ et $\bar{u} \in H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s))$ non nuls. Avec les notations précédentes,

$$n^* H^0(\mathcal{L}(-r-s)) \supset \langle (us_{pq}, 0), (0, \bar{u}s_{pqrs}) \rangle,$$

et L est bien un point de $S^{r,s}_0$.

Réciproquement, si $\mathcal{L}$ correspond à un point de $S^{r,s}_0$, distinguons deux cas.

(i) Si $h^0(L) \geq 2$ ou $h^0(L(-p-q+r+s)) \geq 2$, on est dans $\Theta_a \cap \operatorname{Sing}\Theta$ ou $\Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$. Si, par exemple, $L \in \Theta_a \cap \operatorname{Sing}\Theta$, la proposition IV.A.3.8 donne

$$L \in ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta) \cup (W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta).$$

Si L appartient à la première composante mais pas à la seconde, on a

$$\begin{aligned} h^0(L) &= 2, & h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)) &= 1, \\ h^0(L(-p-q)) &= 0, & h^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit

$$n^*H^0(\mathcal{L}(-r-s)) \simeq H^0(L(-p-q)) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)),$$

ce qui est impossible, l'espace de droite étant de dimension 1. Ainsi $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$. De même, si $L \in \Theta \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$, alors $L \in (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a$.

(ii) Si $h^0(L) = h^0(L(-p-q+r+s)) = 1$, alors

$$n^*H^0(\mathcal{L}(-r-s)) \simeq H^0(L) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)),$$

ce qui n'est possible que si

$$\begin{aligned} H^0(L) &\simeq H^0(L(-p-q)), \\ H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) &\simeq H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(-r-s)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $L \in W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$.

Calculons maintenant l'espace tangent à $S_0^{r,s}$ en $\mathcal{L}$. La construction de $S^{r,s}$ commute aux changements de base. En particulier, la fibre $S_0^{r,s}$ est l'espace associé à la famille $\widetilde{C}_0 \to \{0\}$ et aux sections r, s, c'est-à-dire $P_0 \cdot (W^1_{(g-1,g-1)})_{r,s}$.

Lorsque $h^0(\widetilde{C}_0, \mathcal{L}(-r-s)) = 2$, prenons une base $\{u_1, u_2\}$ de $H^0(\mathcal{L}(-r-s))$ et une base

$$\{\bar{u}_1 = \sigma^*u_1 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_2 = \sigma^*u_2 s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$$

de $H^0(\omega_{\widetilde{C}_0} \otimes \mathcal{L}^{-1}(r+s))$. Alors $T_{\mathcal{L}}S_0^{r,s}$ est l'orthogonal des huit éléments

$$\{u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j)\}_{1\leq i\leq 2,\, 1\leq j\leq 4}$$

de l'espace des sections de $\omega_{\widetilde{C}_0}$ anti-invariantes par σ^*, qui est $T^*_{\mathcal{L}}P_0$. La forme particulière de $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ réduit ces huit éléments aux cinq suivants :

$$\{(u_1\sigma^*u_2 - u_2\sigma^*u_1)s_{rs}\sigma^*s_{rs}, \quad u_i\bar{u}_j - \sigma^*(u_i\bar{u}_j)\ (1 \leq i \leq 2 < j \leq 4)\}.$$

Calculons cet espace tangent lorsque $\mathcal{L}$ correspond à un point $L \in W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$ avec $L \notin (-W_{r,s})$, pour montrer qu'il est de dimension $g-5$. On a alors

$$h^0(L) \geq 2, \qquad h^0(L(-p-q)) \geq 1, \qquad h^0(L(r+s)) = 2.$$

On en déduit facilement

$$\begin{aligned} h^0(L) &= h^0(L(r+s)) = 2, \\ h^0(L(-p-q)) &= h^0(L(r+s-p-q)) = 1. \end{aligned}$$

On a les suites exactes

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}(-r-s)) \xrightarrow{n^*} H^0(L) \oplus H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s)) \longrightarrow \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_2,$$
$$0 \longrightarrow H^0(\omega_{\widetilde{C}_0} \otimes \mathcal{L}^{-1}(r+s)) \xrightarrow{n^*} H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q)) \oplus H^0(L(r+s)) \longrightarrow \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_2.$$

Prenons les bases suivantes :

base	espace
$\{u_1 = us_{pq}, u_2\}$	$H^0(L)$
$\{\bar{u}\}$	$H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q-r-s))$
$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$	$H^0(\omega_N \otimes L^{-1})$
$\{\bar{u}_1 s_{pq}, \bar{u}_2 s_{pq}, \bar{u} s_{rs}\}$	$H^0(\omega_N \otimes L^{-1}(p+q))$
$\{us_{pqrs}, u_2 s_{rs}\}$	$H^0(L(r+s))$.

Comme $\bar{u}$ n'est pas nulle en p, q, le couple $(0, \bar{u})$ n'est pas dans $n^*H^0(\mathcal{L}(-r-s))$, qui est donc de dimension au plus 2, et en fait exactement 2 par ce qui précède. On peut choisir u_2 de façon qu'une base en soit

$$\{(us_{pq}, 0), (u_2, \bar{u})\}.$$

Une base de $n^*H^0(\omega_{\widetilde{C}_0} \otimes \mathcal{L}^{-1}(r+s))$ est alors

$$\{(0, us_{pqrs}), (\bar{u}s_{rs}, u_2 s_{rs}), (\bar{u}_1 s_{pq}, 0), (\bar{u}_2 s_{pq}, 0)\}.$$

L'espace tangent $T_{\mathcal{L}} S_0^{r,s}$ est l'orthogonal, dans $T_{\mathcal{L}} P_0 \simeq T_L JN \simeq H^0(N, \omega_N)^*$, de

$$\{u\bar{u}s_{rs}, u\bar{u}_1 s_{pq}, u\bar{u}_2 s_{pq}, u_2\bar{u}_1, u_2\bar{u}_2\}.$$

En comparant avec les calculs de la démonstration de IV.A.3.2, avec $t = \bar{u}s_{rs}$, $s_D = u$, $t_i = \bar{u}_i$ et $s_i = u_i$, on voit que

$$T_{\mathcal{L}} S_0^{r,s} \simeq T_L(W_{p,q} \cdot \operatorname{Sing} \Theta).$$

La fin de cette démonstration montre alors que cet espace tangent est de dimension $g-5$, ce qui termine la preuve. □

Remarque IV.A.6.4. On peut montrer par la même méthode que $S_0^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap (-W_{r,s})$. En particulier, par IV.A.3.2 et IV.A.3.10, sa classe de cohomologie, donc aussi celle de $S_t^{r,s}$ pour tout t, est, grâce à IV.A.3.7 et IV.A.3.10,

$$\frac{\theta^5}{24} + \frac{\theta^5}{24} + \frac{\theta^5}{20} = \frac{2}{15}\theta^5.$$

On peut maintenant montrer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème IV.A.6.5. *Pour $g \geq 6$, le sous-espace analytique $S^{r,s}$ de $\mathcal{P}$ est irréductible, de codimension 5, et domine Δ.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toute composante irréductible T de $S^{r,s}$ vérifie, quitte à réduire Δ :

(i) T est de codimension 5 et domine Δ ;

(ii) $T_0 \supset W_{p,q} \cap \operatorname{Sing} \Theta$.

En effet, IV.A.6.3 montre que $S^{r,s}$ est lisse en un point générique de $W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta$, donc qu'une seule composante irréductible de $S^{r,s}$ contient ce lieu. Le théorème découle alors immédiatement de (i) et (ii).

Par IV.A.5.5, $S^{r,s}$ est vide ou partout de codimension au plus 5 dans $\mathcal{P}$. Comme sa fibre en 0 est de codimension partout 5 dans P_0 (IV.A.6.3), on en déduit (i).

On peut supposer que, pour tout t dans un sous-ensemble dense Ω de Δ, P_t est simple et $a_t = r_t + s_t - \sigma r_t - \sigma s_t$ n'est pas d'ordre fini dans P_t. On déduit alors de IV.B.2.1 que

$$\dim(T_t \cap \operatorname{Sing}\Xi_t) \geq g-6 \qquad (t \in \Omega).$$

IV.A.6.6. Remarquons que ceci redémontre le théorème II.D.1.2.5 : $\dim \operatorname{Sing}\Xi \geq g-6$ pour toute variété de Prym (P,Ξ).

On sait par [We 1] que $\operatorname{Sing}\Xi_t = S_t$ est de dimension pure $g-6$. Ainsi T_t contient une composante de $\operatorname{Sing}\Xi_t$ pour $t \in \Omega$. On sait aussi ([We 4], 3.4) que la limite de S_t lorsque $t \to 0$ est contenue dans $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing}\Theta$, de dimension au plus $g-6$ par IV.A.3.9. Donc T_0 contient une composante de dimension $g-6$ de ce dernier lieu. Or IV.A.6.3 montre que les composantes de T_0 sont parmi

$$W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta, \qquad (-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a, \qquad W_{p,q} \cap (-W_{r,s}).$$

L'assertion (ii) résulte alors du lemme suivant.

Lemme IV.A.6.7. *Fixons p,q. Pour r,s génériques, aucune composante de dimension $g-6$ de $W_{p,q} \cap (-W_{p,q}) \cap \operatorname{Sing}\Theta$ n'est contenue dans $-W_{r,s}$.*

Démonstration. Il revient au même de montrer qu'aucune composante Z n'est contenue dans $W_{r,s}$. Si Z était contenue dans tous les $W_{r,s}$, on aurait $Z \subset W^2_{g-1}$, ce qui est impossible puisque $\dim Z = g-6$ et $\dim W^2_{g-1} = g-9$ (cf. IV.A.1). □

Ce lemme donne (ii), ce qui termine la démonstration du théorème IV.A.6.5. □

On en déduit aussi le résultat annexe suivant.

Corollaire IV.A.6.8. *Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement double étale de courbes lisses connexes, où C est générique de genre $g+1 \geq 7$. Soient r,s deux points génériques de $\widetilde{C}$ et a l'élément de la variété de Prym (P,Ξ) de π associé à $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$. Alors $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$ est irréductible de dimension $g-5$, de classe de cohomologie $\frac{2}{15}[\Xi]^5$.*

Remarque IV.A.6.9. Lorsque $g=5$, on montre comme ci-dessus que $\operatorname{Sing}(\Xi \cdot \Xi_a)$ n'est jamais vide et est génériquement un ensemble de $\frac{2}{15}5! = 16$ points.

IV.A.7 Le théorème principal

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant.

Théorème IV.A.7.1. *Pour tout $g \geq 7$, le lieu des variétés de Prym $\mathcal{P}_g$ est une composante irréductible de N^g_{g-6}.*

Démonstration. Montrons que, pour $g \geq 6$, $\mathcal{P}_{g+1}$ est une composante de N^{g+1}_{g-5}. Rappelons d'abord que $\mathcal{P}_{g+1} \subset N^{g+1}_{g-5}$ pour $g \geq 5$ (IV.A.6.6 ou II.D.1.2.5).

Considérons la frontière $\partial\mathcal{P}_{g+1} \subset \partial\mathcal{A}_{g+1}$ de $\mathcal{P}_{g+1}$ dans la compactification partielle $\mathcal{A}_{g+1}^{(1)}$ de $\mathcal{A}_{g+1}$ (cf. IV.A.2.4). Elle est de dimension pure $3g+2$ et $\rho_{g+1}(\partial\mathcal{P}_{g+1}) = \mathcal{P}_g$ ([Fr-S 2], Theorem 3.6). Il résulte aussi de IV.A.2.5 que

$$\mathcal{P}_{g+1} \subset N_{g-5}^{g+1} \quad \Longrightarrow \quad \partial\mathcal{P}_{g+1} \subset \partial N_{g-5}^{g+1} \subset \rho_{g+1}^{-1}(N_{g-5}^g) \cup \partial' N_{g-5}^{g+1}.$$

Considérons la famille $f : \mathcal{D} \to \Delta$ étudiée au paragraphe IV.A.6, munie de la section $a : t \mapsto O(r(t) + s(t) - \sigma r(t) - \sigma s(t))$ sur les fibres lisses, prolongée comme ci-dessus. Par [Fr-S 2], Theorem 5.2, la famille de variétés quasi-abéliennes associée est la famille de Prym associée aux revêtements doubles

$$\widetilde{C}/(r \sim \sigma s,\ s \sim \sigma r) \longrightarrow C/(\pi r \sim \pi s) \longrightarrow \Delta.$$

On lui associe donc un morphisme $\varphi : \Delta \to \partial\mathcal{P}_{g+1}$.

Soient $\mathcal{C}_{g+1}$ une composante irréductible de N_{g-5}^{g+1} contenant $\mathcal{P}_{g+1}$ et $\partial\mathcal{C}_{g+1}$ sa frontière. Soient $\partial\mathcal{P}_{g+1}^*$ une composante irréductible de $\partial\mathcal{P}_{g+1}$ contenant $\varphi(\Delta)$ et $\partial\mathcal{C}_{g+1}^*$ une composante irréductible de $\partial\mathcal{C}_{g+1}$ contenant $\partial\mathcal{P}_{g+1}^*$. On a

$$\varphi(\Delta) \subset \partial\mathcal{P}_{g+1}^* \subset \partial\mathcal{C}_{g+1}^* \subset \rho_{g+1}^{-1}(N_{g-5}^g) \cup \partial' N_{g-5}^{g+1},$$
$$\varphi(\Delta) \not\subset \rho_{g+1}^{-1}(N_{g-5}^g) \quad \text{par IV.A.6.2, par exemple.}$$

Il en résulte $\partial\mathcal{C}_{g+1}^* \subset \partial' N_{g-5}^{g+1}$. Appliquons maintenant IV.A.2.6 à la famille $\mathcal{D} \to \Delta$ munie de la section a. L'hypothèse (i) est vérifiée par IV.A.6.8 avec $\mathcal{T}^0 = S^{r,s}$, et (iii) grâce au fait qu'une jacobienne générique a pour seuls automorphismes $\pm\mathrm{id}$.

Si (ii) n'était pas vérifiée, il existerait, pour $t \neq 0$, une composante Z_t de $\operatorname{Sing}\Xi_t$ telle que $Z_{t,a_t} \subset \operatorname{Sing}\Xi_t$. Comme en IV.A.6.5, on peut supposer P_t simple pour t dans un sous-ensemble dense de Δ. L'ensemble des x_t tels que

$$\dim(\operatorname{Sing}\Xi_t \cap (\operatorname{Sing}\Xi_t)_{x_t}) = g-6$$

est alors fini. Pour un choix générique de r, s, (ii) est donc vérifiée.

Il s'ensuit que la dimension de $\partial\mathcal{C}_{g+1}^*$ en $\varphi(0)$ est inférieure ou égale à la codimension de l'espace projectif engendré par l'image de

$$(W_{p,q} \cap \operatorname{Sing}\Theta) \cup ((-W_{r,s}) \cap \operatorname{Sing}\Theta_a) \cup (W_{p,q} \cap (-W_{r,s}))$$

par l'application rationnelle

$$z \longmapsto \left[\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau)\right)_{1\le i\le g}, \left(\lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i\partial z_j}(z,\tau) + \mu\frac{\partial^2\theta}{\partial z_i\partial z_j}(z-a,\tau)\right)_{1\le i\le j\le g}\right],$$

où

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z,\tau) + \mu\frac{\partial\theta}{\partial z_i}(z-a,\tau) = 0 \quad (1 \le i \le g),$$

et a correspond à $O(p+q-r-s) \in JN$.

Par IV.A.3.4, l'image de la première composante, pour laquelle génériquement $\mu = 0$, engendre $\mathbf{P}(\{0\} \times V)$, avec

$$\dim V = \binom{g+1}{2} - (3g-2).$$

L'image de la seconde composante est la même. Par IV.A.3.10, l'image de la troisième engendre $\mathbf{P}(V')$, où la projection de V' sur les g premiers facteurs est de dimension $g-4$. On a donc

$$\dim \partial C_{g+1}^* \leq 4 + 3g - 2 = 3g + 2.$$

Comme ∂C_{g+1} est de dimension pure $\dim C_{g+1} - 1$, on en déduit

$$3g + 3 = \dim \mathcal{D}_{g+1} \leq \dim C_{g+1} \leq 3g + 2 + 1,$$

soit $\mathcal{D}_{g+1} = C_{g+1}$. □

IV.B Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym

En collaboration avec A. Beauville.

Soient $\mathcal{A}_g$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, et $\mathcal{J}_g$ la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée par les jacobiennes. Le problème de Schottky usuel est la recherche d'équations, ou de caractérisations géométriques, de $\mathcal{J}_g$ dans $\mathcal{A}_g$. Une des approches de ce problème qui s'est révélée récemment très fructueuse s'appuie sur la réductibilité de certaines intersections $\Theta \cap \Theta_a$ pour une jacobienne (JC, Θ). Cette réductibilité entraîne l'existence de trisécantes à la variété de Kummer de JC. En II.C, nous avons prouvé que $\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante de l'ensemble des $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ pour lesquelles une intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible, ou de celles dont la variété de Kummer admet une trisécante. La démonstration consiste à prouver que ces propriétés entraînent essentiellement $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$; il suffit ensuite d'utiliser le théorème d'Andreotti–Mayer [An–M] selon lequel $\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante de l'ensemble N_{g-4}^g des (A, Θ) satisfaisant à cette dernière condition.

Les variétés de Prym forment une sous-variété fermée $\mathcal{D}_g$ de $\mathcal{A}_g$, qui contient strictement $\overline{\mathcal{J}}_g$ dans les dimensions considérées ici. Nous abordons dans cette section la recherche d'une caractérisation géométrique de $\mathcal{D}_g$, ce qu'on peut appeler le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Il se trouve qu'il existe un parallélisme très frappant entre les deux problèmes de Schottky, au moins dans l'approche évoquée ci-dessus. Nous démontrons en effet que, pour $g \geq 7$, $\mathcal{D}_g$ est une composante irréductible de l'ensemble des $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

(i) Il existe des éléments distincts non nuls $a, b \in A$ tels que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre.

(ii) Il existe a, b, x, y distincts non nuls dans A tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer $K(A)$ admet un plan quadrisécant.

La démonstration est tout à fait analogue à celle de II.C et repose de façon essentielle sur le théorème de IV.A, qui énonce que $\mathcal{D}_g$ est une composante de l'ensemble d'Andreotti–Mayer N_{g-6}^g. Nous donnons le principe de cette démonstration, ainsi que les relations entre les conditions (i) à (iii), au §1 ; deux résultats techniques, sur lesquels s'appuie la démonstration, sont prouvés aux §2 et 3.

IV.B.1 Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ et plans quadrisécants

Toutes les variétés considérées dans cette section sont définies sur le corps des nombres complexes.

Soient $\widetilde{C}, C$ des courbes projectives lisses, $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ un revêtement étale double, σ l'involution correspondante de $\widetilde{C}$. Rappelons que la variété de Prym P de $(\widetilde{C}, C)$ est la sous-variété abélienne de $J\widetilde{C}$ image de l'endomorphisme $1 - \sigma^*$. Elle est munie d'une polarisation principale, que l'on peut définir comme suit. Il est commode, à l'aide d'une translation, de considérer P comme la variété des classes de diviseurs (modulo équivalence linéaire) D sur $\widetilde{C}$ satisfaisant à $\pi_* D \equiv K_C$ et $h^0(\widetilde{C}, D)$ pair ; la sous-variété des classes de diviseurs effectifs est alors un diviseur Θ de P.

Nous allons étudier la réductibilité des intersections $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, considérées dans toute cette section au sens des schémas. Nous écarterons les cas où des intersections $\Theta \cap \Theta_a$ sont déjà réductibles. Pour $p, q \in \widetilde{C}$, nous noterons $[p, q]$ l'élément $p + q - \sigma p - \sigma q$ de P.

