

8.2. Intégration des fonctions continues par morceaux

8.2.1. Intégrales supérieure et inférieure. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée. On note :

$$\begin{aligned} I_+(f, a, b) &= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \text{ pour } \varphi \in \text{Esc}(a, b), \varphi \geq f \right\} \\ &\quad (\text{l'intégrale supérieure de } f) \\ \text{et } I_-(f, a, b) &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \text{ pour } \varphi \in \text{Esc}(a, b), \varphi \leq f \right\} \\ &\quad (\text{l'intégrale inférieure de } f) \end{aligned}$$

(Voir cette animation pour une illustration de ce qu'on est en train d'essayer de calculer)

Proposition 8.2.1. — Définissons $m = \inf\{f(x) \text{ pour } x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x) \text{ pour } x \in [a, b]\}$. Alors, $I_-(f, a, b)$ et $I_+(f, a, b)$ sont des réels et on a :

$$(b - a)m \leq I_-(f, a, b) \leq I_+(f, a, b) \leq (b - a)M.$$

Démonstration. — On remarque que φ_m définie par $\varphi_m(x) = m$ est une fonction en escalier inférieure à f . De même, ψ_M définie par $\psi_M(x) = M$ est une fonction en escalier supérieure à f .

Soit maintenant φ et ψ deux fonctions en escalier, avec $\varphi \leq f$ et $\psi \geq f$. Comme $\varphi \leq \psi$, on a vu que $\int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt$.

En appliquant l'inégalité précédente avec $\varphi = \varphi_m$, on obtient que pour tout ψ en escalier supérieure à f , $(b - a)m \leq \int_a^b \psi(t) dt$. Donc, l'ensemble dont $I_+(f, a, b)$ est l'inf est minoré, donc $I_+(f, a, b)$ est bien défini. De même $I_-(f, a, b)$ est bien défini.

Comme $\varphi_m \leq f$, on obtient $I_-(f, a, b) \geq \int_a^b \varphi_m(t) dt = (b - a)m$. De même, $I_+(f, a, b) \leq \int_a^b \psi_M(t) dt = (b - a)M$. Il reste à comparer $I_-(f, a, b)$ et $I_+(f, a, b)$: reprenons notre inégalité

$$\int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt.$$

En passant au sup sur les fonctions φ en escalier inférieure à f , on obtient $I_-(f, a, b) \leq \int_a^b \psi(t) dt$. En passant maintenant à l'inf sur les fonctions ψ en escalier supérieure à f , on conclut :

$$I_-(f, a, b) \leq I_+(f, a, b).$$

□

Il nous sera utile d'avoir une relation de Chasles pour I_+ et I_- :

Proposition 8.2.2. — Si $a < c < b$, on a :

$$\begin{aligned} I_+(f, a, b) &= I_+(f, a, c) + I_+(f, c, b) \\ I_-(f, a, b) &= I_-(f, a, c) + I_-(f, c, b) \end{aligned}$$

Démonstration. — Montrons la première des deux égalités, l'autre est similaire. On montre une double inégalité :

Pour $\varphi_1 \in \text{Esc}(a, c)$ et $\varphi_2 \in \text{Esc}(c, b)$ supérieures à f , on note φ la fonction définie sur $[a, b]$ telle que $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ si $x \in [a, c]$ et $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ si $x \in]c, b]$. Alors φ est en escalier sur $[a, b]$ et est supérieure à f . De plus, d'après la relation de Chasles pour les fonction en escalier, on a :

$$\int_a^c \varphi_1(t)dt + \int_c^b \varphi_2(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

En prenant l'inf sur φ_1 et φ_2 , on obtient

$$I_+(f, a, c) + I_+(f, c, b) \leq I_+(f, a, b).$$

Pour l'autre inégalité, si φ est en escalier sur $[a, b]$ et supérieure à f , on note φ_1 sa restriction à $[a, c]$ et φ_2 sa restriction à $[c, b]$. Alors $\varphi_1 \in \text{Esc}(a, c)$ et $\varphi_2 \in \text{Esc}(c, b)$ sont des fonctions supérieures à f . On a encore

$$\int_a^c \varphi_1(t)dt + \int_c^b \varphi_2(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

En prenant cette fois l'inf sur φ , on obtient

$$I_+(f, a, c) + I_+(f, c, b) \geq I_+(f, a, b).$$

L'égalité est bien démontrée. $\square$

8.2.2. Fonctions intégrables. —

Définition 8.2.3. — Une fonction f bornée de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ est dite *intégrable* sur $[a, b]$ si $I_+(f, a, b) = I_-(f, a, b)$.

