

EXAMEN DU COURS DE M2
« **Introduction à la théorie de Mori** »
Responsable : Mr O. DEBARRE

Toutes les variétés sont définies sur un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit C une courbe projective lisse de genre g et soit X la surface $C \times C$.

- a) On considère un automorphisme de C et son graphe $\Gamma \subset X$. Calculer $(K_X \cdot \Gamma)$ et (Γ^2) .
- b) Si $g \geq 2$, montrer que le groupe des automorphismes de C est fini.

Exercice 2. Soit $\pi : X \rightarrow B$ une surface réglée.

- a) Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement d'un point x de X . Décrire la fibre de $\pi(x)$ par l'application composée $\tilde{X} \rightarrow X \rightarrow B$.
- b) Montrer que le transformé strict dans \tilde{X} de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ peut être contracté pour donner une autre surface réglée $X(x) \rightarrow B$.
- c) Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit \mathbf{F}_n la surface de Hirzebruch contenant une courbe C_n d'auto-intersection $-n$. Identifier la surface $\mathbf{F}_n(x)$ (on distinguera deux cas selon que x est sur la courbe C_n ou pas).

Exercice 3. Soit $X \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts.

- a) Déterminer le cône des courbes $\overline{\mathbf{NE}}(X)$.
- b) Déterminer tous les sous-cônes extrémaux de $\overline{\mathbf{NE}}(X)$ et pour chacun d'eux, déterminer un morphisme $X \rightarrow Y$ dont le cône des courbes relatif est ce sous-cône.

Exercice 4. Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective normale X de dimension n . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) D est gros (*);
- (ii) D est somme d'un \mathbf{Q} -diviseur ample et d'un \mathbf{Q} -diviseur effectif ;
- (iii) D est numériquement équivalent à la somme d'un \mathbf{Q} -diviseur ample et d'un \mathbf{Q} -diviseur effectif ;
- (iv) il existe un entier positif m tel que l'application rationnelle

$$X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, mD)$$

définie par le système linéaire $|mD|$ soit birationnelle sur son image.

(*) On rappelle que cela signifie $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{h^0(X, mD)}{m^n} > 0$.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU COURS DE M2

« Introduction à la théorie de Mori »

Responsable : Mr O. DEBARRE

Exercice 1. Soit C une courbe projective lisse de genre g et soit X la surface $C \times C$.

a) On considère un automorphisme de C et son graphe $\Gamma \subset X$. Calculer $(K_X \cdot \Gamma)$ et (Γ^2) .

Soit x_1 la classe de la courbe $\star \times X$ et soit x_2 la classe de la courbe $X \times \star$. On a $[K_X] = 2(g-1)(x_1 + x_2)$ et $[\Gamma] \cdot x_i = 1$, d'où $(K_X \cdot \Gamma) = 4(g-1)$.

La formule du genre appliquée à la courbe lisse Γ de genre g ,

$$g = 1 + \frac{1}{2}((K_X \cdot \Gamma) + (\Gamma^2)),$$

donne alors $(\Gamma^2) = -2(g-1)$.

b) Si $g \geq 2$, montrer que le groupe des automorphismes de C est fini.

Si $g \geq 2$, K_X est ample, donc, pour chaque $k > 0$, le nombre de classes de courbes $R \subset X$ telles que $(K_X \cdot R) \leq k$ est fini (cela fait partie de l'énoncé du théorème de Kleiman). À chaque automorphisme σ de C est associé son graphe Γ_σ , et l'application $\sigma \mapsto [\Gamma_\sigma]$ est injective : en effet, si $[\Gamma_\sigma] = [\Gamma_\tau]$, on a

$$(\Gamma_\sigma \cdot \Gamma_\tau) = (\Gamma_\sigma^2) = -2(1-g) < 0,$$

donc $\Gamma_\sigma = \Gamma_\tau$ (ce sont des courbes irréductibles), puis $\sigma = \tau$. On en déduit que le nombre d'automorphismes de C est fini.

