Devoir : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Ce devoir est facultatif, à rendre à Antonin Guilloux le mercredi 3 février. Il sera corrigé mais non noté.

Les questions avec une étoile sont un peu plus dures, et ne sont plus réutilisées dans la suite du devoir.

Le but de ce devoir est de comprendre comment traiter les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, c'est-à-dire les suites vérifiant une récurrence :

$$\text{Pour tout entier } n, \text{ on a : } au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{RL2}$$

où a, b et c sont trois nombres réels, avec a non nul. On prendra dans la suite du devoir les trois exemples suivants :

(E1) Dans le premier exemple, on pose $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$. La récurrence est donc $u_{n+2} - 4u_n = 0$.

(E2) Dans le deuxième exemple, on pose $a = 1$, $b = -4$ et $c = 4$. La récurrence est donc $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

(E3) Dans le troisième exemple, on pose $a = 1$, $b = 0$ et $c = 4$. La récurrence est donc $u_{n+2} + 4u_n = 0$.

Notre but est de trouver des suites solutions de ces récurrences.

Exercice 1 (Quelques remarques générales)**.** On se place dans le cas général, c'est à dire qu'on étudie la récurrence (RL2). On suppose qu'on connaît deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence.

1. Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie encore cette relation. Montrer que pour tout nombre réel t, la suite $(ta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la vérifie toujours.

Solution : On peut écrire pour tout n entier :

$$a(a_{n+2} + b_{n+2}) + b(a_{n+1} + b_{n+1}) + c(a_n + b_n) = (aa_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n) + (ab_{n+2} + bb_{n+1} + cb_n) = 0;$$

et $a(ta_{n+2}) + b(ta_{n+1}) + c(ta_n) = t(aa_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n) = 0$.
Donc les suites $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien solutions.

2. On suppose (dans cette question seulement) en plus que $a_0 = b_0$ et $a_1 = b_1$. Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $a_n = b_n$: les deux premiers termes déterminent entièrement la suite vérifiant (RL2).

Solution : On montre les égalités $a_n = b_n$ par récurrence (étendue) sur n : par hypothèse, c'est vrai pour les entiers 0 et 1. Supposons maintenant que ce soit vrai pour les entiers n et $n+1$, avec $n \in \mathbb{N}$. On veut le montrer pour $n + 2$.
Or on sait que $aa_{n+2} = -ba_{n+1} - ca_n$. Par hypothèse de récurrence, on a $-ba_{n+1} - ca_n = -bb_{n+1} - cb_n = -ab_{n+2}$.
On obtient donc $aa_{n+2} = ab_{n+2}$. Or on a supposé que $a \neq 0$. On peut donc bien conclure à l'égalité $a_{n+2} = b_{n+2}$.
Ceci conclut la preuve par récurrence.

3. On suppose maintenant que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre solution. Montrer en utilisant la première question que la suite $(c_0a_n + c_1b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la récurrence (RL2). Vérifier que les deux premiers termes de cette dernière suite sont c_0 puis c_1. Utiliser la deuxième question pour montrer que pour tout n, on a :
$$c_n = c_0a_n + c_1b_n.$$

Solution : La première question permet d'affirmer que les deux suites $(c_0a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_1b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. Elle permet aussi d'affirmer que leur somme est solution : la suite $(c_0a_n + c_1b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (RL2).
On peut calculer ses deux premiers termes : ils valent par construction c_0 puis c_1. La suite $(c_0a_n + c_1b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une solution de (RL2) qui a les deux premiers termes identiques à ceux de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La deuxième question permet d'affirmer que ces deux suites sont les mêmes. Autrement dit, pour tout n entier on a $c_n = c_0a_n + c_1b_n$.

Si on connaît deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la dernière question, on les appellera une base de l'ensemble des solutions. Tout autre solution est entièrement déterminée par ses deux premiers termes suivant la formule ci-dessus.