Proposition IV.B.1.1. *On suppose que C n'est ni hyperelliptique, ni trigonale, ni revêtement double d'une courbe elliptique. Soient p, q, r, s quatre points de $\widetilde{C}$ tels que les éléments $[p, q]$ et $[p, r]$ de P soient distincts non nuls. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est de codimension 3, réductible et contenue schématiquement dans $\Theta_{[p,s]} \cup \Theta_{[q,r]}$.*

Démonstration. Par définition, $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est l'ensemble des classes de diviseurs effectifs D sur $\widetilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C, \qquad h^0(D) \text{ pair} \geq 2, \qquad h^0(D - p - q + \sigma p + \sigma q) \geq 2.$$

Jointe aux deux premières, cette dernière condition équivaut à $h^0(D - p - q) \geq 1$. En effet, si $h^0(D - p - q)$ est nul, le théorème de Riemann–Roch, joint à la relation $K_{\widetilde{C}} - D \equiv \sigma D$, entraîne $h^0(D + \sigma p + \sigma q) = 2$; alors σp et σq sont des points base de $|D + \sigma p + \sigma q|$, de sorte que

$$|D - p - q + \sigma p + \sigma q| = |D - p - q| + \sigma p + \sigma q = \emptyset.$$

Inversement, si $h^0(D - p - q) \geq 1$, alors $h^0(D - p - q + \sigma p + \sigma q)$ est pair et non nul, donc ≥ 2.

Considérons alors la sous-variété spéciale S_{pq} formée des classes de diviseurs effectifs E sur $\widetilde{C}$ tels qu'on ait $\pi_* E \in |K_C - \pi p - \pi q|$ et $h^0(E + p + q)$ pair [Be 3] ; identifions S_{pq} à une sous-variété de P à l'aide de la translation par $(p + q)$. Il résulte de ce qui précède qu'on a ensemblistement $S_{pq} = \Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; cette égalité est en fait schématique puisque S_{pq} et $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ ont même classe de cohomologie dans P ([Be 3], théorème 1). Vu l'hypothèse sur C, le système $|K_C - \pi p - \pi q|$ définit un morphisme de C dans l'espace projectif, birationnel sur son image. On déduit alors du corollaire à la proposition 3 de [Be 3] que la variété $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est irréductible et normale.

L'intersection $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est donc un diviseur de Cartier dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; ensemblistement, elle est formée des classes de diviseurs effectifs D sur $\widetilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C, \quad h^0(D) \text{ pair}, \quad h^0(D - p - q) \geq 1, \quad h^0(D - p - r) \geq 1.$$

Elle est donc réunion de la sous-variété S_{pqr} formée des classes $D \in P$ telles que $h^0(D - p - q - r) \geq 1$, et de la sous-variété W_p des classes $D \in P$ telles que $h^0(D - p) \geq 2$. La première s'identifie comme ci-dessus à la sous-variété spéciale de P associée au système linéaire $|K_C - \pi p - \pi q - \pi r|$; elle est réduite, irréductible pour r assez général, et sa classe de cohomologie dans P est $4\Theta^3/6$. On en conclut que W_p est un diviseur de Weil réduit dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ et qu'on a l'égalité entre cycles

$$\Theta \cdot \Theta_{[p,q]} \cdot \Theta_{[p,r]} = S_{pqr} + \widetilde{W}_p,$$

où $\widetilde{W}_p$ est un diviseur de Weil dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ ayant même support que W_p. Faisant varier r, on obtient $\widetilde{W}_p \subset \Theta_{[p,s]}$ pour tout $s \in \widetilde{C}$, tandis qu'on a $S_{pqr} \subset \Theta_{[q,r]}$, d'où la proposition. □

Remarque. On peut montrer, par un calcul d'espaces tangents, que $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est lisse en un point assez général de W_p. On a donc $\widetilde{W}_p = W_p$ dans la démonstration précédente, et la classe de W_p dans P est $2\Theta^3/6$.

Nous allons voir que 1.1 équivaut essentiellement à l'existence de plans quadrisécants à la variété de Kummer d'une variété de Prym. Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée ; sauf mention du contraire, nous supposerons toujours que le diviseur Θ est symétrique. Nous noterons $\psi\colon A \to \mathbf{P}^N$ le morphisme défini par le système linéaire $|2\Theta|$, et $K(A)$ son image : c'est la variété de Kummer de A. Rappelons que lorsque (A, Θ) est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles, ψ identifie $K(A)$ au quotient de A par l'involution $x \mapsto -x$.

Proposition IV.B.1.2. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension ≥ 3, et soient a, b, x, y des éléments distincts non nuls de A. On suppose que $s = x + y$ est différent de $a, b, a + b$ et que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3. On considère les conditions suivantes :*

(i) L'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas intègre.

(ii) On a schématiquement $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) Il existe des nombres complexes λ, μ, ν, ρ, non tous nuls, tels qu'on ait l'identité en z

$$\lambda\theta(z)\theta(z-s) + \mu\theta(z-a)\theta(z+a-s) + \nu\theta(z-b)\theta(z+b-s) + \rho\theta(z-x)\theta(z-y) = 0.$$

(iv) Pour tout $\zeta \in A$ tel que $2\zeta = s$, les quatre points distincts $\psi(\zeta)$, $\psi(\zeta - a)$, $\psi(\zeta - b)$, $\psi(\zeta - x)$ de $\mathbf{P}^N$ sont coplanaires.

Alors les conditions (ii) à (iv) sont équivalentes et entraînent (i).

Démonstration. Pour $u \in A$, nous noterons θ_u une section non nulle de $H^0(A, O_A(\Theta_u))$.

(iii) $\iff$ *(iv)*. Il existe une base (ψ_α) de $H^0(A, O_A(2\Theta))$ satisfaisant à

$$\theta_u\theta_{-u} = \sum_\alpha \psi_\alpha(u)\psi_\alpha \qquad (u \in A)$$

(formule d'addition de Riemann). On en déduit aussitôt que la formule (iii)', obtenue en remplaçant z par $z + \zeta$ dans (iii), est équivalente à (iv).

(iii) $\Longrightarrow$ *(ii)*. Le scalaire ρ qui apparaît dans (iii) ne peut être nul, sans quoi $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ aurait une composante de codimension 2. La formule (iii) entraîne donc que la section $\theta_x\theta_y$ de $O_A(\Theta_x + \Theta_y)$ s'annule sur $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, d'où (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*. Notons $\mathcal{I}$ l'idéal de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ dans A. Le complexe de Koszul de l'intersection complète $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ fournit, après produit tensoriel par $O_A(\Theta_x + \Theta_y)$, une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow O_A(-\Theta_{a+b-s}) \\ &\longrightarrow O_A(\Theta_s - \Theta_a) \oplus O_A(\Theta_s - \Theta_b) \oplus O_A(\Theta_s - \Theta_{a+b}) \\ &\longrightarrow O_A(\Theta_s) \oplus O_A(\Theta_{s-a}) \oplus O_A(\Theta_{s-b}) \\ &\xrightarrow{(\theta,\theta_a,\theta_b)} \mathcal{I}(\Theta_x + \Theta_y) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse sur s, on en déduit que $H^0(A, \mathcal{I}(\Theta_x + \Theta_y))$ est engendré par les sections $\theta\theta_s$, $\theta_a\theta_{s-a}$ et $\theta_b\theta_{s-b}$. Or (ii) signifie que $\theta_x\theta_y$ appartient à cet espace, ce qui entraîne (iii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $u \in A$; la suite exacte de Koszul, après produit tensoriel par $\mathcal{O}_A(\Theta_u)$, s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta - \Theta_{a+b-u}) \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta_{a-u}) \oplus \mathcal{O}_A(-\Theta_{b-u}) \oplus \mathcal{O}_A(-\Theta_{a+b-u}) \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta_a) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta_b) \\ &\longrightarrow \mathcal{I}(\Theta_u) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour $u \notin \{0, a, b\}$, on en déduit que $H^0(A, \mathcal{I}(\Theta_u))$ est nul, autrement dit que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas contenu dans Θ_u. La condition (ii), sans hypothèse sur s, entraîne donc (i). □

Remarques. 1) L'hypothèse $\operatorname{codim}(\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b) = 3$ n'est pas superflue. Supposons en effet que A contienne une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$. On déduit alors facilement de II.C.1.4 que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, pour a, b distincts non nuls dans E, est intègre de codimension 2 et contenue dans Θ_x pour tout $x \in E$. Pour y général dans A, on a donc $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$, mais (iii) n'est pas satisfaite. Notons cependant que $\psi(E)$ est une conique dans $\mathbf{P}^N$, de sorte que quatre points quelconques de $\psi(E)$ sont coplanaires.

2) Par contre, l'hypothèse $s \notin \{a, b, a+b\}$ n'est là que pour simplifier l'énoncé de (iii) et (iv). Si par exemple $s = a$, il faut énoncer (iv) de la façon suivante : il existe une droite tangente à $K(A)$ en $\psi(\zeta)$, coplanaire avec $\psi(\zeta - b)$ et $\psi(\zeta - x)$.

Plus généralement, on peut envisager, comme dans II.C, les diverses spécialisations des conditions (ii) à (iv) lorsque certains des points a, b, x, y deviennent infiniment voisins de 0 ; nous laissons cet exercice assez fastidieux au lecteur. Dans le cas des jacobiennes, on peut ainsi faire tendre a, x, y vers 0 dans la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$ de manière à obtenir l'équation KP. Pour une variété de Prym de courbes lisses, on ne peut faire tendre simultanément les points $[p, q]$, $[p, r]$, $[p, s]$ et $[q, r]$ vers 0 ; cela devient possible lorsque la courbe C est singulière, et on obtient alors une équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation BKP. [1]

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal. On note $\mathcal{P}_g$ la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée des variétés de Prym de courbes stables : c'est l'adhérence dans $\mathcal{A}_g$ de l'ensemble des variétés de Prym de courbes lisses. Elle est de dimension $3g$ pour $g \geq 5$ et contient l'ensemble $\mathcal{J}_g$ des jacobiennes.

Théorème IV.B.1.3. *Considérons les conditions suivantes pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) :*

(i) Il existe des éléments distincts non nuls $a, b \in A$ tels que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre.

(ii) Il existe des éléments distincts non nuls $a, b, x, y \in A$ tels qu'on ait schématiquement $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer $K(A)$ admet un plan quadrisécant.

Alors, pour $g \geq 7$, $\mathcal{P}_g$ est une composante irréductible de l'ensemble des $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ satisfaisant à l'une des conditions (i) à (iii).

Remarques. 1) Nous appelons plan quadrisécant à $K(A)$ un plan dans $\mathbf{P}^N$ contenant quatre points distincts de $K(A)$.

2) Contrairement à ce qu'on peut espérer pour les jacobiennes, l'existence d'un plan quadrisécant ne suffit pas à caractériser les variétés de Prym, comme le montre l'exemple des

1. Cette remarque est due à A. Beauville et G. Welters.

variétés (A, Θ) contenant une courbe elliptique de degré 2.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, on suppose qu'il existe une sous-variété irréductible Z de $\mathcal{A}_g$, contenant strictement $\mathcal{D}_g$, telle qu'un élément générique (A, Θ) de Z satisfasse à l'une des propriétés (i) à (iii). Puisque Z contient strictement $\mathcal{D}_g$, le théorème principal de IV.A entraîne $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g - 6$. En outre, le groupe de Néron–Severi $\mathrm{NS}(A)$ est engendré par la classe de Θ, puisqu'une jacobienne générique possède déjà cette propriété [Z]. Alors, pour tout élément non nul $a \in A$, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est intègre : sinon, en vertu de II.C.2.1, on aurait ou bien $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$, ou bien $\operatorname{rk} \mathrm{NS}(A) \geq 2$. Par suite, $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3 pour tout $b \neq 0, a$. D'après la proposition 1.2, il existe donc a, b distincts non nuls dans A tels que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre. Le théorème résulte alors des deux énoncés suivants, qui seront démontrés aux §2 et 3 :

Proposition IV.B.2.3. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g \geq 6$. On suppose que $\mathrm{NS}(A)$ est engendré par la classe de Θ et que $\dim \operatorname{Sing} \Theta < g - 6$. Soient a, b deux éléments distincts non nuls de A, dont l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

Proposition IV.B.3.3. *Soient (P, Θ) une variété de Prym générique de dimension ≥ 5, et a, b des éléments de torsion distincts non nuls de P. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

□

IV.B.2 Singularités de $\Theta \cap \Theta_a$

Proposition IV.B.2.1. *Soient (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée et $a \in A$. On suppose que A est simple et que a est d'ordre infini. On a alors*

$$\dim(\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geq \dim \operatorname{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) - 1.$$

Rappelons qu'une variété abélienne est dite simple si elle ne contient pas de sous-variété abélienne non triviale. D'autre part, nous avons adopté la convention $\dim \emptyset = -1$.

Démonstration. Soit Z une composante irréductible de $\operatorname{Sing}(\Theta \cap \Theta_a)$ de dimension maximum. Notons $\widetilde{Z}$ la normalisée de Z et n le morphisme composé $\widetilde{Z} \to Z \hookrightarrow A$.

Soit θ (respectivement θ_a) une section non nulle de $H^0(A, \mathcal{O}_A(\Theta))$ (respectivement $H^0(A, \mathcal{O}_A(\Theta_a))$). À tout champ de vecteurs D sur A sont associées des sections $D\theta \in H^0(\Theta, \mathcal{O}(\Theta))$ et $D\theta_a \in H^0(\Theta_a, \mathcal{O}(\Theta_a))$ (cf. II.C.0). Comme Z est contenu dans le lieu singulier de $\Theta \cap \Theta_a$, le critère jacobien entraîne que les $D\theta_a/D\theta$, pour $D \in H^0(A, T_A)$, définissent une même section méromorphe de $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$. Cette section est holomorphe et non nulle sur l'ouvert U de $\widetilde{Z}$ complémentaire de $n^{-1}(\operatorname{Sing} \Theta \cup \operatorname{Sing} \Theta_a)$; le faisceau inversible $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$ est donc trivial sur U.

Supposons que la conclusion de la proposition ne soit pas satisfaite, ce qui entraîne en particulier $\dim Z \geq 1$. Alors $\Theta_a \cap \operatorname{Sing} \Theta$ et, par symétrie, $\Theta \cap \operatorname{Sing} \Theta_a$ sont de codimension ≥ 2 dans Z ; par suite, $\widetilde{Z} \setminus U$ est de codimension ≥ 2 dans $\widetilde{Z}$. Comme $\widetilde{Z}$ est normal, on en déduit que $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a - \Theta)$ est trivial, autrement dit que a appartient au noyau de l'homomorphisme composé

$$A \xrightarrow{\phi} \operatorname{Pic}^0(A) \xrightarrow{n^*} \operatorname{Pic}^0(\widetilde{Z}),$$

où ϕ est l'isomorphisme associé à la polarisation principale, défini par $\phi(x) = O_A(\Theta_x - \Theta)$. Or n^* n'est pas nul : son transposé est le morphisme d'Albanese $\mathrm{Alb}(\widetilde{Z}) \to A$, dont l'image contient un translaté de Z. Puisque A est simple, le noyau de n^* est fini, ce qui contredit l'hypothèse sur a. □

Remarques. 1) La démonstration s'étend, avec quelques modifications, au cas où a est infiniment proche de 0 : si D est un champ de vecteurs non nul sur A et si l'on désigne par Θ_D le diviseur de Θ défini par $D\theta = 0$, on obtient l'inégalité

$$\dim(\Theta_D \cap \mathrm{Sing}\,\Theta) \geq \dim \mathrm{Sing}\,\Theta_D - 1$$

lorsque A est simple. 2) On ne peut supprimer complètement l'hypothèse que A est simple. Si par exemple A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$, le diviseur Θ est lisse en général alors que $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible, donc singulier en codimension un pour $a \in E \setminus \{0\}$ (II.C). Par contre, nous ignorons si l'hypothèse que a est d'ordre infini est nécessaire. Ce sont ces hypothèses restrictives dans la proposition 2.1 qui nous empêchent d'obtenir un résultat aussi précis que celui de II.C.

3) On peut déduire de 2.1 un énoncé légèrement plus fort que le théorème II.C.2.11 : $\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante irréductible de l'ensemble des $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ telles qu'il existe $a \neq 0$ dans A avec $\dim \mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) \geq g - 3$.

Proposition IV.B.2.3. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On suppose que $\mathrm{NS}(A)$ est engendré par la classe de Θ et que $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta < g - 6$. Soient a, b deux éléments distincts non nuls de A, dont l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

Démonstration. On peut supposer a d'ordre infini. Puisque l'hypothèse sur $\mathrm{NS}(A)$ entraîne que A est simple, on déduit de 2.1 qu'on a $\dim \mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) \leq g - 6$. La variété $X = \Theta \cap \Theta_a$ est donc normale, irréductible, et ses anneaux locaux sont factoriels (« conjecture de Samuel », [Gro 3], exposé XI, 3.14). Si le diviseur $\Theta_b|_X$ n'est pas intègre, il est donc somme de deux diviseurs de Cartier effectifs non nuls. Or, puisque $g \geq 5$, le théorème de Lefschetz ([Gro 3], exposé XII, 3.6) implique que l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Pic}(X)$ est bijectif. Il existe donc deux diviseurs sur A, de somme Θ_b, dont la restriction à X est effective. Mais, vu l'hypothèse sur $\mathrm{NS}(A)$, l'un de ces diviseurs doit être algébriquement équivalent à $m\Theta$, avec $m \leq 0$, ce qui conduit à une contradiction. □

IV.B.3 Le cas où a et b sont de torsion

Lemme IV.B.3.1. *Soient g_1, g_2 deux entiers ≥ 1 ; posons $g = g_1 + g_2 \geq 3$. Soit P une variété de Prym générique de dimension g, et soient a, b deux éléments de torsion distincts non nuls dans P. On peut alors spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$, où P_i est une variété de Prym générique de dimension g_i $(i = 1, 2)$, de façon que a, b se spécialisent en (a_1, a_2), (b_1, b_2), où les points a_1, b_1 d'une part et a_2, b_2 d'autre part sont distincts et non nuls.*

Démonstration. On sait par [Be 1] qu'on peut spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; les points a et b se spécialisent alors en (a_1, a_2) et (b_1, b_2), et il s'agit de prouver qu'on peut effectuer cette spécialisation de façon que les points $0, a_i, b_i$ soient distincts $(i = 1, 2)$. Soit $m \geq 2$ un entier tel que $ma = mb = 0$. Le groupe $P[m]$ des points de P annulés par m est muni d'une forme symplectique unimodulaire à valeurs

dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Considérons le revêtement étale de $\mathcal{P}_g$ dont la fibre en P est $P[m]$. L'homomorphisme $\pi_1(\mathcal{P}_g, P) \to \mathrm{Sp}(P[m])$ associé à ce revêtement est surjectif : cela résulte de l'énoncé analogue pour les jacobiennes, qui est lui-même conséquence de la connexité de l'espace de Teichmüller. Par suite, pour tout automorphisme symplectique γ de $(P_1 \times P_2)[m]$, le couple $(\gamma(a_1, a_2), \gamma(b_1, b_2))$ s'obtient encore par spécialisation à partir de (a, b). Le lemme 3.1 résulte donc du lemme algébrique suivant. □

Lemme IV.B.3.2. *Soient $p, q > 1$ deux entiers et m leur plus petit commun multiple. Soient Γ_1, Γ_2 deux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules libres de rangs pairs $2g_1, 2g_2 \geq 2$, avec $g_1 + g_2 \geq 3$, munis de formes symplectiques unimodulaires $\varphi_i \colon \bigwedge^2 \Gamma_i \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Posons $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ et $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$. Soient a, b deux éléments distincts de Γ, d'ordres respectifs p, q. Il existe alors $\gamma \in \mathrm{Sp}(\Gamma)$ tel que $\gamma a = (a_1, a_2)$, $\gamma b = (b_1, b_2)$, avec $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ et $a_i \neq b_i$ pour $i = 1, 2$.*

Démonstration. On utilise la décomposition chinoise $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \prod_{\ell^e \| m} \mathbb{Z}/\ell^e\mathbb{Z}$. Fixons un facteur $R = \mathbb{Z}/\ell^e\mathbb{Z}$. Pour chacun des éléments non nuls parmi les composantes de $a, b, a-b$ dans $\Gamma \otimes R$, écrivons $v = \ell^{\nu(v)} v_0$, où v_0 est primitif, et notons $\overline{v}_0$ sa réduction non nulle dans le $\mathbb{F}_\ell$-espace symplectique $V = \Gamma/\ell\Gamma$. Cette réduction est bien définie.