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt$ la valeur commune de $I_+(f, a, b) = I_-(f, a, b)$.

Remarque 8.2.4. — Remarquons que, par définition des bornes inférieures et supérieures, f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et $\psi \in \text{Esc}(a, b)$ avec $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\int_a^b \psi(t)dt - \int_a^b \varphi(t)dt \leq \varepsilon.$$

On peut en déduire que si f est intégrable sur $[a, b]$, elle est intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.

Le résultat le plus important concerne les fonctions continues par morceaux :

Définition 8.2.5. — Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *continue par morceaux* si il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que f est continue sur tous les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ et admet des limites à gauche et à droite en les x_i .

Une autre façon de l'exprimer est de dire que la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge par continuité au segment $[x_{i-1}, x_i]$. On en déduit deux propriétés des fonctions continues par morceaux :

- Elles sont bornées (sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$, f l'est car elle se prolonge continuellement au segment. Il y a un nombre fini de tels intervalles, et il reste un nombre fini de points : les x_i).
- Elles admettent en tout point une limite à gauche et une limite à droite.

Théorème 8.2.6. — Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$ et même, pour tout $a \leq x \leq b$, $I_+(f, a, x) = I_-(f, a, x)$.

De plus, si f est continue, la fonction $x \mapsto I_+(f, a, x)$ est une primitive de f .

On note $\int_a^b f(t)dt$ la valeur commune $I_+(f, a, b) = I_-(f, a, b)$. On a $\int_a^b f(t)dt = I_+(f, a, b) - I_+(f, a, a)$ (le dernier terme est nul). Si f est continue, c'est donc la différence des valeurs en b et a d'une primitive de f , vu le dernier point du théorème. On est donc cohérent avec la notation introduite au début du chapitre précédent. De plus, le théorème précédent montre le premier théorème 7.1.3 de ce chapitre.

Démonstration. — On va en réalité montrer que toute fonction bornée et qui admet des limites à gauche et à droite est intégrable. En effet soit f une telle fonction. Définissons les deux fonctions F_+ et F_- sur $[a, b]$ par $F_+(x) = I_+(f, a, x)$ et $F_-(x) = I_-(f, a, x)$.

On constate que $F_+(a) = F_-(a) = 0$. On veut montrer que les deux fonctions $F_+(x) = I_+(f, a, x)$ et $F_-(x) = I_-(f, a, x)$ sont égales. Pour ça, montrons que la différence $F_+ - F_-$ est constante en montrant qu'elle est dérivable, de dérivée nulle.

Commençons par montrer que F_+ est dérivable à gauche en tout point x_0 , de dérivée $l_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Pour tout $x < x_0$, la relation de Chasles pour I_+ permet d'écrire $F_+(x_0) - F_+(x) = \int_x^{x_0} f(t)dt$.

(QC)

(QC)

Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de $l_g(x_0)$ il existe $y < x_0$ tel que pour tout $y < x < x_0$, on a :

$$l_g(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq l_g(x_0) + \varepsilon.$$

En utilisant l'encadrement pour I_+ , on obtient :

$$(x_0 - x)(l_g(x_0) - \varepsilon) \leq I_+(f, x, x_0) \leq (x_0 - x)(l_g(x_0) + \varepsilon).$$

Autrement dit, pour tout $y < x < x_0$, on a :

$$l_g(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F_+(x_0) - F_+(x)}{x_0 - x} \leq l_g(x_0) + \varepsilon.$$

On a bien montré que F_+ est dérivable à gauche en x_0 , de dérivée la limite à gauche de f .

On montre de même que :

- F_+ est dérivable à droite en x_0 , de dérivée la limite à droite de f .
- F_- est dérivable à gauche en x_0 , de dérivée la limite à gauche de f .
- F_- est dérivable à droite en x_0 , de dérivée la limite à droite de f .