Exercice 2 (Le premier exemple)**.** On définit la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite qui vérifie la récurrence de l'exemple (E1) sous les conditions $k_0 = 1$, $k_1 = 1$. On cherche le terme général de cette suite.

1. Montrer que les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions de (E1). Ecrire les 10 premiers termes de ces deux suites.

Solution : Pour tout n entier, on peut écrire

$$2^{n+2} - 4 \times 2^n = 4 \times 2^n - 4 \times 2^n = 0$$

et, de même,

$$(-2)^{n+2} - 4 \times (-2)^n = 4 \times (-2)^n - 4 \times (-2)^n = 0.$$

Donc ces deux suites sont solutions. Leur dix premiers termes sont respectivement $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)$ et $(1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512)$.

2. En déduire que les deux suites $(a_n = \dfrac{1}{2}(2^n + (-2)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n = \dfrac{1}{4}(2^n - (-2)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions et qu'en plus elles vérifient $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.

Solution : On montre que ces deux suites sont solutions comme dans la dernière question du premier exercice. Calculons $a_0 = \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}(2 - 2) = 0$ et $b_0 = \dfrac{1}{4}(1 - 1) = 0$, $b_1 = \dfrac{1}{4}(2 + 2) = 1$.

3. En déduire que pour tout n, on a $k_n = a_n + b_n = \dfrac{3}{4}2^n + \dfrac{1}{4}(-2)^n$.

Solution : On utilise le résultat de la troisième question de l'exercice 1 : pour tout n, on a

$$k_n = k_0 a_n + k_1 b_n = \frac{1}{2}(2^n + (-2)^n) + \frac{1}{4}(2^n - (-2)^n) = \frac{3}{4}2^n + \frac{1}{4}(-2)^n.$$

4. (*) Montrer que l'ensemble des solutions est l'ensemble

$$\left\{(sa_n + tb_n = (\frac{s}{2} + \frac{t}{4})2^n + (\frac{s}{2} - \frac{t}{4})(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution : Déjà, en utilisant la première question de l'exercice 1, toute suite de la forme $(sa_n + tb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution. Réciproquement, si une suite (u_n) est solution, on sait écrire grâce à la troisième question de l'exercice 1 : $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n$. C'est à dire que la suite (u_n) est bien dans l'ensemble décrit (en prenant $s = u_0$ et $t = u_1$.)

Exercice 3 (Le deuxième exemple)**.** On définit la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite qui vérifie la récurrence de l'exemple (E2) sous les conditions $l_0 = 1$, $l_1 = 1$. On cherche le terme général de cette suite.

1. Montrer que les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions de (E2). Ecrire les 5 premiers termes de ces deux suites.

Solution : Pour tout n entier, on peut écrire

$$2^{n+2} - 4 \times 2^{n+1} + 4 \times 2^n = 4 \times 2^n - 8 \times 2^n - 4 \times 2^n = 0$$

et, de même,

$$2^{n+2}(n + 2) - 4 \times 2^{n+1}(n + 1) + 4 \times 2^n n = 4(n + 2)2^n - 8(n + 1)2^n + 4n \times 2^n = 0.$$

Donc ces deux suites sont solutions. Leur cinq premiers termes sont respectivement $(1, 2, 4, 8, 16)$ et $(0, 2, 8, 24, 64, 160)$.

2. En déduire que les deux suites $(a_n = (2^n - 2^n n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n = \dfrac{1}{2}(2^n n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions et qu'en plus elles vérifient $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.

Solution : On montre que ces deux suites sont solutions comme dans la dernière question du premier exercice. Calculons $a_0 = (1 - 0) = 1$, $a_1 = (2 - 2) = 0$ et $b_0 = \dfrac{1}{2}(0) = 0$, $b_1 = \dfrac{1}{2}(2) = 1$.