Les trois vecteurs ainsi obtenus engendrent un sous-espace S de dimension au plus 2. En effet, si les valuations de a et b diffèrent, le terme initial de $a - b$ est celui de l'élément de plus petite valuation, au signe près. Si les valuations sont égales et les termes initiaux distincts, celui de $a - b$ est leur différence. S'ils sont égaux, a et b ne fournissent qu'une direction, et le terme initial de $a - b$ en fournit au plus une seconde. Le cas d'une composante nulle est immédiat.

Il existe une application linéaire isométrique $j \colon S \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$, où $V_i = \Gamma_i/\ell\Gamma_i$, dont les deux projections sont injectives. Pour $\dim S = 1$, on envoie un générateur sur la somme de deux vecteurs non nuls. Pour $\dim S = 2$, choisissons une base u, v de S et posons $c = \varphi(u, v)$. Au besoin, échangeons les facteurs afin que $\dim V_2 \geq 4$. Dans V_1, choisissons une paire indépendante de produit symplectique 1 ; dans V_2, une paire indépendante de produit $c - 1$, ce qui est possible même si $c - 1 = 0$, grâce à un plan totalement isotrope dans V_2. La somme des deux paires donne l'application j cherchée. Le théorème d'extension de Witt prolonge j en un automorphisme symplectique de V. La réduction $\mathrm{Sp}(\Gamma \otimes R) \to \mathrm{Sp}(V)$ est surjective, comme on le voit en relevant une base symplectique ; choisissons un relèvement. Les projections des termes initiaux de chaque v sont non nulles ; les projections de v lui-même le sont donc aussi. En combinant ces automorphismes par le théorème chinois pour tous les facteurs premiers de m, on obtient γ tel que les projections de γa, γb et $\gamma(a - b)$ soient non nulles dans chacun des deux facteurs. Cela donne exactement la conclusion. □

Proposition IV.B.3.3. *Soient (P, Θ) une variété de Prym générique de dimension $g \geq 5$, et a, b des éléments de torsion distincts non nuls de P. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

Démonstration. Pour $g = 5$, P est une variété abélienne principalement polarisée générique. D'après A1.2.10, $\Theta \cap \Theta_a$ est lisse ; comme $\mathrm{NS}(P)$ est engendré par Θ, la démonstration de 2.3 entraîne que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.

Démontrons la proposition par récurrence sur g. Pour une jacobienne générique (JC, Θ), les classes de cohomologie algébriques sont toujours des multiples entiers des classes minimales $\Theta^p/p!$; cela résulte d'un argument facile de monodromie ([A–C–G–H 2], chapitre X). Il en est donc de même pour P. D'autre part, $\Theta \cap \Theta_a$ est intègre (II.C), donc $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$

est de codimension 3. Soit Z une composante irréductible de cette intersection, munie de sa structure réduite ; sa classe de cohomologie dans P est $n\Theta^3/6$, avec $1 \leq n \leq 6$.

Considérons la spécialisation de P en $P_1 \times P_2$ fournie par le lemme 3.1, avec $\dim P_1 = 1$, $\dim P_2 = g-1$. Dans $P_1 \times P_2$, le diviseur Θ se spécialise en $\Theta' = (P_1 \times \Theta_2) + (\Theta_1 \times P_2)$, où Θ_i est un diviseur thêta de la variété de Prym P_i. On a l'égalité entre cycles

$$\begin{aligned}\Theta' \cap \Theta'_{(a_1,a_2)} \cap \Theta'_{(b_1,b_2)} = {} & P_1 \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,a_2} \cap \Theta_{2,b_2}) \\ & + \Theta_1 \times (\Theta_{2,a_2} \cap \Theta_{2,b_2}) \\ & + \Theta_{1,a_1} \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,b_2}) \\ & + \Theta_{1,b_1} \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,a_2}).\end{aligned}$$

La première sous-variété du second membre est intègre par l'hypothèse de récurrence, de classe θ_2^3 ; les trois autres sont intègres en vertu de II.C, de classe $\theta_1\theta_2^2$. On a noté θ_1, θ_2 les classes de $\Theta_1 \times P_2$ et $P_1 \times \Theta_2$ dans $H^2(P_1 \times P_2, \mathbb{Z})$. La composante Z se spécialise en une réunion de certaines de ces composantes ; en comparant les classes de cohomologie, on obtient

$$n\frac{(\theta_1+\theta_2)^3}{6} = p\theta_2^3 + q\theta_1\theta_2^2, \qquad p, q \in \mathbb{N}.$$

Ceci impose $n = 6$, de sorte que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est égale à Z et est donc intègre. □

Remarque. Soient P une variété de Prym générique de dimension g, et a, b des éléments distincts non nuls de P. Il paraît vraisemblable qu'au moins pour g assez grand, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est réductible que dans la situation de 1.1 :

$$a = p + q - \sigma p - \sigma q, \qquad b = p + r - \sigma p - \sigma r.$$

Pour $g \geq 12$, on peut prouver que cela résulterait de la conjecture suivante, dont une version plus faible est prouvée dans [We 4] : les seuls éléments $a \in P$ tels que Θ_a contienne $\operatorname{Sing}\Theta$ sont ceux qui s'écrivent $p + q - \sigma p - \sigma q$, pour $p, q \in \widetilde{C}$.

Appendices

ANNEXE 1

Construction de composantes irréductibles de N_k^g

A1.1 Définition du sous-ensemble $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$ de $\mathcal{A}_{g'+g''}$

Cet appendice est consacré à l'étude systématique d'une situation rencontrée plusieurs fois : en II.D.1.5.1 et II.D.2.1, on a étudié des variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de degré 2.

On s'intéresse ici aux variétés abéliennes principalement polarisées isogènes à un produit de deux variétés abéliennes polarisées de même type. Comme le montre la proposition suivante, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées non simples rentrent dans ce cadre.

On adopte les notations et les résultats de [Mu 5], rappelés en I.3. La démonstration de la proposition est reportée à la fin de cette section.

Proposition A1.1.1. *Soient (A,L) une variété abélienne principalement polarisée et $j' : X' \hookrightarrow A$ une sous-variété abélienne. Il existe une unique sous-variété abélienne $j'' : X'' \hookrightarrow A$ vérifiant :*

i) Le morphisme $\pi = j' + j'' : X' \times X'' \to A$ est une isogénie.

ii) La polarisation π^*L est la polarisation produit $M' \boxtimes M''$, où $M' = j'^*L$ et $M'' = j''^*L$.

Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

iii) Il existe un isomorphisme antisymplectique $\psi : H(M') \to H(M'')$ tel que

$$\operatorname{Ker}\pi = \{(x,\psi x) \mid x \in H(M')\}, \qquad e^{M'}(x,y)e^{M''}(\psi x,\psi y) = 1$$

pour tous $x,y \in H(M')$.

iv) Il existe des bases $s'_1,\dots,s'_d$ de $H^0(X',M')$ et $s''_1,\dots,s''_d$ de $H^0(X'',M'')$ telles que $\sum_{i=1}^d s'_i \otimes s''_i$ engendre $\pi^*H^0(A,L) \subset H^0(X' \times X'', \pi^*L)$.

1.2. Construction réciproque. Réciproquement, soient (X',M') et (X'',M'') deux variétés abéliennes polarisées de même type et $\psi : H(M') \to H(M'')$ un isomorphisme antisymplectique. Posons $K = \{(x,\psi x) \mid x \in H(M')\}$. La variété abélienne $A = (X' \times X'')/K$ est alors principalement polarisée et le morphisme canonique $\pi : X' \times X'' \to A$ vérifie i) et ii). L'espace des modules des variétés abéliennes polarisées (X,M) de dimension et de type δ fixés, munies d'un isomorphisme symplectique $H(M) \simeq H(\delta)$, est irréductible. Les variétés (A,L) ainsi construites à partir de X' et X'' de dimensions fixées et de même type δ fixé forment donc une sous-variété irréductible de $\mathcal{A}_g$.

Définition A1.1.3. *On note $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g-g'}$ le fermé irréductible de codimension $g'(g-g')$ de $\mathcal{A}_g$ formé des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g contenant une sous-variété abélienne de dimension g' sur laquelle la polarisation induite est de type δ.*

Il résulte de 1.1 et 1.2 que $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''} = \mathcal{A}^{\delta}_{g'',g'}$. On supposera donc toujours $1 \le g' \le g/2$.

1.4. Lieu singulier. Si F' et F'' sont les lieux fixes de $|M'|$ et $|M''|$, il résulte de 1.1 iv) que

$$\pi(F' \times F'') \subset \operatorname{Sing} \Theta, \tag{A1.1.5}$$

où Θ est le diviseur thêta de A. En particulier, si $g - g' \geq g' \geq d = \deg \delta$, on a

$$\mathcal{A}^{\delta}_{g',g-g'} \subset N^{g}_{g-2d}.$$

Le reste de cet appendice est consacré à l'étude de ces lieux $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g-g'}$. Pour certains types δ, on montrera que l'inclusion (A1.1.5) est une égalité pour X' et X'' génériques, et que $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g-g'}$ est une composante irréductible de $N^{g}_{g-2\deg\delta}$ lorsque $g - g' \geq g' \geq \deg \delta$.

Démonstration de la proposition A1.1.1 et de 1.2. Puisque j' est injective, le noyau de l'application duale $\hat{j}' : \widehat{A} \to \widehat{X}'$ est connexe. On note X'' son image inverse par $\phi_L : A \xrightarrow{\sim} \widehat{A}$ et j'' l'injection $X'' \hookrightarrow A$. La matrice de la polarisation induite π^*L sur $X' \times X''$ est

$$\begin{pmatrix} \hat{j}'\phi_L j' & \hat{j}'\phi_L j'' \\ \hat{j}''\phi_L j' & \hat{j}''\phi_L j'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{M'} & 0 \\ 0 & \phi_{M''} \end{pmatrix},$$

puisque, par construction, $\hat{j}'\phi_L j''$ et son dual $\hat{j}''\phi_L j'$ sont nuls. Ceci prouve i) et ii). L'unicité est évidente. Il existe de plus un sous-groupe K de $H(M')$ et une injection $\psi : K \hookrightarrow H(M'')$ tels que $\operatorname{Ker} \pi = \{(x, \psi x) \mid x \in K\}$. Comme L est une polarisation principale, on a ([Mu 5], p. 295)

$$|K|^2 = |\operatorname{Ker} \pi|^2 = |H(\pi^*L)| = |H(M')|\,|H(M'')|.$$

Il s'ensuit que ψ est un isomorphisme de $H(M')$ sur $H(M'')$. En outre, $\operatorname{Ker} \pi$ est isotrope pour e^{π^*L} ([Mu 5], p. 291), ce qui prouve iii).

Par définition du commutateur e^{π^*L}, cela revient à dire que ψ se relève en un isomorphisme $\widetilde{\psi} : G(M') \to G(M'')$ dont la restriction à $\mathbb{C}^*$ est l'inversion. Soient $\widetilde{G}$ et $\widetilde{K}'$ deux sous-groupes de niveau maximaux de $G(M')$ tels que $\widetilde{G} \cap \widetilde{K}' = \{1\}$. Soit s' (resp. s'') un générateur du sous-espace de $H^0(X', M')$ (resp. $H^0(X'', M'')$) invariant par $\widetilde{K}'$ (resp. $\widetilde{\psi}(\widetilde{K}')$). Dans la représentation thêta, $\widetilde{G}$ permute transitivement les espaces propres de dimension 1 de $\widetilde{K}'$. Ainsi $\{\tilde{g} \cdot s' \mid \tilde{g} \in \widetilde{G}\}$ est une base de $H^0(X', M')$; de même $\{\widetilde{\psi}(\tilde{g}) \cdot s'' \mid \tilde{g} \in \widetilde{G}\}$ est une base de $H^0(X'', M'')$.

Tout élément invariant de $H^0(X' \times X'', \pi^*L)$ sous l'action du sous-groupe de niveau maximal

$$\{(\tilde{x}, \widetilde{\psi}\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in G(M')\} \subset G(\pi^*L) \simeq \frac{G(M') \times G(M'')}{\{(\lambda, \lambda^{-1}) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}}$$

engendre $\pi^*H^0(A, L)$. On vérifie que

$$s = \sum_{\tilde{g} \in \widetilde{G}} (\tilde{g} \cdot s') \otimes (\widetilde{\psi}(\tilde{g}) \cdot s'')$$

convient. Réciproquement, pour montrer 1.2, il suffit de remarquer que les hypothèses entraînent que $K \subset H(M' \boxtimes M'')$ est totalement isotrope maximal. □

A1.2 Les ensembles $T_{g,\delta}$ et $U_{g,\delta}$

On introduit les sous-variétés fermées suivantes de $\mathcal{A}_{g,\delta}$:

$$T_{g,\delta} = \{(X, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta} \mid \text{un élément de } |M| \text{ a un point de multiplicité } > 2\},$$
$$U_{g,\delta} = \{(X, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta} \mid \text{la propriété (P) ci-dessous n'est pas vérifiée}\}.$$

(P) Le lieu fixe F de $|M|$ est lisse de dimension $g - \deg\delta$ si cet entier est positif ou nul, vide sinon. De façon équivalente, pour une base $s_1, \dots, s_d$ de $H^0(X, M)$, où $d = \deg\delta$, on a

$$\forall z \in F, \qquad \operatorname{rang}\left(\frac{\partial s_i}{\partial z_j}(z)\right)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le g}} = d.$$

Par exemple, pour la polarisation principale $\delta = (1)$,

$$T_{g,(1)} \subset U_{g,(1)} = N_0^g \subsetneq \mathcal{A}_g.$$

Proposition A1.2.1. *Si $U_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}$, alors $T_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}$.*

Démonstration. Posons $\theta_r(z,\tau) = \theta[\begin{smallmatrix} r \\ 0 \end{smallmatrix}](z,\tau)$ (I.3.14), pour $z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathfrak{H}_g$ et $r \in \Delta_\delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g = \Gamma_\delta$. Les θ_r forment une base de $H^0(X, M)$, où $(X, M) \in \mathcal{A}_{g,\delta}$ correspond à τ.

Si $U_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}$, la méthode de [An–M] (notamment le lemme 8, p. 203) montre qu'il existe un ouvert $U \subset \mathfrak{H}_g$ et deux morphismes $\lambda\colon U \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ et $s\colon U \to \mathbb{C}^g$ tels que, pour $\tau \in U$,

$$\begin{cases} \theta_r(s(\tau),\tau) = 0 & \text{pour tout } r \in \Gamma_\delta, \\ \displaystyle\sum_r \lambda_r(\tau)\frac{\partial\theta_r}{\partial z_i}(s(\tau),\tau) = 0 & \text{pour } 1 \le i \le g. \end{cases} \tag{A1.2.2}$$

En dérivant $\sum_r \lambda_r(\tau)\theta_r(s(\tau),\tau) = 0$ par rapport à τ_{ij}, puis en utilisant (A1.2.2) et les équations de la chaleur (I.3.14), on trouve

$$\forall \tau \in U, \quad \forall i,j \in \{1,\dots,g\}, \qquad \sum_r \lambda_r(\tau)\frac{\partial^2\theta_r}{\partial z_i \partial z_j}(s(\tau),\tau) = 0.$$

Avec (A1.2.2), ceci implique $T_{g,\delta} \supset U$, donc, par fermeture, $T_{g,\delta} = \mathcal{A}_{g,\delta}$. □

Remarque A1.2.3. On s'est seulement servi des équations de la chaleur pour les θ_r. En particulier, fixons des constantes α_r^i, pour $r \in \Gamma_\delta$ et $1 \le i \le n$, telles que $\operatorname{rang}(\alpha_r^i) = n$. Si $T_{g,\delta} \neq \mathcal{A}_{g,\delta}$, alors, pour X générique dans $\mathcal{A}_{g,\delta}$, l'intersection

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{div}\left(\sum_r \alpha_r^i \theta_r(\,\cdot\,,\tau)\right)$$

est lisse de dimension $g - n$ si $n \le g$, vide sinon.

Théorème A1.2.4. *On a $T_{g,\delta} \neq \mathcal{A}_{g,\delta}$ dans les cas suivants :*

$$\delta = (2),\ g \ge 1; \qquad \delta = (3),\ g \ge 2; \qquad \delta = (2,2),\ g = 2 \text{ ou } g \ge 4.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence, avec une construction analogue à 1.2. Reprenons les notations de la démonstration de 1.1 et posons $M = M' \boxtimes M''$ sur $X = X' \times X''$. Le sous-groupe $\{(\tilde{x}, \tilde{\psi}\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \widetilde{K}'\}$ de $G(M)$ est de niveau, de cardinal $\deg\delta$. Soit H son image dans $H(M)$. Il existe une variété abélienne polarisée (Y, N) de type δ et une isogénie $p\colon (X, M) \to (Y, N)$ de noyau H. Une base de $p^*H^0(Y, N) \subset H^0(X, M)$ est

$$\{s_h = s'_h \otimes s''_h \mid h \in \widetilde{G}\}, \qquad s'_h \otimes s''_h = (h \cdot s') \otimes (\tilde{\psi}(h) \cdot s'').$$

Lemme A1.2.5. *Si $(X'', M'') \notin T_{g'',\delta}$ et si $\operatorname{div} s''_1$ est lisse, alors $(Y, N) \notin T_{g'+g'',\delta}$ dans chacun des cas suivants :*

— $\delta = (d)$ *et* $g' = 1$;

— $\delta = (2,2)$ *et* (X', M') *générique dans* $\mathcal{A}_{2,(2,2)}$.

Démonstration. *1)* $g' = 1$. Supposons que le diviseur de $s = \sum_{h\in\widetilde{G}} \lambda_h s_h$ ait un point (x', x'') de multiplicité > 2. On a en particulier, pour tous i, j,

$$\sum_h \lambda_h s'_h(x') s''_h(x'') = 0,$$
$$\sum_h \lambda_h s'_h(x') \frac{\partial s''_h}{\partial x''_i}(x'') = 0,$$
$$\sum_h \lambda_h s'_h(x') \frac{\partial^2 s''_h}{\partial x''_i \partial x''_j}(x'') = 0.$$

Comme $(X'', M'') \notin T_{g'',\delta}$, on obtient $\lambda_h s'_h(x') = 0$ pour tout $h \in \widetilde{G}$. Puisque $g' = 1$, les diviseurs des s'_h sont deux à deux disjoints. Au plus un λ_h est donc non nul. Mais alors

$$\operatorname{div} s = (X' \times \operatorname{div} s''_h) \cup (\operatorname{div} s'_h \times X'')$$

n'a pas de point de multiplicité > 2, puisque $\operatorname{div} s''_h$, translaté de $\operatorname{div} s''_1$, est lisse.

