C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 631-635, 1996
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Polarisations sur les variétés abéliennes produits

Olivier DEBARRE

O. D. : IRMA, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg CEDEX, France ;
J.-P. S. : Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France.

Résumé. On montre qu'une variété abélienne polarisée définie sur un corps algébriquement clos se décompose de façon unique en produit de variétés abéliennes polarisées indécomposables. On donne aussi un critère pour qu'une polarisation sur une variété abélienne produit se décompose en produit de polarisations.

Polarizations on products of abelian varieties

Abstract. *We show that a polarized abelian variety defined over an algebraically closed field splits uniquely as a product of indecomposable polarized abelian varieties. We also give a necessary and sufficient condition for a polarization on a product of abelian varieties to split as a product of polarizations.*

Soient X une variété abélienne définie sur un corps algébriquement clos et $\hat{X}$ sa variété abélienne duale ([3], § 13) ; une *polarisation* sur X est une classe d'équivalence algébrique de fibrés en droites amples sur X. Étant donné un tel fibré L, on note $[L]$ la polarisation associée, et $\phi_L : X \to \hat{X}$ le morphisme construit dans [3], cor. 5, p. 131, défini ensemblistement par $\phi_L(x) = \tau_x^* L \otimes L^{-1}$, où τ_x est la translation par x. Il ne dépend que de $[L]$, et on le notera aussi $\phi_{[L]}$. Si $(X_1, [L_1])$ et $(X_2, [L_2])$ sont des variétés abéliennes polarisées, on note $(X_1, [L_1]) \times (X_2, [L_2])$ la variété abélienne $X_1 \times X_2$ munie de la polarisation $[L_1 \boxtimes L_2]$. On dit qu'une variété abélienne polarisée est *indécomposable* si elle n'est ni nulle, ni isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles. Toute variété abélienne polarisée non nulle se décompose en produit de sous-variétés abéliennes polarisées indécomposables. Le but de cette Note est de montrer que cette décomposition est unique. Ce résultat pourtant bien naturel semble nouveau, bien qu'il soit déjà connu lorsqu'on considère une variété abélienne principalement polarisée $(X, [\mathcal{O}(\Theta)])$ (c'est-à-dire telle que $h^0(X, \mathcal{O}(\Theta)) = 1$) : les facteurs indécomposables de X sont les sous-variétés abéliennes engendrées par les composantes irréductibles de Θ. Plus généralement, si l'on part d'une variété abélienne polarisée quelconque $(X, [L])$, on sait que les facteurs indécomposables principalement polarisés sont les sous-variétés abéliennes engendrées par les composantes irréductibles de la partie fixe du système linéaire $|L|$ (th. 3.1, p. 78 de [2]). Nous n'obtenons pas de caractérisation géométrique des facteurs indécomposables dans le cas général.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/96/03230631 $ 2.00 © Académie des Sciences

Dans une deuxième partie, nous démontrons un critère pour qu'une polarisation sur une variété abélienne produit se décompose en produit de polarisations.

J.-P. Serre, que je remercie d'avoir posé la question de l'unicité de la décomposition d'une variété abélienne polarisée en facteurs indécomposables, a indépendamment obtenu une démonstration différente du théorème 1, qui est publiée à la suite de cette Note.

1. Décomposition d'une variété abélienne polarisée

THÉORÈME 1. – *Soit* (X, λ) *une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes* X_1, X_2, Y_1 *et* Y_2 *telles que*

$$(X, \lambda) \simeq (X_1, \lambda_{|X_1}) \times (X_2, \lambda_{|X_2}) \simeq (Y_1, \lambda_{|Y_1}) \times (Y_2, \lambda_{|Y_2}.)$$

Pour $i = 1, 2$, *on a*

$$(X_i, \lambda_{|X_i}) \simeq (X_i \cap Y_1, \lambda_{|X_i \cap Y_1}) \times (X_i \cap Y_2, \lambda_{|X_i \cap Y_2}).$$

