# SUR LES REVÊTEMENTS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Olivier Debarre

27 juin 2006

On travaille sur le corps des complexes. Soit $f : Y \to X$ un revêtement, c'est-à-dire un morphisme surjectif fini, de degré $d$ entre variétés projectives lisses de même dimension $n$. Le morphisme $f$ est plat, donc le faisceau $f_*\mathscr{O}_Y$ est localement libre et il existe un *morphisme trace* $\mathrm{Tr}_{Y/X} : f_*\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ tel que la composée

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow f_*\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{Y/X}} \mathscr{O}_X$$

soit la multiplication par $d$. On note $E_f$ le dual de son noyau. C'est un fibré vectoriel sur $X$ de rang $d-1$ qui vérifie[1]

$$f_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X \oplus E_f^\vee$$

Notons que si $X$ est connexe, $Y$ l'est si et seulement si $H^0(X, E_f^\vee) = 0$.

**Exemple 1** Soit $E \subset \mathbf{P}^n$ une courbe elliptique normale de degré $n+1$. Le fibré vectoriel associé au revêtement

$$\{(x, H) \in E \times (\mathbf{P}^n)^\vee \mid x \in H\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} (\mathbf{P}^n)^\vee$$

de degré $n+1$ est le fibré tangent $T_{\mathbf{P}^n}$.

L'intérêt de ce fibré vectoriel provient de la proposition suivante.

[1] Par dualité pour un morphisme fini et plat, on a aussi

$$f_*\omega_{Y/X} = \mathscr{O}_X \oplus E_f$$

**Proposition 1** *Il existe une factorisation*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"'] & & E_f \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'inclusion $E_f^\vee \subset f_* \mathscr{O}_Y$ induit un morphisme

$$\operatorname{Sym} E_f^\vee \longrightarrow f_* \mathscr{O}_Y$$

de $\mathscr{O}_Y$-algèbres qui est surjectif puisque $\operatorname{Sym}^0 E_f^\vee$ s'envoie sur $\mathscr{O}_X$ et $\operatorname{Sym}^1 E_f^\vee$ sur $E_f^\vee$. En prenant les spectres relatifs, on obtient

$$E_f = \mathbf{Spec} \operatorname{Sym} E_f^\vee \hookrightarrow \mathbf{Spec}\, f_* \mathscr{O}_Y = Y$$

qui est l'inclusion cherchée. □

**Exemple 2** Si $f : Y \to X$ est un revêtement double, $E_f$ est un faisceau inversible sur $X$ et le lieu de branchement de $f$ est un diviseur lisse dans $X$ qui est le lieu des zéros d'une section $s \in H^0(X, E_f^{\otimes 2})$. On reconnaît la construction classique : $Y$ se trouve dans l'espace total de $E_f$ comme

$$Y = \{(x,t) \in E_f \mid t^2 = s(x)\}$$

Inversement, étant donné un faisceau inversible $L$ sur $X$ et un diviseur lisse dans $|L^{\otimes 2}|$, on peut construire un revêtement double $f : Y \to X$, avec $Y$ lisse, ramifié au-dessus de ce diviseur. On ne peut donc espérer montrer des propriétés de $E_f$ en général.

Rappelons qu'à tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur un schéma $X$ de type fini (sur $\mathbf{C}$), on associe le $X$-schéma

$$\mathbf{P}(\mathscr{F}) = \mathbf{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \operatorname{Sym}^m \mathscr{F} \right)$$

et un faisceau inversible $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{F})}(1)$ sur $\mathbf{P}(\mathscr{F})$. On dit que $\mathscr{F}$ est *ample* si $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{F})}(1)$ l'est.

Dans la situation décrite plus haut, l'amplitude de $E_f$ a plusieurs conséquences importantes :

a) si $S$ est une variété propre intègre et $g : S \to X$ un morphisme dont l'image est de dimension au moins 1, $S \times_X Y$ est connexe[2] ;
b) pour tout entier $\ell$, le lieu des points $y$ de $Y$ où le degré local de $f$ (c'est-à-dire le nombre de feuillets qui se rejoignent en $y$) est $> \ell$ est de codimension $\leq \ell$ pour $\ell \leq \min\{d-1, n\}$[3] ;
c) les morphismes induits

$$f^* : H^i(X, \mathbf{C}) \longrightarrow H^i(Y, \mathbf{C})$$

sont bijectifs pour $i \leq n - d + 1$[4].