2) $g' = 2$, $\delta = (2,2)$. On a encore $\lambda_h s'_h(x') = 0$ pour tout h. D'après l'équation de la surface de Kummer, image de X' par $|M'|$ ([Mu 5], p. 354), si trois sections s'_h s'annulent en un point, l'équation est de la forme

$$Bxyzw + C(x^2y^2 + z^2w^2) + D(x^2w^2 + y^2z^2) + E(x^2z^2 + y^2w^2) = 0,$$

ce qui n'est pas une surface de Kummer générique (voir la fin de la démonstration du théorème 2.4). Si trois coefficients λ_h sont nuls, on conclut comme au cas 1. On peut donc supposer

$$\widetilde{G} = \{1,2,3,4\}, \qquad s'_1(x') = s'_2(x') = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 \neq 0.$$

Pour X' générique, $\operatorname{div} s'_1 \cap \operatorname{div} s'_2$ est lisse : il suffit de vérifier que, pour (A, Θ) générique dans $\mathcal{A}_2$ et $a \in A[2] \setminus \{0\}$, $\Theta \cap \Theta_a$ est lisse. Pour $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq k \leq g''$, on a

$$\lambda_1 \frac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x') s''_1(x'') + \lambda_2 \frac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x') s''_2(x'') = 0,$$
$$\lambda_1 \frac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x') \frac{\partial s''_1}{\partial x''_k}(x'') + \lambda_2 \frac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x') \frac{\partial s''_2}{\partial x''_k}(x'') = 0.$$

Comme $\operatorname{rang}(\partial s'_i/\partial x'_j)(x') = 2$, on en déduit $x'' \in \operatorname{Sing}(\operatorname{div} s''_1)$, contradiction. □

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de traiter les cas suivants.

1) $\delta = (2)$, $g = 1$. C'est évident.

2) $\delta = (3)$, $g = 2$. Reprenons les notations du lemme avec $g' = g'' = 1$. D'après [Mu 5], p. 350, l'image de X'' par $x'' \mapsto [s''_0(x'') : s''_1(x'') : s''_2(x'')]$ a pour équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\mu'' XYZ = 0, \qquad \mu'' \notin \{1, \omega, \omega^2, \infty\}, \quad \omega^3 = 1, \ \omega \neq 1.$$

Si (x', x'') a multiplicité > 2 sur $\operatorname{div} s$, alors soit tous les coefficients $\lambda_j s'_j(x')$ sont nuls, soit x'' est un point d'inflexion de la cubique, puisque le diviseur de $\sum_{j=0}^{2} \lambda_j s'_j(x') s''_j$ y a multiplicité

> 2. Or :

$$\begin{aligned}\{\text{points d'inflexion}\} &= \{[0:1:-1],[0:1:-\omega],[0:1:-\omega^2] \text{ et permutations}\},\\ \{\text{tangentes}\} &= \{\mu''X+Y+Z=0,\ \mu''\omega X+Y+\omega^2 Z=0,\\ &\qquad \mu''\omega^2 X+Y+\omega Z=0 \text{ et permutations}\}.\end{aligned}$$

On en déduit, en interprétant les coordonnées non nulles à un facteur commun près,

$$\begin{aligned}&(\lambda_0 s_0'(x'),\lambda_1 s_1'(x'),\lambda_2 s_2'(x'))\\ &\in \{0\}\cup\mathbb{C}^*\{(\mu'',1,1),(\mu''\omega,1,\omega^2),(\mu''\omega^2,1,\omega) \text{ et permutations}\}.\end{aligned} \tag{A1.2.6}$$

Si le triplet de coefficients est nul, au plus un λ_j est non nul, puisque les diviseurs des s_j' sont disjoints. Le diviseur produit ainsi obtenu a multiplicité au plus deux. Dans le cas restant, le raisonnement d'inflexion et son analogue symétrique donnent

$$\begin{aligned}&[s_0''(x'') : s_1''(x'') : s_2''(x'')],\quad [s_0'(x') : s_1'(x') : s_2'(x')]\\ &\in \{[0:1:-1],[0:1:-\omega],[0:1:-\omega^2] \text{ et permutations}\}.\end{aligned} \tag{A1.2.7}$$

Exactement un $s_j'(x')$ est donc nul. Prenons $\mu'' \neq 0$; (A1.2.6) et (A1.2.7) sont alors incompatibles pour un triplet non nul. Cela termine ce cas.

3) $\delta = (2,2)$, $g = 2$. Il suffit de trouver une surface de Kummer dans $\mathbb{P}^3$ dont toute section hyperplane n'ait que des points de multiplicité au plus deux. La quartique S_ϵ d'équation

$$F_\epsilon = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2(2+\epsilon)x_0x_1x_2x_3 + \epsilon(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2) = 0$$

est une surface de Kummer pour $\epsilon \notin \{0,2,-2\}$. Si une section hyperplane a un point de multiplicité > 2, il existe un point de S_ϵ où la forme quadratique

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F_\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} X_i X_j$$

est de rang au plus 2. On vérifie que cela est impossible pour $\epsilon = 0$, donc aussi pour ϵ voisin.

4) $\delta = (2,2)$, $g = 5$. Reprenons les notations du lemme avec $g' = 2$ et $g'' = 3$. On suppose :

i) $(X', M') \notin T_{2,(2,2)} \cup U_{2,(2,2)}$, ce qui est possible d'après le cas 3 et la proposition 2.1 ;

ii) $\operatorname{div} s_1''$ et $\operatorname{div} s_1'' \cap \operatorname{div} s_2''$ sont lisses, ce qui est possible puisque $T_{3,(2)} \neq \mathcal{A}_{3,(2)}$ implique $U_{3,(2)} \neq \mathcal{A}_{3,(2)}$;

iii) $\operatorname{div} s_1'' \cap \operatorname{div} s_2'' \cap \operatorname{div} s_3''$ et $F'' = \bigcap_h \operatorname{div} s_h''$ sont lisses de dimension 0, de longueurs respectives 24 et 16.

Pour le dernier point, il suffit de montrer, comme dans la démonstration de 2.1, que pour (A,Θ) générique dans $\mathcal{A}_3$ et pour $a, b \in A[2]$ linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_2$, avec $e_2(a,b) = 1$, on a :

— $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est lisse de dimension 0 ; il suffit de considérer un produit de trois courbes elliptiques.

— $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \cap \Theta_{a+b}$ est réduit et égal à $\{\epsilon, \epsilon+a, \epsilon+b, \epsilon+a+b\}$ pour un ϵ d'ordre 2. Le texte original laisse la démonstration au lecteur.

Ce dernier fait entraîne $U_{3,(2,2)} = \mathcal{A}_{3,(2,2)}$, et donc aussi, par 2.1, $T_{3,(2,2)} = \mathcal{A}_{3,(2,2)}$.

On effectue maintenant la construction du lemme 2.5. Si $(Y,N) \in T_{5,(2,2)}$, l'hypothèse i) donne $\lambda_h s_h''(x'') = 0$ pour tout h.

— Si $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, le diviseur s est la réunion de $X' \times \operatorname{div} s''_1$ et de $\operatorname{div} s'_1 \times X''$; il n'a pas de point de multiplicité > 2, par ii).

— Si $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, alors $s''_1(x'') = s''_2(x'') = 0$. Comme à la fin de 2.5, l'hypothèse ii) implique

$$s'_1(x') = s'_2(x') = \frac{\partial s'_1}{\partial x'_j}(x') = \frac{\partial s'_2}{\partial x'_j}(x') = 0,$$

en contradiction avec i).

— Si $\lambda_4 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, alors $s''_1(x'') = s''_2(x'') = s''_3(x'') = 0$. L'hypothèse iii) donne de même une contradiction.

— Si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \neq 0$, alors $s''_h(x'') = 0$ pour tout $h \in \{1, \dots, 4\}$. Par iii), $\operatorname{rang}(\partial s''_h/\partial x''_j)(x'') = 3$. Il en résulte

$$\operatorname{rang}\left(s'_h(x'), \frac{\partial s'_h}{\partial x'_1}(x'), \frac{\partial s'_h}{\partial x'_2}(x')\right)_{1\leq h\leq 4} \leq 1.$$

Puisque $\phi_{|M'|} \colon X' \to \mathbb{P}^3$ est non ramifiée hors de $X'[2]$, on a $x' \in X'[2]$. Le texte original fait alors varier X' dans $\mathcal{A}_{2,(2,2)}$ et observe que $[s'_1(x') : \cdots : s'_4(x')]$ décrit une sous-variété engendrant $\mathbb{P}^3$ (considérer un produit de deux courbes elliptiques). Il affirme que ce vecteur ne peut donc rester dans le noyau, de dimension 1, de $(\partial s''_h/\partial x''_j)(x'')$.

L'argument original en conclut que tous les λ_h sont nuls et que $(Y, N) \notin T_{5,(2,2)}$. □

Note éditoriale sur le cas $g = 5$. La dernière inférence omet les coefficients λ_h : les équations imposent en réalité $(\lambda_h s'_h(x'))_h \in \operatorname{Ker} D''$, où D'' est la matrice des dérivées premières sur X''. Le fait que $(s'_h(x'))_h$ varie ne suffit pas à exclure cette condition, puisque les λ_h sont libres. Plus précisément, dans la présentation symétrique utilisée ici, on peut prendre $x' \in X'[2]$ avec les $s'_h(x')$ non nuls et localement pairs, et un point fixe x'' où les s''_h sont localement impairs. Pour $0 \neq w \in \operatorname{Ker} D''$, le choix $\lambda_h = w_h/s'_h(x')$ annule les jets d'ordres 0, 1 et 2 du produit. Cette construction particulière ne prouve donc pas l'assertion pour $g = 5$. Le présent texte conserve l'énoncé historique et son argument, mais ne prétend pas avoir réparé cette lacune ; les conséquences utilisant ce cas ou sa récurrence demeurent soumises à une justification indépendante.

On peut traduire les résultats de 2.4, joints à 2.1, en termes d'intersections de translatés du diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisée générique. Si (X, M) est de type $\delta = (d)$, il existe une variété principalement polarisée (A, Θ), une isogénie $\pi \colon X \to A$ telle que $\pi^*\Theta = M$, une base $s_1, \dots, s_d$ de $H^0(X, M)$ et un point $a \in A$ d'ordre d engendrant $\pi(H(M))$, avec

$$\operatorname{div} s_j = \pi^*\Theta_{ja} \qquad (1 \leq j \leq d).$$

Le lieu fixe de $|M|$ est un revêtement étale de $\Theta \cap \Theta_a \cap \cdots \cap \Theta_{(d-1)a}$.

Pour $\delta = (2, 2)$, l'image $\pi(H(M)) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est engendrée par $a = \pi(b)$ et $a' = \pi(b')$, avec $b, b' \in X[2]$. Si $L = O_A(\Theta)$, on a ([Mu 6], p. 228)

$$e_2(a, a') = e^{L^{\otimes 2}}(a, a') = e^{M^{\otimes 2}}(b, b') = e^M(b, 2b') = 1.$$

Le lieu fixe de $|M|$ est donc un revêtement étale de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_{a'} \cap \Theta_{a+a'}$.

Avant d'énoncer le corollaire de 2.4, indiquons une généralisation. Pour $a \in \mathbb{C}^g \setminus \mathbb{Z}^g$, on définit les fermés analytiques suivants de $\mathfrak{H}_g$:

$$T_{g,a} = \{\tau \in \mathfrak{H}_g \mid \exists x \in \mathbb{C}^g,\ \exists [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1,\ z \mapsto \lambda\theta(z, \tau) + \mu\theta(z - a, \tau) \text{ a multiplicité au moins 3 en } x\},$$

et $U_{g,a}$ est le lieu où l'intersection d'équations $\theta(z,\tau) = \theta(z-a,\tau) = 0$ dans $\mathbb{C}^g$ n'est pas lisse de dimension $g-2$ pour $g \geq 2$, ou n'est pas vide pour $g = 1$.

Si $2a \in \mathbb{Z}^g$, l'image de $T_{g,a}$ (resp. $U_{g,a}$) dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$ est $T_{g,(2)}$ (resp. $U_{g,(2)}$). Comme en 2.1, on montre que $U_{g,a} = \mathfrak{H}_g$ implique $T_{g,a} = \mathfrak{H}_g$. La démonstration du cas 1 du lemme 2.5 montre aussi que si $a' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\tau' \in \mathfrak{H}_1$, $a'' \in \mathbb{C}^{g''} \setminus \mathbb{Z}^{g''}$, $\tau'' \notin T_{g'',a''}$ et $\operatorname{div}\theta(\,\cdot\,,\tau'')$ est lisse, alors

$$\begin{pmatrix} \tau' & 0 \\ 0 & \tau'' \end{pmatrix} \notin T_{g''+1,(a',a'')}.$$

On en déduit :

Proposition A1.2.8. *Soit $g \geq 1$ et soit $a \in \mathbb{C}^g$ dont aucune composante n'est entière. Alors $T_{g,a} \neq \mathfrak{H}_g$.*

Démonstration. Il reste à traiter $g = 1$. Sinon, il existerait un ouvert $U \subset \mathfrak{H}_1$ et des morphismes $\lambda\colon U \to \mathbb{C}^*$ et $s\colon U \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour $\tau \in U$,

$$\begin{cases} \lambda(\tau)\theta(s(\tau),\tau) + \theta(s(\tau)-a,\tau) = 0, \\ \lambda(\tau)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}(s(\tau),\tau) + \dfrac{\partial\theta}{\partial z}(s(\tau)-a,\tau) = 0, \\ \lambda(\tau)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(s(\tau),\tau) + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(s(\tau)-a,\tau) = 0. \end{cases} \tag{A1.2.9}$$

En dérivant la première équation par rapport à τ, puis en utilisant les deux autres et l'équation de la chaleur, on obtient

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}(\tau)\theta(s(\tau),\tau) = 0.$$

Si $\theta(s(\tau),\tau) = 0$, la première équation donne aussi $\theta(s(\tau)-a,\tau) = 0$, impossible en genre 1 si $a \notin \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, donc pour τ générique. Ainsi $\lambda(\tau) = \lambda$ est constante. Le lemme 9 de [An–M] implique alors que $\lambda\theta(z,\tau) + \theta(z-a,\tau)$ est identiquement nulle, ce qui est impossible. □

Il suffit de considérer $a = \frac{1}{n}(1,\dots,1) \in \mathbb{Q}^g$, $n \geq 2$, pour en déduire :

Théorème A1.2.10. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée très générale de dimension $g \geq 2$. Pour tout point de torsion non nul $a \in A$, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est lisse de codimension 2. En particulier, si Θ est symétrique, tous ses points de torsion appartiennent à $A[2]$.*

Ici « très générale » tient compte de la réunion dénombrable des lieux exceptionnels pour tous les ordres de torsion. La dernière assertion vient de ce que, si Θ est symétrique et $x \in \Theta$, l'intersection $\Theta \cap \Theta_{2x}$ est singulière en x.

Il reste à énoncer le corollaire de 2.4.

Corollaire A1.2.11. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geq 2$.*

- *Si a est d'ordre 3, $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_{2a}$ est vide pour $g = 2$ et lisse de dimension $g-3$ pour $g \geq 3$.*
- *Si $a, b \in A[2]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_2$ et $e_2(a,b) = 1$, alors $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est vide pour $g = 2$ et lisse de dimension $g-3$ pour $g \geq 3$; de plus $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \cap \Theta_{a+b}$ est lisse de dimension $g-4$ pour $g \geq 4$.*

Ces schémas sont irréductibles lorsqu'ils ont dimension strictement positive.

Démonstration. Comme expliqué plus haut, ces résultats résultent de 2.4, de 2.1 et de la remarque 2.3. L'assertion d'irréductibilité, valable également pour 2.10, découle du résultat suivant ([Fu–L]) : si L est un faisceau inversible ample sur une variété projective irréductible X et $s_1, \dots, s_r$ sont des sections de L, alors $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{div} s_i$ est connexe pour $r < \dim X$. On l'applique après une isogénie finie qui identifie les faisceaux des translatés par les points de torsion. La connexité, jointe à la lissité, donne l'irréductibilité. □

Dépendance de l'argument. Les conclusions qui utilisent le cas $(2,2), g = 5$, du théorème 2.4, ou sa récurrence en dimension impaire, restent soumises à la lacune signalée après sa démonstration.

A1.3 Le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$

Proposition A1.3.1. *Supposons $T_{g',\delta} \neq \mathcal{A}_{g',\delta}$ et $U_{g'',\delta} \neq \mathcal{A}_{g'',\delta}$ (ou les conditions inverses), avec $g'' \geq g'$. Le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$ est vide si $g' < d = \deg \delta$, et sinon lisse de codimension $2d$, avec égalité dans (A1.1.5). Toutes les singularités de Θ sont quadratiques de rang $2d$.*

Démonstration. Si l'égalité dans (A1.1.5) échouait pour tout élément de $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$, il existerait, comme dans la démonstration de 2.1, des ouverts $U' \subset \mathfrak{H}_{g'}$, $U'' \subset \mathfrak{H}_{g''}$ et des applications holomorphes

$$s' : U' \times U'' \to \mathbb{C}^{g'}, \qquad s'' : U' \times U'' \to \mathbb{C}^{g''}$$

vérifiant les conditions suivantes. Pour alléger les formules, on écrit θ'_r pour $\theta'_r(s'(\tau',\tau''),\tau')$ et $\theta''_{\psi r}$ pour $\theta''_{\psi r}(s''(\tau',\tau''),\tau'')$, et on emploie la même convention pour leurs dérivées. Pour tout $(\tau',\tau'') \in U' \times U''$, on a

$$\text{les deux familles } (\theta'_r)_r \text{ et } (\theta''_{\psi r})_r \text{ ne sont pas toutes deux nulles;} \tag{A1.3.2}$$

$$\sum_r \theta'_r \theta''_{\psi r} = 0; \tag{A1.3.3}$$

$$\sum_r \frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_i} \theta''_{\psi r} = 0 \quad (1 \leq i \leq g'); \tag{A1.3.4}$$

$$\sum_r \theta'_r \frac{\partial \theta''_{\psi r}}{\partial z''_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq g''). \tag{A1.3.5}$$

En dérivant (A1.3.3) par rapport à τ'_{ij} et en utilisant (A1.3.4), (A1.3.5) et les équations de la chaleur (I.3.14), on trouve

$$\sum_r \frac{\partial^2 \theta'_r}{\partial z'_i \partial z'_j} \theta''_{\psi r} = 0 \qquad \text{pour tous } i, j.$$

Puisque $T_{g',\delta} \neq \mathcal{A}_{g',\delta}$, on en déduit $\theta''_{\psi r} = 0$ pour tout $r \in \Gamma_\delta$ et tout $(\tau',\tau'') \in U' \times U''$. De $U_{g'',\delta} \neq \mathcal{A}_{g'',\delta}$ et de (A1.3.5), on déduit alors $\theta'_r = 0$ pour tous r, τ', τ'', en contradiction avec (A1.3.2). Ainsi, pour (A,Θ) générique dans $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$, on a $\pi(F' \times F'') = \operatorname{Sing}\Theta$. Puisque $U_{g',\delta} \neq \mathcal{A}_{g',\delta}$ par 2.1 et $U_{g'',\delta} \neq \mathcal{A}_{g'',\delta}$, le lieu singulier est lisse de codimension $2d$, ou vide si $g' < d$.