Posons $Z_{ij} = (X_i \cap Y_j)^0$ et $Z = Z_{11} \times Z_{12} \times Z_{21} \times Z_{22}$. Soit K le noyau de l'application $\hat{X} \to \hat{Z}$; la composante neutre X' de $\phi_\lambda^{-1}(K)$ est un complément de Z dans X ([3], th. 1, p. 173). Or, si K_i est le noyau de l'application $\hat{X}_i \to \hat{Z}_{i1} \times \hat{Z}_{i2}$, on a $K = K_1 \times K_2$. Comme $\phi_\lambda : X_1 \times X_2 \to \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ n'est autre que $\phi_{\lambda_{|X_1}} \times \phi_{\lambda_{|X_2}}$, on a $(X', \lambda_{|X'}) \simeq (X'_1, \lambda_{|X'_1}) \times (X'_2, \lambda_{|X'_2})$, où X'_i est la sous-variété abélienne $(\phi^{-1}_{\lambda_{|X_i}}(K_i))^0$ de X_i. On montre de façon analogue que l'on a une décomposition $(X', \lambda_{|X'}) \simeq (Y'_1, \lambda_{|Y'_1}) \times (Y'_2, \lambda_{|Y'_2})$, où Y'_j est une sous-variété abélienne de Y_j telle que $X'_i \cap Y'_j$ soit *fini*.

Ceci nous ramène au cas où $X_i \cap Y_j$ est fini pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, ce qui entraîne en particulier que X_1, X_2, Y_1 et Y_2 ont même dimension m. Il s'agit de montrer que m est nul. Soit N un fibré en droites ample sur X représentant la polarisation λ. Notons $L_i = N|_{X_i}$ et $M_j = N|_{Y_j}$; on a

$$(X_i, [L_i]) \simeq (X_i, [M_{i1} \otimes M_{i2}]),$$

où M_{ij} est l'image inverse de M_j par l'application composée $p_{ij} : X_i \subset X \simeq Y_1 \times Y_2 \overset{\mathrm{pr}_j}{\to} Y_j$. Comme le noyau de celle-ci est fini, M_{ij} est ample sur X_i. *Supposons* m *non nul ;* on a ([3], § 16)

$$h^0(X_i, L_i) = \frac{[L_i]^m}{m!} = \frac{([M_{i1}] + [M_{i2}])^m}{m!} \geq \frac{[M_{i1}]^m}{m!} + \frac{[M_{i2}]^m}{m!} = h^0(X_i, M_{i1}) + h^0(X_i, M_{i2}),$$

de sorte que

$$(\star) \qquad h^0(X, N) = h^0(X_1, L_1)h^0(X_2, L_2) \geq (h^0(M_{11}) + h^0(M_{12}))(h^0(M_{21}) + h^0(M_{22})).$$

Comme M_{ij} est l'image inverse de M_j par l'isogénie p_{ij}, on a d'autre part $h^0(Y_j, M_j) \leq h^0(X_i, M_{ij})$, pour tous i, j de sorte que

$$h^0(X, N) = h^0(Y_1, M_1)h^0(Y_2, M_2) \leq h^0(M_{11})h^0(M_{22}).$$

Comme les $h^0(M_{ij})$ sont tous strictement positifs, on arrive à une contradiction avec $(\star)$, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

COROLLAIRE 2. – *Soit* (X, λ) *une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes* $X_1, \ldots, X_r$ *et* $Y_1, \ldots, Y_s$ *telles que*

$$(X, \lambda) \simeq \prod_{i=1}^{r} (X_i, \lambda_{|X_i}) \simeq \prod_{j=1}^{s} (Y_j, \lambda_{|Y_j}).$$

a) Si $(X_1, \lambda_{|X_1}), \ldots, (X_r, \lambda_{|X_r})$ *sont indécomposables, il existe une partition* $I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_s$ *de* $\{1, \ldots, r\}$ *telle que* $(Y_j, \lambda_{|Y_j}) \simeq \prod_{i \in I_j} (X_i, \lambda_{|X_i})$, *pour tout* $j = 1, \ldots, s$.

b) Si $(X_1, \lambda_{|X_1}), \ldots, (X_r, \lambda_{|X_r})$ *et* $(Y_1, \lambda_{|Y_1}), \ldots, (Y_s, \lambda_{|Y_s})$ *sont indécomposables, on a* $r = s$ *et il existe une permutation* σ *de* $\{1, \ldots, s\}$ *telle que* $Y_j \simeq X_{\sigma(j)}$ *pour tout* j.

2. Polarisations sur un produit de variétés abéliennes

THÉORÈME 3. – *Soit* L *un fibré en droites ample sur une variété abélienne produit* $X = \prod_{i=1}^r X_i$. *On a* $h^0(X, L) \leq \prod_{i=1}^r h^0(X_i, L_{|X_i})$. *Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que* L *soit isomorphe à* $L_{|X_1} \boxtimes \cdots \boxtimes L_{|X_r}$.