Revenons à notre différence $F_+ - F_-$: elle est dérivable à gauche et à droite en tout point, de dérivée à gauche et à droite nulle. Elle est donc dérivable, de dérivée nulle.

Ainsi $F_+(x) = F_-(x)$ pour tout $a \leq x \leq b$, ce qui était l'objectif !

Enfin, si f est continue, sa limite à gauche et à droite en tout point sont égales à la valeur de f en ce point. Autrement dit, F_+ est dérivable, de dérivée f . $\square$

8.3. Quelques propriétés supplémentaires de l'intégrale des fonctions continues

8.3.1. Parité, imparité et intégrale. —

Proposition 8.3.1. — Si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ est impaire et continue, alors

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$$

– Si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ est paire et continue, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.

(QC)

On pourra voir cette animation et celle-là comme illustration de ces deux propriétés et de leur preuve

Démonstration. — Pour le premier point, on effectue le changement de variable $u = -t$. On obtient :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = - \int_a^{-a} f(-u)du = \int_{-a}^a f(-u)du = - \int_{-a}^a f(u)du.$$

Donc l'intégrale est égale à son opposée : elle est nulle.

Pour le deuxième point on utilise d'abord la relation de Chasles avant d'effectuer le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(t)dt.$$

Or $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ par parité. On obtient bien :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt.$$

□

Proposition 8.3.2. — Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et périodique de période $T > 0$, pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a :

(QC)

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

On pourra se reporter à cette animation pour une illustration de cette propriété et de sa preuve.

Démonstration. — Soit k l'entier tel que $kT \leq a < (k+1)T$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_a^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(t)dt \\ \text{(chgmt variable } u = t - T) &= \int_a^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{kT}^a f(u)du \\ \text{(Chasles)} &= \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt \\ \text{(chgmt variable } u = t - kT) &= \int_0^T f(t)dt \end{aligned} \quad \square$$

8.3.2. Inégalité et formule de la moyenne. —

Proposition 8.3.3. — Soit f une fonction continue et g une fonction positive et intégrable, toutes deux définies sur un intervalle $[a, b]$. Notons $m = \min_{[a,b]}(f)$ et $M = \max_{[a,b]}(f)$. Alors on a

(QC)

1. $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b fg(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$
2. il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$

Démonstration. — Le deuxième point se déduit du premier par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto \left(\int_a^b g(t)dt \right) f(x).$

Le premier : on a par définition $m \leq f(t) \leq M$ pour tout $a \leq t \leq b$. On peut multiplier cette inégalité par $g(t) \geq 0$:

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité :

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

□

Corollaire 8.3.4. — En appliquant avec $g = 1$, on obtient pour une fonction f continue :

1. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.
2. il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

Ce corollaire est illustré par cette animation.

Démonstration. — C'est clair, une fois avoir remarqué que, comme $g(t) = 1$, $\int_a^b g(t) dt = b-a$. □

8.4. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 8.4.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et $a \in I$. Alors, pour tout $b \in I$, on a :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur n .

Commençons par le cas $n = 0$: soit f une fonction C^1 ; on veut montrer $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$. Or le lien entre primitive et intégrale nous donne $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Donc la formule est démontrée au rang 0.

Montrons le rang $n = 1$ pour bien comprendre la propagation : on part de la formule précédente et on fait une intégration par parties dans l'intégrale : on pose $u = f'$, $v' = 1$. Alors on peut prendre $u' = f''$ et $v(t) = -(b-t)$ (la primitive qui s'annule en b). On obtient alors :

$$f(b) = f(a) + [f'(t)(-(b-t))]_a^b - \int_a^b f''(t)(-(b-t)) dt.$$

Après avoir simplifié les signes, on obtient :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt.$$

La formule est bien démontrée au rang 1.