Si $g' \geq d$, sa matrice hessienne en un point singulier est

$$\begin{pmatrix} 0 & T \\ {}^tT & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \left(\sum_r \frac{\partial \theta'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial \theta''_{\psi r}}{\partial z''_j}(z'') \right)_{\substack{1 \leq i \leq g' \\ 1 \leq j \leq g''}}.$$

Comme les deux matrices de dérivées premières ont rang d, avec $d \leq g' \leq g''$, cette hessienne a rang $2d$. Les singularités de Θ sont donc quadratiques de rang $2d$. □

Corollaire A1.3.6. *Pour $\delta = (2), (3)$ ou $(2,2)$, le lieu singulier du diviseur thêta d'un élément générique de $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$, avec $g'' \geq g'$, est :*

— *vide si $g' < d = \deg \delta$, sauf éventuellement pour $\delta = (2,2)$ et $3 \in \{g', g''\}$;*

— *composé de $(d!)^2$ points si $g' = g'' = d$;*

— *lisse, avec $(d-1)!$ composantes connexes de codimension $2d$, si $g'' > g' = d$;*

— *lisse et irréductible de codimension $2d$ si $g' > d$.*

Démonstration. Il reste à compter les composantes connexes, compte tenu de la fin de 2.11. Supposons $g' = d$. On a $(M')^{g'} = d(g')!$ (I.3.6). Le lieu fixe F' de M' a cardinal $d\,d!$ et est stable par $H(M')$, de cardinal d^2 (I.3.7). Le nombre de composantes est donc

$$\begin{cases} \dfrac{(d\,d!)^2}{d^2} = (d!)^2 & \text{si } g'' = d, \\ \dfrac{d\,d!}{d^2} = (d-1)! & \text{si } g'' > d. \end{cases}$$

□

Remarque A1.3.7. Les singularités de Θ sont alors quadratiques de rang $2d$ et $\operatorname{Sing}\Theta$ est invariant par le groupe de translations de cardinal d^2, isomorphe à $H(\delta)$,

$$\pi(H(M') \times \{0\}) = \pi(\{0\} \times H(M'')).$$

A1.4 Application du théorème d'Andreotti et Mayer

Théorème A1.4.1. *Supposons $g'' = g - g' \geq g' \geq 1$, $T_{g',\delta} \neq \mathcal{A}_{g',\delta}$ et $U_{g'',\delta} \neq \mathcal{A}_{g'',\delta}$ (cf. section 2), ou les conditions inverses. Si $g' \geq \deg\delta$ et $g'' > \deg\delta$, alors $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$ est une composante irréductible de $N^{g}_{g-2\deg\delta}$, de codimension $g'g''$ dans $\mathcal{A}_g$.*

Démonstration. On applique le théorème d'Andreotti et Mayer (II.D.1.4.3) à un élément générique (A,Θ) de $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$. Par 3.1, $\operatorname{Sing}\Theta = \pi(F' \times F'')$ est équidimensionnel de codimension $2d$, où F' et F'' sont les lieux fixes de M' et de M''. De plus, F'' est irréductible. Notons F'_0 une composante irréductible de F' : c'est un point si $g' = d$ et $F'_0 = F'$ si $g' > d$. D'après la fin de 3.1, l'application II.D.1.4.4 est

$$\begin{aligned} F'_0 \times F'' &\longrightarrow \mathbb{P}(T_0^\vee X' \otimes T_0^\vee X'') \subset \mathbb{P}S^2 T_0^\vee A, \\ (z', z'') &\longmapsto \left[\left(\sum_r \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'') \right)_{i,j} \right]. \end{aligned} \tag{A1.4.2}$$

Les dérivées $\partial s'_r / \partial z'_i$ et $\partial s''_r / \partial z''_j$ sont des sections de $H^0(F', M')$ et $H^0(F'', M'')$ ([Gr 1], p. 92, et lemme suivant). Il suffit de montrer que (A1.4.2) est non dégénérée, puis d'appliquer II.D.1.4.3.

Lemme A1.4.3. *Soient (X, M) une variété abélienne polarisée de dimension g et $s_1, \dots, s_d$ une base de $H^0(X, M)$. Si le schéma F lieu fixe de $|M|$ a dimension $g - d > 0$, les dg sections*

$$\left\{ \left. \frac{\partial s_r}{\partial z_j}\right|_F \;\middle|\; 1 \le r \le d,\ 1 \le j \le g \right\}$$

forment une base de $H^0(F, M)$.

Démonstration. Pour $1 \le r \le d$, notons D_r le schéma défini par $s_1 = \cdots = s_r = 0$, et posons $D_0 = X$. On a $H^i(D_r, O_{D_r}(kM)) = 0$ pour $k > 0$ et $0 < i < g - r$. La restriction $H^1(X, O_X) \to H^1(D_r, O_{D_r})$ est donc un isomorphisme pour $g - r > 1$. Soit $E_r = \operatorname{div} s_r$ sur X. Pour $r \ge 1$ et $g - (r-1) > 1$, on a le diagramme à lignes exactes suivant. Pour en faciliter la lecture, on pose $V_Z = H^0(Z, O_Z(M))$ et $Q_Z = H^1(Z, O_Z)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_X/\mathbb{C}s_r & \longrightarrow & V_{E_r} & \longrightarrow & Q_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\sim & & \\ 0 & \longrightarrow & V_{D_{r-1}}/\mathbb{C}s_r & \longrightarrow & V_{D_r} & \longrightarrow & Q_{D_{r-1}} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

La première ligne s'écrit ([Gr 1], p. 95)

$$0 \longrightarrow \langle s_1, \dots, \hat{s}_r, \dots, s_d \rangle \longrightarrow \left\langle s_1, \dots, \hat{s}_r, \dots, s_d, \frac{\partial s_r}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial z_g} \right\rangle \longrightarrow H^1(X, O_X) \longrightarrow 0,$$

avec $\partial s_r / \partial z_j \mapsto d\bar{z}_j$, pour un choix convenable de coordonnées $z_1, \dots, z_g$. Par récurrence sur r, pour $1 \le r \le \min(d, g-1)$, une base de $H^0(D_r, O_{D_r}(M))$ est donc

$$\left\{ s_{r+1}, \dots, s_d,\ \frac{\partial s_\ell}{\partial z_j} \;\middle|\; 1 \le \ell \le r,\ 1 \le j \le g \right\}.$$

Le cas $r = d$ donne le lemme. □

Comme $g'' > d$, le lemme s'applique à (X'', M''). Si (A1.4.2) était dégénérée, il existerait $[\lambda_{ij}] \in \mathbb{P}^{g'g''-1}$ tel que, pour tout $z' \in F'_0$ et tout $z'' \in F''$,

$$\sum_{r,i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') \frac{\partial s''_r}{\partial z''_j}(z'') = 0.$$

Le lemme donne alors, pour tous $z' \in F'_0, j, r$,

$$\sum_i \lambda_{ij} \frac{\partial s'_r}{\partial z'_i}(z') = 0.$$

Si $g' > d$, on applique le lemme à (X', M') pour conclure que tous les λ_{ij} sont nuls. Si $g' = d$, la matrice $(\partial s'_r / \partial z'_i)(z')$ est carrée de rang d, ce qui donne la même conclusion. Ainsi (A1.4.2) est non dégénérée, et II.D.1.4.3 permet de conclure. □

Remarque A1.4.4. Sous les hypothèses de 4.1, pour (A, Θ) générique dans $\mathcal{A}^{\delta}_{g',g''}$, l'intersection dans $\mathbb{P}T_0A$ des cônes tangents aux points singuliers de Θ est la réunion disjointe

$$\mathbb{P}T_0X' \simeq \mathbb{P}^{g'-1} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}T_0X'' \simeq \mathbb{P}^{g''-1}.$$

Corollaire A1.4.5.

— $\mathcal{A}^{(2)}_{g',g-g'}$ *est une composante de* N^g_{g-4} *pour* $2 \leq g' \leq g/2$ *et* $g \geq 5$.

— $\mathcal{A}^{(3)}_{g',g-g'}$ *est une composante de* N^g_{g-6} *pour* $3 \leq g' \leq g/2$ *et* $g \geq 7$.

— $\mathcal{A}^{(2,2)}_{g',g-g'}$ *est une composante de* N^g_{g-8} *pour* $4 \leq g' \leq g/2$ *et* $g \geq 9$.

Remarque A1.4.6. Si $\theta_{\mathrm{null},g}$ désigne le lieu des variétés abéliennes principalement polarisées pour lesquelles une thétaconstante s'annule (cf. III), on a ([D 2])

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{(2)}_{g',g-g'} \subset \theta_{\mathrm{null},g} \quad \text{pour } 2 \leq g' \leq g/2,\\
&\mathcal{A}^{(3)}_{g',g-g'} \not\subset \theta_{\mathrm{null},g},\\
&\mathcal{A}^{(2,2)}_{g',g-g'} \subset \theta_{\mathrm{null},g} \quad \text{pour } 4 \leq g' \leq g/2.
\end{aligned}$$

ANNEXE 2

Variétés abéliennes polarisées de degré deux et variétés de Prym

A2.1 Résultats généraux

On rappelle qu'une variété abélienne polarisée de degré 2 est une variété abélienne X munie d'une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles amples M vérifiant $h^0(X,M) = 2$. Le groupe $H(M)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$ et, pour tout élément non nul ε de $H(M)$, il existe une isogénie de (X,M) sur une variété abélienne principalement polarisée $(X^\varepsilon, M^\varepsilon)$, de noyau $\{0,\varepsilon\}$. L'espace des modules des variétés abéliennes polarisées de degré 2 et de dimension g est noté $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

On rappelle qu'une variété abélienne polarisée est dite irréductible si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles.

Proposition A2.1.1. *Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de degré 2, irréductible. On suppose qu'un élément D de $|M|$ est réductible et que $\dim X \geq 2$. Alors il existe deux variétés abéliennes principalement polarisées (A_1,Θ_1) et (A_2,Θ_2) et une isogénie $\pi : X \to A_1 \times A_2$ de degré 2 telles que*

$$D = \pi^*(\Theta_1 \times A_2 + A_1 \times \Theta_2).$$

En particulier, il existe des variétés abéliennes polarisées non nulles de degré 2, (X_1,M_1) et (X_2,M_2), et une isogénie $\varphi : X_1 \times X_2 \to X$ de degré 2 telles que $\varphi^*M \simeq M_1 \boxtimes M_2$.

Démonstration. On écrit $D = D_1 + D_2$ et on note (cf. I.3.3)

$$K_i = H(D_i), \qquad p_i : X \longrightarrow X/K_i^0 = B_i.$$

Il existe un diviseur Θ_i sur B_i tel que $p_i^*\Theta_i = D_i$ et $H^0(B_i,\Theta_i) \simeq H^0(X,D_i)$. Comme (X,M) est irréductible, les polarisations Θ_i sont donc principales. Le noyau du morphisme $f : X \to B = B_1 \times B_2$ est

$$K_1^0 \cap K_2^0 \subset \{x \mid D_x = D\} \subsetneq H(M);$$

il est donc de cardinal au plus 2.

Si f est injective, la restriction à son image X de la polarisation produit sur B est de degré 2. Comme en A1.1.1, on a une isogénie

$$\pi : X \times Y \longrightarrow B_1 \times B_2,$$

avec $Y = \ker(B_1 \times B_2 \xrightarrow{\sim} \hat{B}_1 \times \hat{B}_2 \to \widehat{X})$, variété abélienne polarisée de degré 2.

Puisque K_i^0 est connexe, $\hat{p}_i : \hat{B}_i \to \widehat{X}$ est injective et $Y \cap (\{0\} \times B_2) = Y \cap (B_1 \times \{0\}) = \{0\}$. Les flèches $j_i : Y \to B_1 \times B_2 \to B_i$, pour $i = 1,2$, sont donc injectives et $j_i^*\Theta_i$ est ample sur Y. Si Y est de dimension n, on a (I.3.6)

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{n!}[(\mathrm{pr}_1^*\,\Theta_1 + \mathrm{pr}_2^*\,\Theta_2)|_Y]^n \\ &= \frac{1}{n!}(j_1^*\Theta_1 + j_2^*\Theta_2)^n \geq \deg j_1^*\Theta_1 + \deg j_2^*\Theta_2, \end{aligned}$$

l'inégalité étant stricte si $n > 1$. On en déduit $n = \deg j_1^*\Theta_1 = \deg j_2^*\Theta_2 = 1$. Les polarisations $j_i^*\Theta_i$ sont donc principales, et on peut écrire $B_i \simeq Y \times A_i$, où A_i est principalement polarisée. Si $g : Y \to Y \times Y$ est l'application diagonale, on a

$$X \simeq \ker(\widehat{Y} \times \widehat{A}_1 \times \widehat{Y} \times \widehat{A}_2 \xrightarrow{\hat{g}\circ \mathrm{pr}_{1,3}} \widehat{Y}).$$

Comme X est supposée irréductible, on en déduit $A_1 = A_2 = 0$ et $X \simeq Y$ est de dimension 1, ce qui contredit l'hypothèse.

Le morphisme f est donc de degré 2 sur son image A. La restriction Θ de la polarisation produit sur B à A est principale et $D = f^*\Theta$. Le diviseur Θ est alors réductible, donc aussi la variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), ce qui montre la première partie de la proposition.

Enfin, le noyau de l'isogénie duale $\widehat{\pi} : \widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2 \to \widehat{X}$ est engendré par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où ε_i est un élément non nul d'ordre 2 de $\widehat{A}_i$. Si $\widehat{Y}_i$ est le quotient de $\widehat{A}_i$ par ε_i, on a alors une isogénie de degré 2 de $\widehat{X}$ sur $\widehat{Y}_1 \times \widehat{Y}_2$, dont la transposée est l'isogénie de degré 2 de $Y_1 \times Y_2$ sur X cherchée. □

1.2. Introduisons des générateurs α, β de $H(M)$, ainsi que des éléments $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ de $\mathcal{G}(M)$ d'images respectives α, β dans $H(M)$, satisfaisant à

$$\tilde{\alpha}^2 = \tilde{\beta}^2 = 1, \qquad \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -1.$$

L'espace des sections de M invariantes par l'action de $\tilde{\alpha}$ est de dimension 1 ; on note s un générateur et $t = \tilde{\beta} \cdot s$, de sorte que $\{s, t\}$ est une base de $H^0(X, M)$.

Il résulte de la proposition ci-dessus que, si (X, M) est irréductible de dimension ≥ 2, les seuls éléments de $|M|$ qui peuvent être réductibles sont :

— $\mathrm{div}(s)$ et $\mathrm{div}(t) = \mathrm{div}(s)_\beta$, auquel cas $X^\alpha = X/\{0, \alpha\}$ est réductible ;

— $\mathrm{div}(s+t)$ et $\mathrm{div}(s-t) = \mathrm{div}(s+t)_\alpha$, auquel cas X^β est réductible ;

— $\mathrm{div}(s+it)$ et $\mathrm{div}(s-it) = \mathrm{div}(s+it)_\alpha$, auquel cas $X^{\alpha+\beta}$ est réductible.

1.3. On se place dans la situation de la proposition : on se donne des variétés abéliennes polarisées de degré 2, (X_1, M_1), (X_2, M_2) et (X, M), et une isogénie $\pi : X_1 \times X_2 \to X$ de noyau engendré par (α_1, α_2), où α_i est un élément non nul de $H(M_i)$. Alors (X, M) est irréductible si et seulement si (X_1, M_1) et (X_2, M_2) le sont.

Il suffit de montrer que, si (X, M) est réductible, c'est-à-dire s'il existe une décomposition

$$(X, M) \simeq (A, L) \times (X', M'),$$

où (A, L) est principalement polarisée irréductible et (X', M') est polarisée de degré 2, alors (X_1, M_1) ou (X_2, M_2) est réductible.

Soit (A_i, L_i) la variété abélienne principalement polarisée quotient de (X_i, M_i) par α_i. Le morphisme composé $p : A \to X \to A_1 \times A_2$ satisfait à $p^*(L_1 \boxtimes L_2) \simeq L$. Comme (A, L) est supposée irréductible, c'est un facteur direct dans (A_1, L_1), par exemple. Il est alors clair que c'est aussi un facteur direct dans (X_1, M_1), qui est donc réductible.

A2.2 Les ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$

On va maintenant étudier plus en détail les ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$ introduits en A1.1.

Rappelons brièvement la construction de leurs éléments. On prend, pour $i = 1, 2$, des éléments (X_i, M_i) de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$. On choisit aussi des générateurs α_i, β_i de $H(M_i)$. Le quotient de $X_1 \times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) est une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$.

Supposons maintenant qu'un élément D de $|M_2|$ (ou de $|M_1|$) soit réductible. La proposition précédente permet d'écrire (A, Θ) comme le quotient de $X_1 \times X_2' \times X_3'$ par le sous-groupe engendré, si par exemple $D = D_{\alpha_2}$, par

$$(0, \alpha_2', \alpha_3'), \quad (\alpha_1, \alpha_2', 0), \quad (\beta_1, \beta_2', \beta_3'),$$

avec

$$(X_2', M_2') \in \mathcal{A}_{g_2',(2)}, \quad (X_3', M_3') \in \mathcal{A}_{g_3',(2)}, \quad g_2' + g_3' = g_2,$$

où α_2', β_2' engendrent $H(M_2')$ et α_3', β_3' engendrent $H(M_3')$.

On peut bien sûr continuer le processus si l'un des systèmes $|M_1|$, $|M_2'|$, $|M_3'|$ contient un diviseur réductible de dimension > 0. Les quotients obtenus ne sont plus tous du même type ; on a en effet deux cas.

i) (A, Θ) est un quotient de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0), \quad (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0), \quad (\alpha_1, 0, 0, \alpha_4), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4).$$

C'est le cas si un élément de $|M_3'|$ invariant par translation par α_3' est réductible. ii) (A, Θ) est le quotient de $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0), \quad (\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4), \quad (0, 0, \beta_3, \beta_4), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0).$$

C'est le cas si un élément de $|M_3'|$ invariant par translation par β_3' est réductible.

2.1. On ne s'intéressera qu'au premier type. On introduit les sous-ensembles $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ de $\mathcal{A}_{g_1+\cdots+g_r}$ définis comme suit.

Soient $(X_i, M_i) \in \mathcal{A}_{g_i,(2)}$, pour $i = 1, \dots, r$; α_i, β_i des générateurs de $H(M_i)$; et $\{s^i, t^i\}$ une base de $H^0(X_i, M_i)$ choisie comme en 1.2. Le quotient de $X_1 \times \cdots \times X_r$ par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0), \quad 2 \le i \le r, \qquad (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$$

est une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) ; le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g_1+\cdots+g_r}$ ainsi construit est noté $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$.

L'espace

$$H^0(A, \Theta) \subset H^0(X_1 \times \cdots \times X_r, M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_r)$$

est engendré par $s^1 s^2 \cdots s^r + t^1 t^2 \cdots t^r$.

On peut opérer des regroupements : si X_1' est le quotient de $X_1 \times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1, α_2), (A, Θ) est encore un quotient de $X_1' \times X_3 \times \cdots \times X_r$ du type ci-dessus avec $\alpha_1' = (\alpha_1, 0)$ et $\beta_1' = (\beta_1, \beta_2)$ (images dans le quotient). On a en particulier

$$\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r} \subset \mathcal{A}^2_{g_1+g_2,g_3,\dots,g_r},$$

et ainsi de suite.

2.2. Inversement, il ressort de la discussion du début du paragraphe que tout élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,g_2}$ peut s'écrire comme élément de

$$\mathcal{A}^2_{g_1^1,\dots,g_1^r,g_2^1,\dots,g_2^s}, \qquad r,s \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{r} g_1^j = g_1, \quad \sum_{j=1}^{s} g_2^j = g_2,$$

c'est-à-dire comme quotient de $X_1^1 \times \cdots \times X_1^r \times X_2^1 \times \cdots \times X_2^s$, avec la propriété supplémentaire que $\operatorname{div} s_j^i$ est irréductible lorsque $g_j^i \geq 2$.

La proposition suivante détermine dans quel cas un élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ est irréductible. On pourra remarquer que l'hypothèse « (X_i, M_i) irréductible » est trivialement nécessaire.

Proposition A2.2.3. *Soit (A,Θ) un élément de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$, exprimé comme quotient d'un produit de $r \geq 2$ variétés abéliennes polarisées (X_i, M_i) de degré 2, supposées irréductibles. Alors (A,Θ) est irréductible, sauf dans le cas suivant : $r = 2, g_1 = g_2 = 1$ et il existe un isomorphisme $\psi : (X_1, M_1) \xrightarrow{\sim} (X_2, M_2)$ tel que $\psi(\alpha_1) = \alpha_2$ et $\psi(\beta_1) = \beta_2$. Dans ce dernier cas, (A,Θ) est isomorphe à $X_1 \times X_1$ munie de la polarisation produit.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $r = 2$. Avec les notations de 2.1, une équation de $D = \pi^*\Theta$ est $s^1 s^2 + t^1 t^2$. Supposons D réductible. Si une composante Z de D ne se projetait pas surjectivement sur X_1, on aurait $Z = D_1 \times X_2$, avec D_1 diviseur de X_1. Mais s^1 et t^1 seraient alors nulles sur D_1. On aurait donc $\dim X_1 \geq 2$ et, par 1.2, (X_1, M_1) réductible.