Il suffit de traiter le cas $r = 2$. Pour $k = 1, 2$, notons L_k la restriction de L à X_k. On définit des endomorphismes p_1, p_2 et u de X par

$$p_1(x_1, x_2) = (x_1, 0), \qquad p_2(x_1, x_2) = (0, x_2) \qquad \text{et} \qquad u(x_1, x_2) = (x_1, -x_2),$$

pour tous $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Le morphisme $\phi_L : X_1 \times X_2 \to \hat{X}_1 \times \hat{X}_2$ s'écrit

$$\phi_L = \begin{pmatrix} \phi_{L_1} & \hat{v} \\ v & \phi_{L_2} \end{pmatrix},$$

où v est un morphisme de X_1 dans $\hat{X}_2$. On a alors

$$\phi_{u^*L} = \begin{pmatrix} \phi_{L_1} & -\hat{v} \\ -v & \phi_{L_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_{u^*L \otimes L} = \begin{pmatrix} 2\phi_{L_1} & 0 \\ 0 & 2\phi_{L_2} \end{pmatrix},$$

de sorte que $\phi_{u^*L \otimes L} = \phi_{p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2}$: les fibrés en droites $u^*L \otimes L$ et $p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2$ sont algébriquement équivalents. Pour tout rationnel t, posons

$$P(t) = n!\chi(X, (p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2)^{\otimes t} \otimes L^{-1}) = ((p_1^*L^2 \otimes p_2^*L^2)^{\otimes t} \otimes L^{-1})^n,$$

où n est la dimension de X. On a

$$\begin{aligned} P(t) &= u^*((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes t} \otimes L^{-1})^n = ((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes t} \otimes u^*L^{-1})^n \\ &= ((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes (t-2)} \otimes L)^n = (-1)^n((p_1^*L \otimes p_2^*L)^{\otimes (2-t)} \otimes L^{-1})^n = (-1)^n P(2-t). \end{aligned}$$

Par [1], th 2, les racines de P sont réelles positives ; comme $\alpha(2-\alpha) \leq 1$ pour tout réel α, le produit des racines de P, c'est-à-dire $\chi(X, L)/\chi(X, p_1^*L \otimes p_2^*L)$, est plus petit que 1. Comme L et $p_1^*L \otimes p_2^*L$ sont amples, on a $\chi(X, L) = h^0(X, L)$ et $\chi(X, p_1^*L \otimes p_2^*L) = h^0(X, p_1^*L \otimes p_2^*L)$; ceci prouve l'inégalité du théorème. S'il y a égalité, les racines du polynôme $P(t+1)$ sont toutes nulles, de sorte que L et $p_1^*L \otimes p_2^*L$ sont algébriquement équivalents (*loc. cit.*). Comme ils ont mêmes images inverses par p_1 et p_2, ils sont isomorphes ([3], (ii) p. 75). ■

Si X_1 et X_2 sont des sous-variétés abéliennes d'une variété abélienne X dont la somme des dimensions est la dimension de X, on définit $X_1 \cdot X_2$ comme le degré de l'application $X_1 \times X_2 \to X$ qui à (x_1, x_2) associe $x_1 - x_2$. C'est aussi le degré du produit d'intersection des classes de X_1 et X_2 dans l'anneau de Chow de X.

COROLLAIRE 4. – *Soient* X *une variété abélienne, et* X_1 *et* X_2 *des sous-variétés abéliennes de* X *dont la somme des dimensions est la dimension de* X. *Si* L *est un fibré en droites ample sur* X, *on a*

$$(X_1 \cdot X_2) h^0(X, L) \leq h^0(X_1, L|_{X_1}) h^0(X_2, L|_{X_2}).$$

On peut supposer $d = X_1 \cdot X_2$ non nul, de sorte que l'application $\pi : X_1 \times X_2 \to X$ est une isogénie de degré d. Le théorème donne

$$h^0(X_1 \times X_2,\, \pi^* L) \leq h^0(X_1,\, L_{|X_1}) h^0(X_2,\, L_{|X_2}).$$

Ceci démontre le corollaire puisque $h^0(X_1 \times X_2,\, \pi^* L) = d h^0(X,\, L)$. ■

Financé en partie par NSF Grant DMS 94-00636 et le Projet Européen HCM « Algebraic Geometry in Europe » (AGE), Contrat CHRXCT-940557.

Note remise et acceptée le 3 juin 1996.