Supposons qu'elle est démontrée au rang $n - 1$ et montrons-la au rang n . Soit f une fonction de classe C^{n+1} . Elle est aussi de classe C^n , donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

Faisons alors une intégration par parties dans l'intégrale : cette fois-ci, on pose $u = f^{(n)}$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$. On peut choisir $u' = f^{(n+1)}$ et $v = -\frac{(b-t)^n}{n!}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt &= \left[f^{(n)} \left(-\frac{(b-t)^n}{n!} \right) \right] - \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(-\frac{(b-t)^n}{n!} \right) dy \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt. \end{aligned}$$

En utilisant cette égalité dans la formule donnée par la récurrence, on obtient bien :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

□

Grâce à la formule de la moyenne, on en déduit :

Théorème 8.4.2. — *Formule de Taylor-Lagrange* Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et $a \in I$. Alors, pour tout $b > a$ dans I , il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ce développement n'a pas été traité en cours.

Démonstration. — On applique la formule de la moyenne à $\int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$: la fonction $f^{(n+1)}$ est intégrable (car continue) et $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$ est intégrable et positive sur $[a, b]$. Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Un commentaire sur ces deux formules : elles ont l'avantage par rapport à la formule classique, de donner une formulation explicite de l'erreur entre f et son approximation polynomiale de degré n . Notamment, ces formules peuvent être utilisées pour b pas forcément « très proche » de a .

8.5. Inégalité de Cauchy-Schwarz – Non traité en amphi

L'inégalité qui suit est fondamentale et n'est pas propre au monde de l'intégrale ; elle relève en fait plutôt du monde de l'algèbre bilinéaire. Une autre justification de sa présence dans ce cours est l'élégance de sa preuve.

Théorème 8.5.1. — *Inégalité de Cauchy-Schwarz* Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b fg(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Avant de prouver la formule, donnons en un corollaire :

Corollaire 8.5.2. — Si f est intégrable sur $[0, 1]$, alors

$$\left(\int_0^1 f(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt.$$

Démonstration. — Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on pose $a = 0$, $b = 1$ et g constante égale à 1. On a alors $\int_0^1 g^2(t)dt = 1$. Donc on conclut :

$$\left(\int_0^1 f(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt.$$

□

Prouvons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Démonstration. — Soient f et g intégrables, et pour $X \in \mathbf{R}$ posons

$$P(X) = \int_a^b (f + Xg)^2(t)dt.$$

On remarque d'abord que pour tout X , $P(X)$ est positif : c'est l'intégrale d'une fonction positive. D'un autre côté, on peut développer :

$$P(X) = \left(\int_a^b g^2(t)dt \right) X^2 + 2 \left(\int_a^b fg(t)dt \right) X + \left(\int_a^b f^2(t)dt \right).$$

C'est donc un polynôme en X , de degré 2 qui est toujours positif. Donc il ne change pas de signe, et donc son discriminant Δ est négatif ou nul. Donc :

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b fg(t)dt \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right) \leq 0.$$

On a bien l'inégalité voulue !

Maintenant cette inégalité est une égalité si et seulement si on a $\Delta = 0$, par construction. C'est équivalent au fait que $P(X)$ a une racine double, notée $X_0 \in \mathbf{R}$. On a alors :

$$0 = P(X_0) = \int_a^b (f + X_0 g)^2(t) dt.$$

Donc, l'inégalité est une égalité si et seulement si il existe X_0 tel que l'intégrale de la fonction $t \mapsto (f + X_0 g)^2(t)$ – qui est continue est positive – est nulle. Le lemme suivant implique que la fonction est nulle, c'est à dire $f = -X_0 g$. $\square$

On a en fait déjà vu le lemme suivant, sous forme contraposée (prop 7.2.3, point 2) :

Proposition 8.5.3. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ positive et continue. Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

Démonstration. — Considérons F la primitive de f qui s'annule en a : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors, la dérivée de F est f , donc est positive : F est croissante. Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $F(b) = F(a) = 0$. Donc F est constant et sa dérivée f est nulle. $\square$

(QC)

CHAPITRE 9

SOMMES DE RIEMANN ET CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALES

9.1. Sommes de Riemann

Cette section est très liée à l'exercice 1 de la troisième feuille sur l'intégration.

Définition 9.1.1. — Une *subdivision marquée* (σ, θ) d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'une subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ de $[a, b]$ et d'un marquage $\theta = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ où chaque y_k est dans l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

Autrement dit, on choisit un point dans chaque intervalle défini par la subdivision.