Exercice 2. Soit $\pi : X \rightarrow B$ une surface réglée.

a) Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement d'un point x de X . Décrire la fibre de $\pi(x)$ par l'application composée $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X \rightarrow B$.

La fibre de $\pi(x)$ est réunion du transformé strict F dans \tilde{X} de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ et du diviseur exceptionnel E de l'éclatement.

b) Montrer que le transformé strict dans \tilde{X} de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ peut être contracté pour donner une autre surface réglée $X(x) \rightarrow B$.

On a $(F^2) = -1$ et la courbe F est rationnelle lisse. On peut donc la contracter (critère de Castelnuovo) par un morphisme birationnel $c : \tilde{X} \rightarrow X(x)$, où $X(x)$ est une surface lisse. Les fibres du morphisme $X(x) \rightarrow B$ induit par $\tilde{\pi}$ sont toutes isomorphes à des courbes rationnelles, donc $X(x)$ est une surface réglée.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit \mathbf{F}_n la surface de Hirzebruch contenant une courbe C_n d'auto-intersection $-n$. Identifier la surface $\mathbf{F}_n(x)$.

Si $x \in C_n$ (resp. $x \notin C_n$), le transformé strict de C_n dans \tilde{X} est d'auto-intersection $-n-1$ (resp. $-n$). L'image par c de ce transformé strict dans $X(x)$ est d'auto-intersection $-n-1$ (resp. $-n+1$). La surface $\mathbf{F}_n(x)$ est donc \mathbf{F}_{n+1} (resp. \mathbf{F}_{n-1}), sauf peut-être lorsque

$n = 0$ et $x \notin C_0$, ou $n = 1$ et $x \notin C_1$ (l'existence d'une courbe d'auto-intersection 0 sur $X(x)$ ne prouve rien !). Mais le premier cas ne peut se produire: lorsque $n = 0$, il passe une courbe C_0 par n'importe quel point x de $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. On a donc toujours $\mathbf{F}_0(x) \simeq \mathbf{F}_1$. Pour le second cas, on peut remarquer qu'en général, la procédure inverse partant du point $c(F)$ sur $X(x)$ redonne X . Si $x \notin C_1$, les seules possibilités sont $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_0$, ou $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_2$ et $y := c(F) \notin \mathbf{F}_2$. Dans le second cas, on aurait par l'opération inverse $x \in C_1$, ce qui n'est pas. On a donc bien $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_0$.

Exercice 3. Soit $X \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement de deux points distincts.

a) Déterminer le cône des courbes $\overline{\text{NE}}(X)$.

Par le cours, le nombre de Picard de X est 3 : l'espace vectoriel $N_1(X)$ est engendré par les classes e_1 et e_2 des diviseurs exceptionnels (chacune est d'auto-intersection -1), et par la classe h de l'image inverse d'une droite de \mathbf{P}^2 . La classe $\ell = h - e_1 - e_2$ est effective car représentée par le transformé strict L de la droite de \mathbf{P}^2 passant par les deux points éclatés p_1 et p_2 . Son auto-intersection est -1 donc, par le cours, les trois classes e_1 , e_2 et ℓ engendrent des rayons extrémaux du cône $\overline{\text{NE}}(X)$. Montrons

$$\overline{\text{NE}}(X) = \mathbf{R}^+e_1 + \mathbf{R}^+e_2 + \mathbf{R}^+\ell.$$

Soit $c = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3\ell$ une classe effective. La classe $\ell + e_1$ est représentée par une courbe irréductible d'auto-intersection nulle donc est nef. On a donc $0 \leq c \cdot (\ell + e_1) = a_2$ et de même $a_1 \geq 0$. On a aussi $0 \leq c \cdot h = a_3$, ce qui montre ce que l'on veut.

b) Déterminer tous les sous-cônes extrémaux de $\overline{\text{NE}}(X)$ et pour chacun d'eux, déterminer un morphisme $X \rightarrow Y$ dont le cône des courbes relatif est ce sous-cône.