Toute composante de D se projette donc surjectivement sur X_1 et sur X_2. Si on écarte provisoirement le cas $g_1 = g_2 = 1$, on a par exemple $g_2 > 1$. Pour x générique dans X_1, $D \cap (\{x\} \times X_2)$ est alors réductible, de sorte que $\operatorname{div}(ps^2 + qt^2)$ est réductible pour tout $(p : q) \in \mathbf{P}^1$. De nouveau, cela contredit 1.2.

Examinons le cas $g_1 = g_2 = 1$. Si (A,Θ) est réductible, on peut écrire $\pi : X_1 \times X_2 \to E_1 \times E_2$. Si un morphisme induit $u_j^i : X_i \to E_j$ était nul, u_{3-j}^i serait un isomorphisme puisque $X_i \to E_1 \times E_2$ est injectif. Mais la polarisation induite sur X_i serait alors principale, contrairement à l'hypothèse.

Les morphismes u_j^i sont donc surjectifs et

$$\deg((u_1^i)^*\Theta_1 + (u_2^i)^*\Theta_2) = 2.$$

Les polarisations $(u_j^i)^*\Theta_j$ sont donc principales et les u_j^i sont des isomorphismes, via lesquels on identifie en particulier X_2 à X_1, en faisant correspondre les générateurs choisis. Le noyau de π est alors engendré par (α_1, α_1) et (β_1, β_1). Le quotient π s'identifie au morphisme

$$X_1 \times X_1 \longrightarrow X_1 \times X_1, \qquad (x,y) \longmapsto (x+y, x-y).$$

□

On peut déduire de 2.3 le résultat suivant, qui complète les conclusions de 1.1 et de 1.2.

Proposition A2.2.4. *Soit (X,M) une variété abélienne polarisée de degré 2 et de dimension g, irréductible. Alors au plus un des trois quotients $(X^\varepsilon, M^\varepsilon)$, $\varepsilon \in H(M) \setminus \{0\}$, est réductible, sauf si X est le quotient d'un produit $E \times E$, où E est une courbe elliptique, par le sous-groupe $\{0, (\alpha,\alpha)\}$, avec $0 \neq \alpha \in E[2]$, de sorte que $\dim X = 2$.*

Dans ce dernier cas, les trois quotients sont réductibles si et seulement si E a multiplication complexe par i ($j(E) = 1728$) et si α est l'unique élément non nul de $E[2]$ invariant par cette multiplication.

Démonstration. Supposons

$$(X^\alpha, M^\alpha) = (X, M)/\{0, \alpha\} \simeq (A_1 \times A_2, L_1 \boxtimes L_2).$$

Comme à la fin de la démonstration de 1.1, on en déduit une isogénie de degré 2, $\pi : X_1 \times X_2 \to X$, où les (X_i, M_i) sont irréductibles de degré 2, $H(M_i)$ est engendré par α_i, β_i, et $\ker \pi$ par (α_1, α_2), avec $\alpha = \pi(\alpha_1, 0) = \pi(0, \alpha_2)$ et $\beta = \pi(\beta_1, \beta_2)$.

La variété abélienne principalement polarisée X^β (respectivement $X^{\alpha+\beta}$) est donc le quotient de $X_1 \times X_2$ par le sous-groupe engendré par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) (respectivement (α_1, α_2) et $(\alpha_1 + \beta_1, \beta_2)$). Elle est par conséquent irréductible d'après 2.3, sauf s'il existe un isomorphisme $\psi : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ satisfaisant à $\psi(\alpha_1) = \alpha_2$, $\psi(\beta_1) = \beta_2$ (respectivement $\psi(\alpha_1) = \alpha_2$, $\psi(\alpha_1 + \beta_1) = \beta_2$), et si $\dim X_i = 1$.

Ces deux éventualités ne peuvent se produire simultanément que s'il existe un automorphisme τ de X_1 satisfaisant à $\tau(\alpha_1) = \alpha_1$, $\tau(\beta_1) = \alpha_1 + \beta_1$. C'est le cas si et seulement si X_1 est la courbe elliptique avec multiplication complexe par i ($j = 1728$). □

A2.3 Les familles $\mathcal{D}^2_{g_1,\dots,g_r}$

Le but de ce paragraphe est l'étude de $\mathcal{D}^2_{g_1,\dots,g_r}$, sous-ensemble de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ constitué des variétés construites, comme en 2.1, à l'aide d'éléments (X_i, M_i) d'un sous-ensemble $\mathcal{D}_{g_i,(2)}$ de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$ que l'on va maintenant définir. On appellera *revêtement admissible ramifié en quatre points* tout revêtement qui s'identifie au quotient d'une courbe stable $\widetilde{C}$ de genre $2g-1$ par une involution σ satisfaisant aux conditions suivantes.

1. σ a exactement quatre points fixes lisses sur $\widetilde{C}$, notés p_1, p_2, p_3, p_4.
2. Aux autres points fixes éventuels, qui sont donc des points doubles, les deux branches ne sont pas échangées.
3. Le nombre de points doubles échangés par σ est égal au nombre de composantes de $\widetilde{C}$ échangées par σ.

La variété de Prym, au sens de [Mu 2], d'un revêtement admissible $\pi : \widetilde{C} \to C = \widetilde{C}/\sigma$ est la variété abélienne $\ker(J\widetilde{C} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} JC)$ munie de la polarisation induite par la polarisation principale de $J\widetilde{C}$. Sa variété duale, isomorphe à $J\widetilde{C}/\pi^*JC$, est alors munie d'une polarisation de degré deux.

On notera $\mathcal{D}_{g,(2)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g,(2)}$ formé des variétés duales des variétés de Prym des revêtements admissibles ramifiés en quatre points. Ce sont des variétés abéliennes polarisées de degré 2. En dimension 1, on adopte la convention usuelle : les revêtements lisses de genre 1 de $\mathbf{P}^1$, ramifiés en quatre points, sont autorisés. Ainsi $\mathcal{D}_{1,(2)} = \mathcal{A}_{1,(2)}$; l'argument par courbes stables ci-dessous concerne $g \geq 2$.

3.1. La courbe $\widetilde{C}' = \widetilde{C}/(p_1 \sim p_2,\ p_3 \sim p_4)$ obtenue en identifiant p_1 à p_2 et p_3 à p_4, munie de l'involution induite σ', définit un revêtement admissible au sens de [Be 1]. On a un

diagramme ([Be 1], p. 159) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\mathbb{Z}/2)^2 & \to & P' \cup P'^{-} & \to & \widehat{X} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & J\widetilde{C}' & \longrightarrow & J\widetilde{C} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & JC' & \longrightarrow & JC & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où P' est la variété de Prym principalement polarisée associée à $(\widetilde{C}', \sigma')$ et $\widehat{X}$ la variété de Prym associée à $(\widetilde{C}, \sigma)$. On a donc une isogénie de degré 2 de X sur $\widehat{P}'$. La variété abélienne (X, M) est dans $\mathcal{D}_{g,(2)}$. Les trois isogénies obtenues en considérant les trois courbes $\widetilde{C}'$, $\widetilde{C}'' = \widetilde{C}/(p_1 \sim p_3,\ p_2 \sim p_4)$ et $\widetilde{C}''' = \widetilde{C}/(p_1 \sim p_4,\ p_2 \sim p_3)$ correspondent aux quotients de X par les trois éléments non nuls de $H(M)$.

Proposition A2.3.2. *La sous-variété $\mathcal{D}_{g,(2)}$ de $\mathcal{A}_{g,(2)}$ est fermée irréductible.*

Démonstration. On considère tout d'abord une courbe stable connexe $\widetilde{C}$ de genre $2g-1$, avec au plus des points doubles ordinaires comme singularités, munie d'une involution σ. On note C la courbe quotient et $P = (\ker \mathrm{Nm})^0$ la variété de Prym associée. On a l'analogue suivant du lemme 5.1 de [Be 1].

Lemme A2.3.3. *Le revêtement $\widetilde{C} \to C$ est admissible au sens précédent si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *σ n'est l'identité sur aucune composante de $\widetilde{C}$;*
- *$p_a(C) = g - 1$;*
- *P est une variété abélienne.*

Démonstration. On suppose ces trois conditions vérifiées. La même démonstration que celle du lemme 5.1 de loc. cit. donne alors, avec les notations de Beauville,

$$n_e + n'_f = c_e, \qquad \frac{r}{2} + n'_f = 2.$$

Pour montrer que le revêtement est admissible, il suffit donc de montrer que le nombre n'_f de points doubles de $\widetilde{C}$ fixes sous l'action de σ, avec les deux branches échangées, est nul.

Soit x un tel point et $\widetilde{N}$ la normalisation de $\widetilde{C}$ en x. On a encore $\widetilde{N}/\sigma \simeq C$ et $\ker(J\widetilde{C} \to J\widetilde{N})^0 \subset P$. Comme P est par hypothèse une variété abélienne, $J\widetilde{C} \to J\widetilde{N}$ est un isomorphisme, donc $\widetilde{N}$ est non connexe. On écrit $\widetilde{N} = \widetilde{N}_1 \cup \widetilde{N}_2$, avec $\widetilde{N}_i$ connexe. L'ensemble $\{y \in \widetilde{N}_1 \mid \sigma y \in \widetilde{N}_2\}$ est alors ouvert, fermé, et contient l'un des points au-dessus de x. On en déduit $\widetilde{N} = \widetilde{N}_1 \sqcup \sigma\widetilde{N}_1$, de sorte que $g(\widetilde{C}) = 2g(\widetilde{N}_1)$, contradiction. Ceci prouve $n'_f = 0$, donc le lemme. □

On procède alors comme dans le paragraphe 6 de loc. cit. Pour les mêmes raisons, il existe une variété irréductible complète $\overline{S}$, une famille de courbes stables $\widetilde{\mathcal{C}} \to \overline{S}$ munie d'une $\overline{S}$-involution σ, telle que :

- pour tout $s \in \overline{S}$, l'involution induite sur $\widetilde{\mathcal{C}}_s$ n'est l'identité sur aucune composante ;

— $\widetilde{C}_s$ est de genre $2g-1$ et $\widetilde{C}_s/\sigma_s$ est de genre $g-1$;

— pour toute courbe lisse connexe $\widetilde{C}$ de genre $2g-1$ munie d'une involution avec quatre points fixes, la paire $(\widetilde{C},\sigma)$ est isomorphe à $(\widetilde{C}_s,\sigma_s)$ pour un $s\in\overline{S}$.

On définit de la même façon

$$\overline{\mathcal{P}} = \ker(\mathrm{Nm} : \mathrm{Pic}^0(\widetilde{\mathcal{C}}/\overline{S}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}/\overline{S}))^0.$$

C'est un espace algébrique lisse sur $\overline{S}$. L'ensemble S des points s de $\overline{S}$ pour lesquels $\overline{\mathcal{P}}_s$ est une variété abélienne est un ouvert de $\overline{S}$, et l'application induite $p : S \to \mathcal{A}_{g,\delta_g}$, où $\delta_g = (1,2,\dots,2)$ est le type de polarisation de degré 2^{g-1}, est propre (proposition 6.3 de loc. cit.). On en déduit facilement que $\mathcal{P}_{g,(2)}$ est fermé dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$.

Pour prouver l'irréductibilité, on peut, par une étude des déformations locales d'une paire admissible (cf. [H–M], p. 29 et 33), prouver qu'elle est déformation d'une paire admissible $(\widetilde{C},\sigma)$ avec $\widetilde{C}$ lisse connexe. L'irréductibilité de la famille de ces dernières paires découle alors du fait suivant, déjà démontré dans l'introduction de II.D : si $\mathcal{C}\to S$ est une famille irréductible de courbes lisses et si on note $\mathcal{C}_S^4 = \mathcal{C}\times_S\mathcal{C}\times_S\mathcal{C}\times_S\mathcal{C}$ et $\mathcal{J}^d = \mathrm{Pic}^d(\mathcal{C}/S)$ le schéma de Picard relatif en degré d, et $m : \mathcal{J}^2 \to \mathcal{J}^4$ l'élévation au carré, alors le S-schéma $\mathcal{J}^2\times_{\mathcal{J}^4}\mathcal{C}_S^4$ est irréductible. □

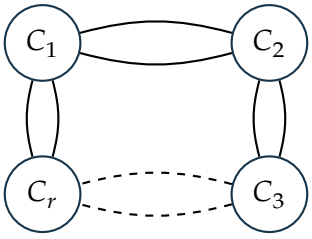
3.4. On définit maintenant $\mathcal{P}_g^2 \subset \mathcal{A}_g$ comme l'ensemble des quotients d'éléments (P,M) de $\mathcal{P}_{g,(2)}$ par un élément non nul de $H(M)$. En vertu de 3.1, c'est aussi l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes stables de genre $g+1$ avec au moins deux points doubles. C'est un fermé irréductible de $\mathcal{P}_g$.

On définit aussi $\mathcal{P}^2_{g_1,\dots,g_r}$ comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ construits comme en 2.1 à l'aide d'éléments (X_i,M_i) de $\mathcal{P}_{g_i,(2)}$. Il résulte de la proposition suivante et de sa démonstration qu'on a :

$$\mathcal{P}^2_{g_1,\dots,g_r} \subset \mathcal{P}_{g_1+\cdots+g_r}. \tag{A2.3.5}$$

3.6. Tout élément de $\mathcal{P}^2_{g_1,g_2}$ peut s'écrire comme un quotient de $X_1^1\times\cdots\times X_1^r\times X_2^1\times\cdots\times X_2^s$, avec, dans les notations de 2.1, $\mathrm{div}\, s_j^i$ irréductible lorsque $\dim X_j^i \geq 2$, et $X_j^i \in \mathcal{P}_{g_j^i,(2)}$.

3.7. $\mathcal{P}^2_{g_1,\dots,g_r}$ est l'ensemble des variétés de Prym associées aux revêtements admissibles des courbes stables réunion de r courbes $C_1,\dots,C_r$ de genres respectifs $g_1-1,\dots,g_r-1$, se coupant de la façon suivante. Le graphe d'incidence représente chaque composante par un sommet et chaque point double par une arête : deux composantes successives du cycle se rencontrent en deux points.



Proposition A2.3.8. *Soient* $(X_1,M_1)\in\mathcal{A}_{g_1,(2)}$, $(X_2,M_2)\in\mathcal{A}_{g_2,(2)}$, $g=g_1+g_2$, *et* $(X,M)\in\mathcal{A}_{g,(2)}$ *le quotient de* $X_1\times X_2$ *par le sous-groupe engendré par* (α_1,α_2), *où* α_i *est un élément non nul de* $H(M_i)$. *Alors*

$$X\in\mathcal{P}_{g,(2)} \quad\Longleftrightarrow\quad X_1\in\mathcal{P}_{g_1,(2)} \text{ et } X_2\in\mathcal{P}_{g_2,(2)}.$$

Démonstration. Si $(X_i, M_i) \in \mathcal{P}_{g_i,(2)}$, $\widehat{X}_i$ est la variété de Prym d'un revêtement double admissible $\pi_i : \widetilde{C}_i \to C_i$, ramifié en quatre points $p_1^i, \dots, p_4^i$ lisses sur $\widetilde{C}_i$. Comme expliqué en 3.1, l'élément α_i de $H(M_i)$ correspond à un choix de deux de ces points, soit p_1^i, p_2^i.

Soit $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_1 \cup \widetilde{C}_2)/(p_1^1 \sim p_1^2,\ p_2^1 \sim p_2^2)$, munie de l'involution induite σ. Le revêtement associé à $(\widetilde{C}, \sigma)$ est admissible, ramifié aux quatre points $p_3^1, p_4^1, p_3^2, p_4^2$. Sa variété de Prym P s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow P \longrightarrow \widehat{X}_1 \times \widehat{X}_2 \longrightarrow 0,$$

et X est isomorphe à $\widehat{P}$.

Réciproquement, si $X \in \mathcal{P}_{g,(2)}$, $\widehat{X}$ est une variété de Prym associée à $(\widetilde{C}, \sigma)$. Si $p_1, \dots, p_4$ sont les points fixes de σ lisses sur $\widetilde{C}$, un des trois revêtements admissibles $\widetilde{C}' \to \widetilde{C}'/\sigma'$, $\widetilde{C}'' \to \widetilde{C}''/\sigma''$, $\widetilde{C}''' \to \widetilde{C}'''/\sigma'''$ (cf. 3.1) a comme variété de Prym le produit $P_1 \times P_2$, avec $P_i \simeq \widehat{P}_i = X_i/\{0, \alpha_i\}$.

Faisons une démonstration par récurrence, en supposant la proposition vraie en dimension $< g$. *Premier cas : σ échange certaines composantes de $\widetilde{C}$.* Il résulte alors du théorème 5.4 de [Be 1] qu'on peut écrire

$$\widetilde{C} = A \cup \widetilde{B} \cup \sigma A, \quad p_1, \dots, p_4 \in \widetilde{B}, \qquad X \simeq JA \times Y,$$

où $Y = \widehat{\mathrm{Prym}(\widetilde{B}, \sigma)} \in \mathcal{P}_{h,(2)}$, $h < g$. On peut toujours, quitte à faire passer des facteurs dans Y, supposer JA irréductible. Il résulte alors de la démonstration de 1.3 qu'on peut écrire, par exemple, $X_1 \simeq JA \times Y_1$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'isogénie $Y_1 \times X_2 \to Y$ pour prouver le résultat.

Deuxième cas : σ n'échange pas de composantes de $\widetilde{C}$. Il ressort du théorème 4.10 de [Be 1] qu'on est dans l'un des cas suivants.

— La courbe C' est hyperelliptique. La courbe C est alors hyperelliptique et, si $\varphi : C \to \mathbf{P}^1$ est le revêtement hyperelliptique, $\varphi p_1 = \varphi p_2$ et $\varphi p_3 = \varphi p_4$. On déduit facilement de II.D.1, ou d'une analyse du type de celle de [Mu 2], p. 346, qu'on a, avec les notations du paragraphe 4, $X_i \in \mathcal{H}_{g_i,(2)}$, ce qui, avec 4.1, entraîne la conclusion.

— La courbe C' est réunion de deux courbes C_1', C_2' se coupant en deux points.

1) Si p_1, p_2, p_3, p_4 sont sur $\widetilde{C}_2$, alors X est réductible : $X \simeq P' \times X'$, où $P' = \mathrm{Prym}(\widetilde{C}_1' \to C_1')$ est principalement polarisée et $X' = \mathrm{Prym}(\widetilde{C_2} \to C_2)$ est polarisée de degré 2.

Tout facteur irréductible (A, L) de P' est encore une variété de Prym et, par la démonstration de 1.3, c'est aussi un facteur de (X_1, M_1), par exemple : $X_1 \simeq A \times Y_1$. Par hypothèse de récurrence, X_2 et Y_1 sont duales de variétés de Prym. Il en est de même de X_1, et la démonstration dans ce cas est terminée.