Références bibliographiques

[1] **Kempf G.,** appendice à **Mumford D., 1970.** Varieties Defined by Quadratic Equations, in *Questions On Algebraic Varieties*, CIME, Varenna.

[2] **Lange H., Birkenhake Ch., 1992.** Complex Abelian Varieties, *Grundlehren Math. Wiss.*, Springer-Verlag, Berlin.

[3] **Mumford D., 1974.** *Abelian Varieties*, 2e éd., Oxford University Press.

Commentaires du présentateur

Le théorème 1 ci-dessus peut se déduire du résultat analogue (dû à Eichler, *cf.* [2], [3]) sur l'unicité de la décomposition d'un *réseau* comme somme orthogonale de réseaux indécomposables. Voici comment :

Tout d'abord, il y a intérêt à reformuler le résultat d'Eichler sous une forme analogue à celle du théorème 1. Cela donne :

PROPOSITION 1. – *Soit Λ un réseau d'un espace euclidien réel V de dimension finie, et soient p et q deux projecteurs orthogonaux de V tels que $p(\Lambda) \subset \Lambda$ et $q(\Lambda) \subset \Lambda$. Alors p et q commutent.*

(Autrement dit les décompositions orthogonales de Λ fournies par p et q sont compatibles entre elles.)

On passe de là à un énoncé sur les algèbres à involution :

PROPOSITION 2. – *Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre à involution de dimension finie, et soit A_0 un réseau de A qui soit un sous-anneau. Supposons qu'il existe une forme linéaire $t : A \to \mathbf{R}$ telle que*

$$t(xy) = t(yx) \qquad si \quad x, y \in A,$$

$$t(x) = t(x^*) \qquad si \quad x \in A,$$

$$t(xx^*) > 0 \qquad si \quad x \in A, \quad x \neq 0.$$

Alors, si p_0 et q_0 sont deux idempotents hermitiens de A_0, p_0 et q_0 commutent.

(Précisons que l'involution de A est notée $x \mapsto x^*$, et qu'un élément x de A est dit *hermitien* si $x = x^*$.)

On munit A du produit scalaire $(x,\, y) \mapsto t(xy^*)$, ce qui en fait un espace euclidien. L'application $p : x \mapsto p_0 x$ (resp. $q : x \mapsto q_0 x$) est un projecteur orthogonal de A. On a $p(A_0) \subset A_0$ et $q(A_0) \subset A_0$. D'après la proposition 1, appliquée à $V = A$ et $\Lambda = A_0$, p et q commutent. Il en est donc de même de p_0 et q_0, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. – *Le sous-anneau de A_0 engendré par les éléments indempotents hermitiens est isomorphe à un produit fini de copies de $\mathbf{Z}$.*

C'est immédiat.

L'application aux variétés abéliennes polarisées se fait de la manière suivante :

Si (X, λ) est une telle variété, on pose $A_0 = \mathrm{End}\,(X)$. La polarisation λ définit une involution sur $\mathbf{Q} \otimes A_0$, donc aussi sur $A = \mathbf{R} \otimes A_0$. La forme trace $\mathrm{Tr} : A_0 \to \mathbf{Z}$ se prolonge en une forme $\mathbf{R}$-linéaire $t : A \to \mathbf{R}$, et toutes les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites. Un élément idempotent p de A_0 correspond à une décomposition de X en produit :

$$X = Y \times Z, \qquad \text{avec} \quad Y = \mathrm{Im}\,(p), \quad z = \mathrm{Ker}\,(p).$$

De plus, on vérifie que cette décomposition est compatible avec la polarisation de X si et seulement si p est hermitien. Le théorème 1 revient donc à dire que deux idempotents hermitiens de A_0 commutent, ce qui est un cas particulier de la proposition 2.

(Cet argument aurait aussi pu être donné dans le cadre des « catégories hermitiennes », *cf.* [1], [4].)

Références bibliographiques

[1] **Bayer-Fluckiger E., Kearton C. et Wilson S. M. J., 1989.** Hermitian forms in additive categories: finiteness results, *J. Algebra*, 123, p. 336-350.

[2] **Eichler M., 1952.** Note zur Theorie der Kristallgitter, *Math. Ann.*, 125, p. 51-55.

[3] **Kneser M., 1954.** Zur Theorie der Kristallgitter, *Math. Ann.*, 127, p. 105-106.

[4] **Quebbemann H. G., Scharlau W. et Schulte M., 1979.** Quadratic and hermitian forms in additive and abelian categories, *J. Algebra*, 59, p. 264-289.