Les sous-cônes extrémaux sont $\mathbf{R}^+e_1 + \mathbf{R}^+e_2 + \mathbf{R}^+\ell$, $\mathbf{R}^+e_1 + \mathbf{R}^+e_2$, $\mathbf{R}^+e_1 + \mathbf{R}^+\ell$, $\mathbf{R}^+e_2 + \mathbf{R}^+\ell$, \mathbf{R}^+e_1 , \mathbf{R}^+e_2 , $\mathbf{R}^+\ell$, $\{0\}$.

Ils correspondent respectivement aux morphismes : constant $X \rightarrow \{\text{point}\}$, contraction $X \rightarrow \mathbf{P}^2$ de E_1 et E_2 , projection $\pi_1 : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ depuis p_2 , projection $\pi_2 : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ depuis p_1 , contraction $X \rightarrow X_2$ de E_1 (où $X_2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ est l'éclatement de p_2), contraction $X \rightarrow X_1$ de E_2 (où $X_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ est l'éclatement de p_1), contraction $(\pi_1, \pi_2) : X \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de L , identité $X \rightarrow X$.

Exercice 4. Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective normale X de dimension n . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) D est gros ;
- (ii) D est somme d'un \mathbf{Q} -diviseur ample et d'un \mathbf{Q} -diviseur effectif ;
- (iii) D est numériquement équivalent à la somme d'un \mathbf{Q} -diviseur ample et d'un \mathbf{Q} -diviseur effectif ;
- (iv) il existe un entier positif m tel que l'application rationnelle

$$\phi_{mD} : X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, mD)$$

définie par le système linéaire $|mD|$ soit birationnelle sur son image.

Montrons (i) \Rightarrow (ii). Soit A un diviseur ample effectif sur X . Pour chaque $m > 0$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, mD - A) \rightarrow H^0(X, mD) \rightarrow H^0(A, mD).$$

Comme A est de dimension $n - 1$, on a vu dans le cours $h^0(A, mD) = O(m^{n-1})$. Comme D est gros, la dimension de l'espace vectoriel du milieu grandit comme am^n , avec $a > 0$, pour une infinité d'entiers m . Il en existe donc un pour lequel $H^0(X, mD - A) \neq 0$. On peut donc écrire $mD = A + E$, avec E effectif, d'où (ii).

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est claire. Montrons (iii) \Rightarrow (ii). Si $D \sim_{\text{num}} A + E$, avec A ample et E effectif, on a $D = (D - E) + E$, avec $D - E \sim_{\text{num}} A$. L'amplitude étant une propriété numérique (critère de Kleiman), $D - E$ est ample, d'où (ii).

Montrons (ii) \Rightarrow (iv). Si $D = A + E$, avec A ample et E effectif, il existe un entier m pour lequel mE est un diviseur (à coefficients entiers) et mA est un diviseur très ample. Il induit alors un plongement $\phi_{mA} : X \rightarrow \mathbf{P}H^0(X, mA)$. Si s est une section de $\mathcal{O}_X(mE)$ de diviseur mE , la multiplication par s induit une injection de $H^0(X, mA)$ dans $H^0(X, mA + mE) = H^0(X, mD)$. Les sections ainsi obtenues de $\mathcal{O}_X(mD)$ définissent un plongement sur $X - E$, donc l'application rationnelle ϕ_{mD} est aussi un plongement sur $X - E$.

Montrons (iv) \Rightarrow (i). L'image $Y := \phi_{mD}(X)$ est une sous-variété dimension n , donc $h^0(Y, rH) \sim ar^n$ pour $r \rightarrow +\infty$, avec $a > 0$ (ici, H est la restriction d'un hyperplan à Y). L'application ϕ_{mD}^* induit une injection $H^0(Y, rH) \rightarrow H^0(X, rmD)$, donc D est gros.