2) Si, au contraire, on a par exemple $p_1, p_2 \in \widetilde{C}_1$ et $p_3, p_4 \in \widetilde{C}_2$, les variétés abéliennes $X_i' = \mathrm{Prym}(\widetilde{C_i} \to C_i)$ sont polarisées de degré 2 et admettent une isogénie de degré 2 sur $P_i' = \mathrm{Prym}(\widetilde{C}_i' \to C_i')$. On a $P_1 \times P_2 \simeq P_1' \times P_2'$, de sorte qu'on peut écrire $P_i \simeq P_{i,1} \times P_{i,2}$, $P_j' \simeq P_{1,j} \times P_{2,j}$, où les $P_{i,j}$ sont des variétés de Prym. L'isogénie $X_j' \to P_j'$ correspond à

$$\varepsilon_j' = (\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}) \in P_j'[2] = P_{1,j}[2] \times P_{2,j}[2].$$

Si $\varepsilon_{i,j} = 0$, on pose $X_{i,j} = P_{i,j}$ et l'on transporte ce facteur de Prym principalement polarisé comme dans le premier cas. Sinon, soit $X_{i,j} \to P_{i,j}$ l'isogénie correspondante de degré 2. Lorsque les deux composantes d'une colonne sont non nulles, l'isogénie de degré 2,

$X_{1,j}\times X_{2,j}\to X'_j$, et la récurrence donnent $X_{i,j}\in\mathcal{D}_{*,(2)}$; sinon, la colonne est un produit et l'on sépare son facteur principalement polarisé. On réassemble de même chaque ligne par le sens direct de la proposition, en transportant les facteurs principalement polarisés. Ceci termine la démonstration. □

A2.4 Les familles $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}$

De nouveau, $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ constitué des variétés construites comme en 2.1 à l'aide d'éléments (X_i,M_i) de $\mathcal{H}_{g_i,(2)}$, sous-ensemble de $\mathcal{A}_{g_i,(2)}$ défini comme suit.

Pour deux points de Weierstrass distincts Q_0,Q_1 d'une courbe hyperelliptique lisse H de genre g, le point $O_H(Q_0-Q_1)$ est d'ordre 2 dans JH. On peut donc lui associer une isogénie $X\to JH$ de degré 2. L'ensemble $\mathcal{H}_{g,(2)}$ est l'ensemble des variétés abéliennes polarisées de degré 2 ainsi construites. C'est une famille irréductible, non fermée dans $\mathcal{A}_{g,(2)}$, sauf pour $g=1$.

Soit $\varphi : H\to\mathbf{P}^1$ le morphisme hyperelliptique, ramifié en $P_0=\varphi(Q_0)$, $P_1=\varphi(Q_1)$, $P_2,\dots,P_{2g+1}$, et $\psi : C\to\mathbf{P}^1$ le revêtement double ramifié en $P_2,\dots,P_{2g+1}$. Il ressort de II.E.1 que la variété $X\in\mathcal{H}_{g,(2)}$ construite ci-dessus est la variété duale de la variété de Prym du revêtement de C ramifié sur $\psi^*(P_0+P_1)$ et associé à $\psi^*O_{\mathbf{P}^1}(1)$. On a donc

$$\mathcal{H}_{g,(2)}\subset\mathcal{D}_{g,(2)}. \tag{A2.4.1}$$

Si $(X,M)\in\mathcal{H}_{g,(2)}$, l'isogénie $X\to JH$ distingue un élément non nul α_X de $H(M)$. La famille des quotients des éléments (X,M) de $\mathcal{H}_{g,(2)}$ par un élément non nul de $H(M)$ donne, pour $g\geq 3$, deux composantes irréductibles : la famille $\mathcal{H}_g$ des jacobiennes hyperelliptiques et une famille notée $\mathcal{H}^2_g$, obtenue par les deux autres quotients. En petite dimension, ces images peuvent coïncider ; la notation $\mathcal{H}^2_g$ désigne toujours l'image des deux quotients autres que celui par α_X.

Dans l'interprétation 3.1 de ces quotients, le premier cas correspond à $C'=C/(x_0\sim\tau x_0,\ x_1\sim\tau x_1)$, où l'on a posé $\psi^*P_i=x_i+\tau x_i$ pour $i=0,1$, le second à $C''=C/(x_0\sim x_1,\ \tau x_0\sim\tau x_1)$ et $C'''=C/(x_0\sim\tau x_1,\ x_1\sim\tau x_0)$.

4.2. Pour $g\geq 3$, C'' et C''' sont irréductibles non hyperelliptiques ; le théorème 4.10 de [Be 1] donne donc l'irréductibilité des variétés principalement polarisées de $\mathcal{H}^2_g$. Elle est automatique pour $g=1$; pour $g=2$, on garde les exceptions de 2.4.

4.3. On note $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}\subset\mathcal{A}^2_{g_1,\dots,g_r}$ l'ensemble des quotients de $\prod_{i=1}^r(X_i,M_i)$, où $(X_i,M_i)\in\mathcal{H}_{g_i,(2)}$, par le sous-groupe engendré par

$$(\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_i,0,\dots,0),\quad 2\leq i\leq r,\qquad(\alpha_{X_1},\alpha_{X_2},\dots,\alpha_{X_r}),$$

où $\alpha_i\in H(M_i)\setminus\{0,\alpha_{X_i}\}$.

Par 3.5 et 4.1, on a

$$\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}\subset\mathcal{D}^2_{g_1,\dots,g_r}. \tag{A2.4.4}$$

4.5. Les éléments de $\mathcal{H}^2_{g_1,\dots,g_r}$, $r\geq 2$, sont principalement polarisés irréductibles, sauf dans le cas de 2.3 : $r=2$, $g_1=g_2=1$, et un isomorphisme polarisé des courbes elliptiques apparie les deux paires de générateurs. Le quotient est alors un produit de deux courbes elliptiques. Cela résulte de 1.3, 2.3 et 4.3.

ANNEXE 3

Sous-variétés spéciales et intersections de diviseurs thêta dans les variétés de Prym

A3.1 Sous-variétés spéciales des variétés de Prym

Beauville a introduit dans [Be 3] la sous-variété spéciale de la variété de Prym P d'un revêtement double étale de courbes lisses $\pi\colon \widetilde{C} \to C$, associée à un g^r_d complet sur C. Si L est le faisceau inversible de degré d correspondant sur C et $\tilde{L}$ un faisceau inversible sur $\widetilde{C}$ tel que $\mathrm{Nm}\,\tilde{L} = L$, elle est définie par

$$V_0 = P \cap \{O_{\widetilde{C}}(E) \otimes \tilde{L}^{-1} \mid E \geq 0,\ \pi_* E \in |L|\}.$$

On peut étendre cette définition à un revêtement admissible de courbes stables, en remplaçant « diviseur effectif » par « diviseur de Cartier effectif » ([Be 3], remarque 4). On peut aussi considérer des g^r_d non nécessairement complets.

Le théorème suivant donne un critère d'irréductibilité qui généralise le corollaire de [Be 3], p. 365.

Théorème A3.1.1. *Soient $\widetilde{C}$ une courbe stable irréductible, $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ un revêtement admissible et $\phi\colon C \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ une application rationnelle birationnelle sur son image. Alors la sous-variété spéciale associée au système linéaire défini par ϕ est irréductible.*

Démonstration. Il suffit de trouver un ouvert Ω de points lisses de C tel que

$$\left\{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_d) \in \widetilde{C}^d \;\middle|\; \pi\tilde{x}_i \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^{d} \pi\tilde{x}_i \in |L|\right\}$$

ait au plus deux composantes. Par [Be 3], p. 359, et avec ses notations, celles-ci sont denses respectivement dans S_0 et S_1, de sorte que S_0 et $V_0 = \widetilde{\phi}(S_0)$ sont irréductibles. Cela résulte du théorème suivant. □

Théorème A3.1.2. *Soient $C \subset \mathbb{P}^r$ une courbe irréductible de degré d, $\pi\colon \widetilde{C} \to C$ un morphisme de degré 2, avec $\widetilde{C}$ irréductible, et $U \subset (\mathbb{P}^r)^*$ l'ouvert des hyperplans coupant C transversalement en d points lisses au-dessus desquels π n'est pas ramifié. Pour $1 \leq m \leq d$, posons*

$$I(m) = \{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m, H) \in \widetilde{C}^m \times U \mid \pi\tilde{x}_i \in H,\ \pi\tilde{x}_i \neq \pi\tilde{x}_j\ (i \neq j)\}.$$

Alors $I(m)$ est irréductible pour $m < d$, et $I(d)$ a au plus deux composantes irréductibles.

Démonstration. Comme en II.B.6, considérons le groupe de monodromie G du morphisme étale $p\colon I(1) \to U$. Il agit sur la fibre $\{a_1^+, \dots, a_d^+, a_1^-, \dots, a_d^-\}$ d'un point base de U, avec $a_i^+ = \sigma a_i^-$, où σ est l'involution de $\widetilde{C}$ associée à π.

Le cas $d = 1$ est immédiat. Pour $d \geq 2$, la projection de $I(2)$ sur l'ouvert de $\widetilde{C}^2$ défini par $\pi\tilde{x}_1 \neq \pi\tilde{x}_2$ a pour fibres des ouverts non vides d'espaces projectifs de dimension $r-2$. Donc $I(2)$ est irréductible. Ainsi G agit transitivement sur les quadruplets ordonnés

$(a_i^\alpha, a_j^\beta, a_i^{-\alpha}, a_j^{-\beta})$, avec $i \neq j$ et $\alpha, \beta \in \{-, +\}$. Comme en II.B.6, une tangence simple donne dans G une double transposition, que l'on peut supposer égale à $(a_1^+, a_2^+)(a_1^-, a_2^-)$.

Par conjugaison, G contient donc toutes les permutations

$$(a_i^\alpha, a_j^\beta)(a_i^{-\alpha}, a_j^{-\beta}) \qquad (i \neq j,\ \alpha, \beta = \pm).$$

Leurs produits donnent les permutations simultanées des indices et les changements de signe sur deux indices quelconques. Il reste à étudier les m-uplets ordonnés $(a_{j(1)}^{\alpha_1}, \dots, a_{j(m)}^{\alpha_m})$, où j est injective. Une permutation simultanée envoie $j(k)$ sur k. On change ensuite les signes négatifs deux par deux. Pour $m < d$, un indice inutilisé permet aussi de changer un unique signe parmi les indices choisis : tous les m-uplets appartiennent donc à l'orbite de $(a_1^+, \dots, a_m^+)$. Pour $m = d$, il reste au plus les deux orbites représentées par $(a_1^+, \dots, a_d^+)$ et $(a_1^+, \dots, a_{d-1}^+, a_d^-)$. □

A3.2 Les intersections $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ dans les variétés de Prym

On a déjà remarqué (IV.A.5.1 et IV.B.1.1) que, si $\pi\colon \widetilde{C} \to \widetilde{C}/\sigma = C$ est un revêtement de courbes lisses irréductibles de variété de Prym (P, Ξ) et si $r, s \in \widetilde{C}$ avec $r \neq \sigma s$, l'intersection $\Xi \cdot \Xi_{r+s-\sigma r-\sigma s}$ est isomorphe à la sous-variété spéciale associée à $L = \omega_C(-\pi r - \pi s)$.

C'est encore vrai si π est admissible, $\widetilde{C}, C$ stables et r, s lisses sur $\widetilde{C}$. Lorsqu'un point lisse x tend vers un point singulier r de $\widetilde{C}$, l'élément $O_{\widetilde{C}}(x - \sigma x) \in P^-$ tend vers un élément d'ordre deux $\varepsilon(r) \in P^-$. Ceci conduit à étudier $\Xi \cdot \Xi_{\varepsilon(r)+s-\sigma s}$ pour r singulier et s lisse.

Lemme A3.2.1. *Soit $n\colon N \to C$ la normalisation de C en $\pi(r)$. Alors $\Xi \cdot \Xi_{\varepsilon(r)+s-\sigma s}$ est la sous-variété spéciale associée à l'application rationnelle $\phi_{|\omega_N(-\pi s)|} \circ n^{-1}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer

$$\Xi \cdot \Xi_{\varepsilon(r)+s-\sigma s} = \{L \in P^+ \mid \exists u \in H^0(L) \setminus \{0\},\ u(s) = u(r) = 0\}.$$

Soient $r = w_1, w_2, \dots, w_n$ les points singuliers de $\widetilde{C}$, et L_r le faisceau inversible associé à $\varepsilon(r)$. Posons $a = \varepsilon(r) + s - \sigma s \in P$. On a les suites exactes suivantes, où $\tilde{n}$ désigne la normalisation de $\widetilde{C}$:

$$0 \longrightarrow H^0(L \otimes L_r^{-1}(\sigma s - s)) \longrightarrow H^0(\tilde{n}^* L(\sigma s - s)) \xrightarrow{\delta_r} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}_{w_j},$$

$$\delta_r(u) = (u(p_1) + u(q_1), u(p_2) - u(q_2), \dots),$$

$$0 \longrightarrow H^0(L(\sigma s - s)) \longrightarrow H^0(\tilde{n}^* L(\sigma s - s)) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}_{w_j},$$

$$\delta(u) = (u(p_1) - u(q_1), u(p_2) - u(q_2), \dots),$$

où p_j, q_j sont les points de la normalisée de $\widetilde{C}$ au-dessus de w_j.

Soit d'abord $L \in P^+$ muni d'une section non nulle $u \in H^0(L)$ s'annulant en $r = w_1$ et en s. Elle définit une section de $L \otimes L_r^{-1}(-s)$, donc $h^0(L \otimes L_r^{-1}(\sigma s - s)) \geq 1$. Puisque ce dernier faisceau est dans P^+, il appartient à Ξ et $L \in \Xi_a$. De même, $h^0(L) \geq 1$ implique $L \in \Xi$.

Réciproquement, si $L \in \Xi \cdot \Xi_a$, alors $h^0(L) \geq 2$ et $h^0(L \otimes L_r^{-1}(\sigma s - s)) \geq 2$. Si $h^0(L(\sigma s - s)) \geq 3$, il suffit de choisir une section u s'annulant en σs et en r. Si $h^0(L(\sigma s - s)) = 1$, alors σs est fixe dans $|L(\sigma s - s)|$. Choisissons une section u de $L \otimes L_r^{-1}(\sigma s - s)$ nulle en r. On a

$$\tilde{n}^* u \in H^0(\tilde{n}^* L(\sigma s - s)), \qquad \tilde{n}^* u(p_1) = \tilde{n}^* u(q_1) = 0,$$
$$\tilde{n}^* u(p_j) = \tilde{n}^* u(q_j) \quad (j \geq 2).$$

Ceci définit une section de $L(\sigma s - s)$ nulle en r, et en σs comme toutes les sections de ce faisceau. □

Le théorème 1.1 donne alors le critère suivant pour l'irréductibilité de $\Xi \cdot \Xi_{[r,s]}$. Comme en IV.B, on note $[r,s] \in P$ l'élément associé à $O_{\widetilde{C}}(r+s-\sigma r-\sigma s)$ si r est lisse, et à $O_{\widetilde{C}}(s-\sigma s) \otimes L_r$ sinon ; s est toujours supposé lisse.

Proposition A3.2.2. *Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement admissible de courbes stables irréductibles, avec C non hyperelliptique de genre $g+1 \geq 5$. Soient $r, s \in \widetilde{C}$, avec s lisse et $r \neq \sigma s$. Soit $\phi : C \to \mathbb{P}^g$ l'application canonique et Γ son image. Supposons que la projection $\Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-2}$ depuis la droite joignant $\phi(\pi r)$ à $\phi(\pi s)$ soit birationnelle sur son image (on prend la tangente si $r = s$). Alors $\Xi \cdot \Xi_{[r,s]}$ est intègre.*

ANNEXE 4

Quelques résultats sur les courbes superelliptiques

Rappelons qu'une structure superelliptique sur une courbe lisse C est une involution τ telle que C/τ soit une courbe elliptique E. Nous notons $p\colon C \to E$ le quotient, $O_E(-\delta) = \bigwedge^2 p_* O_C$, et $\Delta \in |2\delta|$ le diviseur de branchement sur E (I.2.6).

Note terminologique. Le terme historique « superelliptique » employé ici correspond au terme actuel « bielliptique ».

Une courbe superelliptique est une courbe admettant une telle structure. Celle-ci est unique en genre ≥ 6 [Sho 2], mais il peut y en avoir jusqu'à cinq en genre 5 [Te]. En tout genre ≥ 2, il n'y en a qu'un nombre fini, puisque le groupe d'automorphismes de la courbe est fini. Nous rassemblons les résultats dont nous aurons besoin.

Proposition A4.1. *Soient τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 6$, $p\colon C \to E$ le quotient et $A \in \mathrm{Pic}^{g-1} E$ fixé. Posons*

$$Z = \{p^*M \otimes O_C(D) \mid M \in \mathrm{Pic}^2 E,\ D \in C^{(g-5)},\ M^2 \otimes O_E(p_*D) \simeq A\}.$$

Alors Z est irréductible de dimension $g-5$, et

$$\{a \in \mathrm{Pic}^0 C \mid Z + a \subset \Theta\} = \{O_C(p^*e - x - y) \mid x, y \in C,\ e \in E\}.$$

Démonstration. L'irréductibilité de Z découle de II.D.1.2.10 et l'inclusion $\supset$ est évidente.

Tout $a \in \mathrm{Pic}^0 C$ s'écrit $a = p^*M^{-1} \otimes O_C(D)$ avec D effectif de degré $2r$. Si $2r \geq g+2$, alors $h^0(C, D) \geq 3$; ainsi $D \equiv p^*N + D'$, avec D' effectif de degré $< 2r$.

Si $2r = g+1$, le diviseur ample $\Theta \subset J^{g-1}C$ rencontre la courbe $a + p^*J^{r-1}E$. Ceci donne une écriture $a = p^*M^{-1} \otimes O_C(D)$ avec D effectif de degré $g-1$. Supposons donc $2r \leq g$, D p-simple (définition précédant II.D.1.2.7), et $Z + a \subset \Theta$. Il suffit d'obtenir une contradiction si $r \geq 2$.

1) $2r \leq g-2$. Pour N générique dans $\mathrm{Pic}^r E$, il existe $G \geq 0$ sur C tel que $D+G$ soit p-simple et $A \simeq N^2 \otimes O_E(p_*G)$. Comme $r \geq 2$, $L = p^*N \otimes O_C(G)$ appartient à Z, donc

$$H^0(L \otimes a) = H^0(p^*(N \otimes M^{-1}) \otimes O_C(G+D)) \neq 0.$$

Par II.D.1.2.7, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(N \otimes M^{-1}) &\longrightarrow H^0(L \otimes a) \\ &\longrightarrow H^0(N \otimes M^{-1} \otimes O_E(p_*G + p_*D - \delta)) \\ &\simeq H^0(M \otimes N^{-1} \otimes \mathrm{Nm}\, a \otimes A(-\delta)). \end{aligned}$$

Ainsi $N \simeq M$ ou $N \simeq M \otimes \mathrm{Nm}\, a \otimes A(-\delta)$, ce qui est impossible puisque M est fixé et N variable.

2) $2r = g-1$. Prenons N tel que $N^2 \simeq A$. Comme ci-dessus, $L = p^*N \in Z$ entraîne $L \otimes a \in \Theta$ et $N \simeq M$ ou $N \simeq M \otimes \alpha$, où $\alpha = \operatorname{Nm} a \otimes A(-\delta)$. Mais on peut remplacer N par $N \otimes \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \operatorname{Pic}^0 E[2]$, alors que

$$\bigcap_{\varepsilon \in \operatorname{Pic}^0 E[2]} \{M \otimes \varepsilon, M \otimes \varepsilon \otimes \alpha\} = \emptyset.$$

Contradiction.

3) $2r = g$. Soit $x \in \operatorname{Supp} D$, et posons $G = \tau x$. Choisissons N tel que $N^2 \otimes O_E(px) \simeq A$. Alors $\deg N = r - 1 \geq 2$ et $L = p^*N \otimes O_C(\tau x) \in Z$. Or

$$L \otimes a = p^*(N \otimes M^{-1}(px)) \otimes O_C(F), \qquad F = D - x.$$

La même suite exacte et $H^0(L \otimes a) \neq 0$ donnent $N \simeq M(-px)$ ou $N \simeq M(-px) \otimes \operatorname{Nm} a \otimes A(-\delta)$. On conclut encore en remplaçant N par $N \otimes \varepsilon$, avec $\varepsilon^2 \simeq O_E$. □

On montre de la même façon le résultat suivant.