3. En déduire que pour tout n, on a $l_n = a_n + b_n = 2^n - \frac{1}{2}2^n n = 2^n(1 - \frac{n}{2})$.

Solution : On utilise le résultat de la troisième question de l'exercice 1 : pour tout n, on a

$$l_n = l_0 a_n + l_1 b_n = (2^n - 2^n n) + \frac{1}{2}(2^n n) = 2^n(1 - \frac{n}{2}).$$

4. (*) Montrer que l'ensemble des solutions est l'ensemble

$$\left\{(sa_n + tb_n = 2^n(s + (\frac{t}{2} - s)n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution : Le raisonnement est identique à celui de la dernière question de l'exercice précédent.

Exercice 4 (Le troisième exemple)**.** On définit la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite qui vérifie la récurrence de l'exemple (E3) sous les conditions $m_0 = 1$, $m_1 = 1$. On cherche le terme général de cette suite.

1. Montrer que les suites $(2^n \cos(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n \sin(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions de (E3). Ecrire les 10 premiers termes de ces deux suites.

Solution : Pour tout n entier, on peut écrire

$$2^{n+2}\cos((n+2)\frac{\pi}{2}) + 4 \times 2^n \cos(n\frac{\pi}{2}) = 4 \times 2^n(\cos(n\frac{\pi}{2} + \pi) + \cos(n\frac{\pi}{2})) = 0$$

et, de même,

$$2^{n+2}\sin((n+2)\frac{\pi}{2}) + 4 \times 2^n \sin(n\frac{\pi}{2}) = 4 \times 2^n(\sin(n\frac{\pi}{2} + \pi) + \sin(n\frac{\pi}{2})) = 0.$$

(En effet, pout tout nombre x, on a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.) Donc ces deux suites sont solutions. Leur dix premiers termes sont respectivement
$(1, 0, -4, 0, 16, 0, -64, 0, 256, 0)$ et $(0, 2, 0, -8, 0, 32, 0, -128, 0, 512)$.

2. En déduire que les deux suites $(a_n = 2^n \cos(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n = \frac{1}{2}(2^n \sin(n\frac{\pi}{2})))_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions et qu'en plus elles vérifient $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.

Solution : On raisonne comme dans les exercices précédents : ces suites sont solutions. De plus on voit immédiatement que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.

3. En déduire que pour tout n, on a $m_n = a_n + b_n = 2^n(\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\sin(n\frac{\pi}{2}) = 2^n(\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\sin(n\frac{\pi}{2}))$.

Solution : A nouveau, le raisonnement est exactement le même que dans les deux exercices précédents (et ce n'est pas un hasard, voir le commentaire en fin de sujet).

4. (*) Montrer que l'ensemble des solutions est l'ensemble

$$\left\{(sa_n + tb_n = 2^n(s\cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{t}{2}\cos(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution : Encore une fois, le raisonnement est le même que dans l'exercice 2.

Un mot sur la méthode générale : pour trouver deux suites solutions à la récurrence (RL2), on commence par regarder le polynôme $aX^2 + bX + c$, et on calcule ses racines. Trois cas sont possibles :

1. Il possède deux racines réelles distinctes r_+ et r_-, comme dans l'exemple (E1). Alors les deux suites $(r_+^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_-^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. A partir de ces deux suites là, l'ensemble des solutions est
$$\left\{(sr_+^n + tr_-^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$
2. Il possède une racine réelle double r, comme dans l'exemple (E2). Alors les deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. A partir de ces deux suites là, l'ensemble des solutions est
$$\{(sr^n + tr^n n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s,t\in\mathbb{R}\}.$$
3. Il possède deux racines complexes conjuguées re^{it} et re^{-it}, comme dans l'exemple (E3). Alors les deux suites $(r^n\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r^n\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. A partir de ces deux suites là, l'ensemble des solutions est
$$\{(sr^n\cos(nt) + tr^n\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } s,t\in\mathbb{R}\}.$$

Vous avez tous les outils pour vérifier ces résultats !