Définition 9.1.2. — Soit (σ, θ) une subdivision marquée de $[a, b]$. Alors la *somme de Riemann* de f associée à (σ, θ) est :

$$S(f, \sigma, \theta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(y_k).$$

Donnons un peu de sens à cette somme : $S(f, \sigma, \theta)$ est l'intégrale de la fonction en escalier qui vaut $f(y_k)$ sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarquons tout de suite un cas particulier intéressant : si $\sigma = (0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1)$ est la subdivision régulière de $[0, 1]$ en n intervalles, et $y_k = \frac{k}{n}$, alors on a comme en TD :

$$S(f, \sigma, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Théorème 9.1.3. — Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et (σ_n, θ_n) une suite de subdivisions marquées de $[a, b]$. On suppose que le pas de σ_n tend vers

0. Alors, on a

$$S(f, \sigma_n, \theta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème sous cette forme, mais plutôt le théorème plus précis qu'on obtient en supposant de plus que f est C^1 :

(QC)

Théorème 9.1.4. — Soit f une fonction C^1 sur $[a, b]$ et (σ, θ) une subdivision marquée de $[a, b]$. On note ℓ le pas de σ . Alors, on a :

$$\left| S(f, \sigma, \theta) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \ell(b-a) \sup_{[a,b]} |f'|.$$

Démonstration. — Soit φ la fonction en escalier dont la valeur sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est $f(y_k)$. On a :

$$\left| S(f, \sigma, \theta) - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (\varphi - f)(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi - f|(t) dt.$$

Montrons que $|\varphi - f| \leq \ell \sup_{[a,b]} |f'|$: soit $x \in [a, b]$ et k tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$. Alors on a $|\varphi - f|(x) = |\varphi(x) - f(x)| = |f(y_k) - f(x)|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, cette dernière grandeur est inférieure à $\sup_{[a,b]} |f'| |y_k - x|$. Or y_k et x sont dans le même intervalle de la subdivision σ , donc à distance inférieure à ℓ . Ainsi, $|\varphi - f| \leq \ell \sup_{[a,b]} |f'|$. En intégrant entre a et b , on obtient :

$$\left| S(f, \sigma, \theta) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi - f|(t) dt \leq (b-a) \ell \sup_{[a,b]} |f'|.$$

□

En particulier pour le cas des subdivisions régulières de $[0, 1]$:

(QC)

Corollaire 9.1.5. — Soit f une fonction C^1 sur $[0, 1]$. Alors on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |f'|}{n}.$$

$$\text{En particulier } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Le résultat précédent a un grand intérêt théorique : il permet de trouver la limite de sommes qu'on ne saurait pas traiter autrement. On renvoie au td pour des exemples.

9.2. Calculs approchés d'intégrales

Un problème important est de savoir en pratique calculer des valeurs approchées d'intégrales. Pour ça, on approxime la fonction par des fonctions en escalier, ou affine par morceaux, ou plus complexes... Le point de départ est le théorème précédent sur les sommes de Riemann : une somme de Riemann n'est pas forcément difficile à calculer et peut fournir une approximation (en $\frac{1}{n}$) de l'intégrale. On renvoie à la première partie de l'exercice 1 de la troisième feuille de TD sur l'intégration.

On peut, sans augmenter le nombre de calculs à faire (calculer n fois une valeur de la fonction), obtenir une approximation en $\frac{1}{n^2}$: en approximant la fonction à intégrer par des fonctions affines par morceaux, on effectue alors la *méthode des trapèzes*, où l'erreur est en $\frac{1}{n^2}$ (pour $n + 1$ valeurs calculées). On renvoie à la deuxième partie de l'exercice 1 de la troisième feuille de TD sur l'intégration.

Cette animation compare les deux méthodes présentées (somme de Riemann et méthode des trapèzes) et illustre que la deuxième est bien plus efficace.

9.3. Épilogue : Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Étendons rapidement la définition de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes :

Définition 9.3.1. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Notons $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ ses parties réelle et imaginaire.

- On dit que f est intégrable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
- Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt$.

On déduit sans difficultés des propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles :

Proposition 9.3.2. — La relation de Chasles est toujours vérifiée : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est intégrable et $c \in [a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

De plus la propriété de linéarité est toujours vérifiée.