Proposition A4.2. *Soit τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 3$ (respectivement $g \geq 5$), et $p\colon C \to E$ le quotient. Pour $j = 1, 2$, posons*

$$T_j = \{p^*M \otimes O_C(D) \mid M \in \operatorname{Pic}^j E,\ D \in C^{(g-1-2j)}\}.$$

Alors T_1 (respectivement T_2) est irréductible de dimension $g-2$ (respectivement $g-4$), et

$$\{a \in \operatorname{Pic}^0 C \mid T_1 + a \subset \Theta\} = p^* \operatorname{Pic}^0 E,$$

respectivement

$$\{a \in \operatorname{Pic}^0 C \mid T_2 + a \subset \Theta\} = \{O_C(p^*e - x - y) \mid x, y \in C,\ e \in E\}.$$

Proposition A4.3. *Soient τ une structure superelliptique sur une courbe C de genre $g \geq 5$, $p\colon C \to E$ le quotient, $a \in \operatorname{Pic}^0 C \setminus \{0\}$ et $A \in \operatorname{Pic}^{g-1} E$ fixés. Posons*

$$Y = \{L \in \Theta \cdot \Theta_a \mid \operatorname{Nm} L \simeq A\}.$$

i) Y est de dimension pure $g-3$, sauf s'il existe $\alpha \in \operatorname{Pic}^0 E$ tel que $a = p^*\alpha$ et $A \simeq \alpha \otimes O_E(\delta)$. Dans ce dernier cas, Y est irréductible de dimension $g-2$.

ii) Si $a = O_C(-p^*e + x + y)$, avec $x, y \in C$ et $e \in E$, alors Y est irréductible, sauf éventuellement dans l'un des cas suivants :

- *$e = px$ ou $e = py$, donc $a \in C - C$;*
- *$A \simeq O_E(px - e + \delta)$ ou $A \simeq O_E(py - e + \delta)$;*
- *$g = 5$, x, y sont des points de ramification de p, et $A \simeq O_E(2px + 2py)$ ou $A \simeq O_E(px + 3py)$, avec $2px \equiv 2py$ dans ce dernier cas.*

Démonstration. Par amplitude de Θ, Θ_a et puisque $g \geq 3$, leur intersection rencontre tout translaté de $K = \{L \mid \operatorname{Nm} L \simeq A\}$. Elle ne peut donc être contenue dans K. Ainsi, si $Y = \Theta \cap \Theta_a \cap K$ est de dimension $g-2$, alors $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible. Par II.B.1, on est dans l'un des cas suivants.

— $a \in C - C$. On vérifie que Y a deux composantes irréductibles de dimension $g-3$.

— $a = p^*\alpha$. Alors

$$\Theta \cdot \Theta_a = \{L \in \Theta \mid \operatorname{Nm} L \simeq \alpha \otimes O_E(\delta)\} \cup \{O_C(p^*x + D) \mid x \in E,\ D \in C^{(g-3)}\}.$$

Si $A \simeq \alpha \otimes O_E(\delta)$, Y est irréductible de dimension $g-2$; sinon il est irréductible de dimension $g-3$.

— $g = 5$, et $q\colon C \to F$ est une autre structure superelliptique avec $a = q^*\beta$, $\beta \in \operatorname{Pic}^0 F$. L'intersection $\Theta \cdot \Theta_a$ s'écrit comme ci-dessus et Y est réductible, de dimension $g-3$.

Désormais, supposons $a = O_C(-p^*e + x + y)$, $a \notin C - C$ (donc $e \neq px, py$) et $a \notin p^* \operatorname{Pic}^0 E$ (donc $y \neq \tau x$).

Supposons d'abord $A \simeq O_E(px - e + \delta)$. Alors $a = p^*(A(-\delta)) \otimes O_C(y - \tau x)$. Si $L \in \Theta$ et $\operatorname{Nm} L \simeq A$, on a

$$L \otimes \tau^* L \simeq p^* A, \qquad \omega_C \otimes L^{-1} \simeq \tau^* L \otimes p^*(A^{-1}(\delta)),$$

d'où $H^0(L \otimes p^*(A^{-1}(\delta))) \neq 0$. Pour $L \in Y$, on a donc aussi

$$H^0(a^{-1} \otimes L) = H^0(p^*(A^{-1}(\delta)) \otimes L(\tau x - y)) \neq 0.$$

Ainsi Y est la réunion des deux ensembles, où $\operatorname{Nm} L \simeq A$ est toujours sous-entendu,

$$\{L \mid H^0(p^*(A^{-1}(\delta)) \otimes L(-y)) \neq 0\} = \{L \mid H^0(\omega_C \otimes L^{-1}(-\tau y)) \neq 0\},$$
$$\{L \mid h^0(p^*(A^{-1}(\delta)) \otimes L(\tau x)) > 1\} = \{L \mid H^0(L(-x)) \neq 0\}.$$

Faisons donc l'hypothèse supplémentaire

$$A \not\simeq O_E(px - e + \delta), \qquad A \not\simeq O_E(py - e + \delta).$$

Considérons $Y \cap W$, où $W = \{O_C(x + D) \mid D \in C^{(g-2)}\}$. Si $O_C(x + D) \in Y$ et $\tau y + D$ est p-simple, alors

$$O_C(x + D) \otimes a^{-1} = O_C(D + \tau y + p^*(e - py)).$$

La suite exacte de II.D.1.2.7 donne

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(e - py) = 0 \longrightarrow H^0(O_C(x + D) \otimes a^{-1}) \\ \longrightarrow H^0(e - py + p_*D + py - \delta) \\ = H^0(e + A - px - \delta) = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} Y \cap W = \{O_C(x + y + D) \mid D \in C^{(g-3)},\ O_E(p_*D) \simeq A(-px - py)\} \\ \cup \{O_C(x + p^*m + D) \mid D \in C^{(g-4)},\ m \in E,\ O_E(p_*D + 2m) \simeq A(-px)\}. \end{aligned}$$

Ces deux ensembles sont irréductibles de dimension $g-4$. Choisissons dans leur intersection

$$L_0 = O_C(x + y + \tau y + D),$$

avec $D + x$ et $D + \tau y$ p-simples. Pour $g \geq 6$, c'est toujours possible : $p_*D \in |A(-px - 2py)|$, système linéaire de degré $g - 4 \geq 2$, donc sans point base. Pour $g = 5$, c'est encore possible sauf dans les cas

— $A \simeq O_E(2px + 2py)$ et x est ramifié ;

— $A \simeq O_E(px + 3py)$ et y est ramifié.

En échangeant x, y, on voit que, si le choix de L_0 est impossible, alors x, y sont tous deux ramifiés et $A \in \{O_E(2px + 2py), O_E(px + 3py)\}$. C'est le cas exceptionnel de l'énoncé.

Supposons donc L_0 choisi. On a

$$\begin{aligned} \omega_C \otimes L_0^{-1} &\simeq p^*(A^{-1}(\delta)) \otimes \tau^* L_0 \\ &\simeq p^*(A^{-1}(\delta + py)) \otimes O_C(\tau D + \tau x), \\ L_0 \otimes a^{-1} &\simeq O_C(p^* e + \tau y + D), \\ \omega_C \otimes L_0^{-1} \otimes a &\simeq p^*(A^{-1}(\delta - e + py + px)) \otimes O_C(y + \tau D). \end{aligned}$$

Par II.D.1.2.7 et la p-simplicité de $D + x, D + \tau y$, $h^0(L_0) = h^0(L_0 \otimes a^{-1}) = 1$. Les diviseurs Θ, Θ_a sont donc lisses en L_0.

Les hyperplans tangents à $\{L \mid \operatorname{Nm} L \simeq A\}$, Θ et Θ_a en L_0 dans $T_{L_0} JC \simeq H^0(C, \omega_C)^*$ correspondent respectivement aux sections suivantes de

$$H^0(C, \omega_C) \simeq \mathbb{C}r \oplus p^* H^0(E, \delta) :$$

$$r, \qquad p^*[px + p_* D + py + u], \qquad p^*[py + p_* D + e + v].$$

Ici r est une section de $O_C(p^*\delta) \simeq \omega_C$ de diviseur la ramification de p, et

$$|A^{-1}(\delta + py)| = \{u\}, \qquad |A^{-1}(\delta - e + py + px)| = \{v\}.$$

Nos hypothèses impliquent $e \notin \{px, py, u\}$. Les trois hyperplans sont donc linéairement indépendants, et Y est lisse en L_0. Pour prouver l'irréductibilité de Y, il suffit maintenant de montrer que toute composante Z de Y contient L_0. Puisque L_0 appartient aux deux composantes de $Y \cap W$, toutes deux de dimension $g - 4$, il suffit de montrer

$$\dim(Z \cap W) \geq g - 4.$$

Soient $\phi \colon C^{(g-1)} \to \Theta$ l'application canonique,

$$C_x^{(g-2)} = \{D \in C^{(g-1)} \mid D \geq x\}, \qquad \psi \colon C_x^{(g-2)} \to W$$

sa restriction. Par II.D.1.2.7, le lieu des fibres de dimension positive est

$$\begin{aligned} U &= \{z \in C_x^{(g-2)} \mid \dim \psi^{-1}(\psi z) \geq 1\} \\ &= \{x + D \mid D \in C^{(g-2)},\ h^0(D) \geq 2\} \\ &= \{x + p^* e_1 + p^* e_2 + G \mid e_1, e_2 \in E,\ G \in C^{(g-6)}\}. \end{aligned}$$

Il est de dimension $g - 4$ pour $g \geq 6$, et vide pour $g = 5$. Pour $g \geq 6$, l'application

$$U \longrightarrow \operatorname{Pic}^{g-1} E, \qquad D \longmapsto O_E(p_* D)$$

est surjective. Si $\widetilde{Z}$ est une composante de $\phi^{-1}(Y)$ dominant Z, on en déduit

$$\dim(U \cap \widetilde{Z}) \leq g - 5.$$

Or $C_x^{(g-2)}$ est un diviseur de Cartier ample sur $C^{(g-1)}$ [Fu–L]. Ainsi

$$\dim(C_x^{(g-2)} \cap \widetilde{Z}) \geq \dim \widetilde{Z} - 1 \geq g - 4.$$

Avec la majoration précédente, ceci donne

$$\dim(W \cap Z) \geq \dim \psi(C_x^{(g-2)} \cap \widetilde{Z}) \geq g - 4,$$

ce qui achève la démonstration. □

Bibliographie

Les titres et les données bibliographiques suivent l'original ; la mention « à paraître » décrit leur statut dans la bibliographie de 1987.

[An–M] A. Andreotti and A. Mayer. On period relations for abelian integrals on algebraic curves. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **21** (1967), 189–238.

[Ar] E. Arbarello. Fay's Trisecant Formula and a Characterization of Jacobian Varieties. À paraître dans la bibliographie originale.

[A–C–G–H 1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves, I*. Springer-Verlag, New York.

[A–C–G–H 2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves, II*. À paraître dans la bibliographie originale.

[Ar–D 1] E. Arbarello and C. de Concini. On a set of equations characterizing Riemann matrices. *Ann. of Math.* **120** (1984), 119–140.

[Ar–D 2] E. Arbarello and C. de Concini. Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces. À paraître dans la bibliographie originale.

[Ba] W. Barth. Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und Komplexprojektiven Räumen. *Invent. Math.* **5** (1968), 42–62.

[Be 1] A. Beauville. Prym varieties and the Schottky problem. *Invent. Math.* **41** (1977), 149–196.

[Be 2] A. Beauville. Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), 309–391.

[Be 3] A. Beauville. Sous-variétés spéciales des variétés de Prym. *Compositio Math.* **45** (1982), 357–383.

[Be–D 1] A. Beauville and O. Debarre. Une relation entre deux approches du problème de Schottky. *Invent. Math.* **86** (1986), 195–207.

[Be–D 2] A. Beauville and O. Debarre. Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym. À paraître dans la bibliographie originale.

[Ci] C. Ciliberto. On a proof of Torelli's Theorem. In *Algebraic Geometry—Open Problems, Ravello*, Lecture Notes in Mathematics **997**, Springer (1983), 113–123.

[Cl–G] H. Clemens and P. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math.* **95** (1972), 281–356.

[D 1] O. Debarre. Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes. *Compositio Math.* **58** (1986), 3–11.

[D 2] O. Debarre. Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3. À paraître dans la bibliographie originale.

[D 3] O. Debarre. Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti–Mayer. À paraître dans la bibliographie originale.

[De] P. Deligne. Le lemme de Gabber. In *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, exposé V, *Astérisque* **127** (1985).

[De–M] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. IHÉS* **36** (1969), 75–109.

[Do] R. Donagi. The tetragonal construction. *Bull. Amer. Math. Soc.* **4** (1981), 181–185.

[Do–S] R. Donagi and R. C. Smith. The structure of the Prym map. *Acta Math.* **146** (1981), 25–102.

[Du] B. A. Dubrovin. Theta functions and non-linear equations. *Russian Math. Surveys* **36**, no. 2 (1981), 11–92.

[Fr–S 1] R. Friedman and R. Smith. The generic Torelli theorem for the Prym map. *Invent. Math.* **67** (1982), 473–490.

[Fr–S 2] R. Friedman and R. Smith. Degenerations of Prym Varieties and Intersections of Three Quadrics. *Invent. Math.* **85** (1986), 615–635.

[Fu–L] W. Fulton and R. Lazarsfeld. On the connectedness of degeneracy loci and special divisors. *Acta Math.* **146** (1981), 271–283.

[Gi] D. Gieseker. Stable Curves and Special Divisors : Petri's Conjecture. *Invent. Math.* **66** (1982), 251–275.

[Gr 1] M. Green. Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve. *Invent. Math.* **75** (1984), 85–104.

[Gr 2] M. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. *J. Differential Geom.* **19** (1984), 125–171.

[Gr–L] M. Green and R. Lazarsfeld. On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve. *Invent. Math.* **83** (1986), 73–90.

[Gri–H] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, New York (1978).

[Gro 1] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. *Publ. Math. IHÉS*.

[Gro 2] A. Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique IX. Quelques problèmes de modules. *Séminaire H. Cartan*, 13e année, exposé no. 16 (1960/61).

[Gro 3] A. Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2). Masson and North-Holland, Paris–Amsterdam (1968).

[H] J. Harris. Theta-characteristics on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* **271** (1982), 611–638.

[H–M] J. Harris and D. Mumford. On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Curves. *Invent. Math.* **67** (1982), 23–86.

[Ha] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1977).

[Ig 1] J. I. Igusa. A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. *Math. Ann.* **168** (1967), 228–260.

[Ig 2] J. I. Igusa. *Theta Functions*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **194**, Springer-Verlag (1972).

[Ig 3] J. I. Igusa. On the irreducibility of Schottky's divisor. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **28** (1981), 531–545.

[Ke–L] G. Kempf and D. Laksov. The determinantal formula of Schubert calculus. *Acta Math.* **132** (1974), 153–162.

[Kl–L] S. Kleiman and D. Laksov. Another proof of the existence of special divisors. *Acta Math.* **132** (1974), 163–176.

[M] I. G. Macdonald. Symmetric products of an algebraic curve. *Topology* **1** (1962), 319–343.

[Ma] H. H. Martens. On the variety of special divisors on a curve. *J. Reine Angew. Math.* **227** (1967), 111–120.

[Mas] L. Masiewicki. Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five. *Trans. Amer. Math. Soc.* **222** (1976), 221–240.

[Mu 1] D. Mumford. On the Kodaira Dimension of the Siegel Modular Variety. Lecture Notes in Mathematics **997**, Springer-Verlag, New York (1983), 348–375.

[Mu 2] D. Mumford. Prym Varieties I. In *Contributions to Analysis*, Academic Press, New York (1974), 325–350.

[Mu 3] D. Mumford. Theta characteristics of an algebraic curve. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **4** (1971), 181–192.

[Mu 4] D. Mumford. Varieties defined by Quadratic Equations. C.I.M.E., Varenna (1969).

[Mu 5] D. Mumford. On the equations defining abelian varieties I. *Invent. Math.* **1** (1966), 287–354.

[Mu 6] D. Mumford. *Abelian Varieties*. Tata Studies in Mathematics **5**, Oxford (1970).

[Mu 7] D. Mumford. Analytic construction of degenerating abelian varieties. *Compositio Math.* **24** (1972), 239–272.

[Mu 8] D. Mumford. *Curves and their Jacobians*. The University of Michigan Press, Ann Arbor (1978).

[Mu 9] D. Mumford. Varieties defined by quadratic equations (with an appendix by G. Kempf). In *Questions on Algebraic Varieties*, Edizioni Cremonese, Rome (1970), 29–100.

[Mu 10] D. Mumford. *Tata Lectures on Theta II*. Progress in Mathematics **43**, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart (1984).

[Na] Y. Namikawa. A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. *Math. Ann.* **221** (1976), 97–142 and 201–242.

[Ra] Z. Ran. On subvarieties of abelian varieties. *Invent. Math.* **62** (1981), 459–479.

[Re] S. Recillas. Jacobians of curves with g^1_4's are Prym varieties of trigonal curves. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **19** (1974), 9–13.

[SD] B. Saint-Donat. On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. *Math. Ann.* **206** (1973), 157–175.

[Sh] T. Shiota. Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. *Invent. Math.* **83** (1986), 333–382.

[Sho 1] V. V. Shokurov. Prym varieties : Theory and Applications. *Math. USSR Izvestiya* **23** (1984), no. 1.

[Sho 2] V. V. Shokurov. Distinguishing Prymians from Jacobians. *Invent. Math.* **65** (1981), 209–219.

[Sm–V] R. Smith and R. Varley. Components of the locus of singular theta divisors of genus five. In *Algebraic Geometry, Sitges 1983*, Lecture Notes in Mathematics **1124**, Springer-Verlag (1983), 338–416.

[Te] M. Teixidor. For which Jacobi varieties is $\operatorname{Sing}\Theta$ reducible? *J. Reine Angew. Math.* **354** (1984), 141–149.

[Tj 1] A. N. Tjurin. Five Lectures on three-dimensional varieties. *Russian Math. Surveys* **27** (1972), 1–53.

[Tj 2] A. N. Tjurin. On the Intersections of Quadrics. *Russian Math. Surveys* **30** (1975).

[Tj 3] A. N. Tjurin. The Geometry of the Poincaré Theta-Divisor of a Prym Variety. *Math. USSR Izvestiya* **9** (1975), 951–986.

[V] B. van Geemen. *The Schottky Problem and Moduli Spaces of Kummer Varieties*. Thesis, University of Utrecht (1985).

[Va] R. Varley. Weddle's surfaces, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety. *Amer. J. Math.* **108** (1986), 931–952.

[W] A. Weil. Zum Beweis des Torellischen Satzes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* 2 (1957), 33–53.

[We 1] G. Welters. A theorem of Gieseker–Petri type for Prym varieties. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18** (1985), 671–683.

[We 2] G. Welters. The surface $C - C$ on Jacobi varieties and 2nd order theta functions. *Acta Math.* **157** (1986), 1–22.

[We 3] G. Welters. *Abel–Jacobi Isogenies for Certain Types of Fano Threefolds*. Mathematisch Centrum, Amsterdam (1981).

[We 4] G. Welters. Recovering the curve data from a general Prym variety. *Amer. J. Math.* À paraître dans la bibliographie originale.

[We 5] G. Welters. Polarized abelian varieties and the heat equation. *Compositio Math.* **49** (1983), 173–194.

[We 6] G. Welters. A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties. *Invent. Math.* **74** (1983), 437–440.

[We 7] G. Welters. A criterion for Jacobi varieties. *Ann. of Math.* **120** (1984), 497–504.

[We 8] G. Welters. On flexes of the Kummer variety. *Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, Series A* **86**; *Indagationes Math.* **45** (1983), 501–520.

[Z] O. Zariski. On a theorem of Severi. *Amer. J. Math.* **50** (1928), 87–92.