On s'attend à ce que l'application $f^*$ soit encore bijective pour la cohomologie à coefficients entiers, ainsi que les applications induites $f_* : \pi_i(Y) \to$

[2]Soit $f' : S \times_X Y \to S$ le morphisme déduit de $f$. Si $g$ est *fini,* le fibré vectoriel $E_{f'} = g^* E_f$ est ample, donc $H^0(S, E_{f'}^\vee) = 0$. Il s'ensuit que $S \times_X Y$ est connexe. Dans le cas général, on considère la *factorisation de Stein* $f : S \xrightarrow{p} T \xrightarrow{h} X$, où $p$ est à fibres connexes et $h$ est fini. Le morphisme $S \times_X Y \to T \times_X Y$ induit par $p$ est à image et fibres connexes, donc $S \times_X Y$ est connexe.

[3]Soit $e_f(y)$ le degré local de $f$ en $y$. Montrons que pour tout entier $\ell$, le fermé

$$R_\ell = \{y \in Y \mid e_f(y) > \ell\}$$

n'est pas vide pour $\ell \leq \min\{d-1, n\}$ ; c'est un résultat général qu'il est alors de codimension $\leq \ell$. On procède par récurrence sur $\ell$. On a $R_0 = Y$. Soit $\ell > 0$ et soit $R$ une composante irréductible de $R_{\ell-1}$. Elle est de codimension $\leq \ell - 1 < n$ dans $Y$, donc $R \times_X Y$ est connexe. Mais $R \times_X Y$ contient la diagonale $\Delta_R$ de $R$. S'il lui est égal, $R \subset R_{d-1} \subset R_\ell$. Sinon, une autre composante de $R \times_X Y$ rencontre $\Delta_R$ et si $y$ est un point d'intersection, on a $e_f(y) > \ell$, de sorte que $R_\ell$ n'est pas vide.

[4]Considérons la complétion projective $\pi : \bar{E}_f = \mathbf{P}(E_f^\vee \oplus \mathscr{O}_X) \to X$ de $E_f$. Soit $\xi \in H^{2e}(\bar{E}_f, \mathbf{C})$ la classe du diviseur à l'infini $\bar{E}_f - E_f$ et soit $[Y] \in H^{2e}(\bar{E}_f, \mathbf{C})$ la classe de l'image de $Y \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{E}_f$, avec $e = d - 1$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{n-e+i}(Y, \mathbf{C}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "\cdot j^*[Y]"'] & H^{n+e+i}(\bar{E}_f, \mathbf{C}) = H^{n+e+i}(X, \mathbf{C})[\xi] \arrow[d, "j^*"] & H^{n+e+i}(X, \mathbf{C}) \arrow[l, "\pi^*"'] \arrow[dl, "f^*"] \\
& H^{n+e+i}(Y, \mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

avec $i \geq 0$. La classe de $Y$ dans $\bar{E}_f$ est $d$ fois celle de la section nulle ; comme $j^*\xi = 0$, on en déduit que $j^*[Y]$ n'est autre que $dc_e(f^*E_f)$. Un analogue du théorème de Lefschtez difficile, dû à Sommese, montre que puisque $f^*E_f$ est ample, le cup-produit par sa classe de Chern d'ordre maximal est surjectif lorsque $e \leq n$. L'application $j^*$ est alors surjective, et comme $j^*\xi = 0$, il en est de même pour $f^*$. Comme $f^*$ est injective en tout degré, elle est bijective, et on obtient c) par dualité de Poincaré.

$\pi_i(X)$.

Lorsque $X$ est un espace projectif, l'amplitude de $E_f$ est connue.

**Théorème 1 (Lazarsfeld, 1980)** *Soient $Y$ une variété projective lisse et $f : Y \to \mathbf{P}^n$ un revêtement. Le fibré vectoriel $E_f(-1)$ est globalement engendré.*

DÉMONSTRATION. Des résultats de Mumford montrent qu'il suffit pour cela de montrer que $E_f(-1)$ est 0-régulier, c'est-à-dire

$$H^i(\mathbf{P}^n, E_f(-i-1)) = 0$$

pour tout $i > 0$. Cela résulte du théorème d'annulation de Kodaira sur la variété $Y$. $\square$

Ce résultat a été généralisé ensuite par Kim et Manivel au cas où $X$ est une grassmannienne ou une grassmannienne lagrangienne. Nous nous intéressons ici au cas où $X$ est une variété abélienne.

**Théorème 2 (Peternell–Sommese, 2002)** *Soient $X$ une variété abélienne, $Y$ une variété projective lisse et $f : Y \to X$ un revêtement. Le fibré vectoriel $E_f$ est nef.*

DÉMONSTRATION. Soit $H$ un diviseur ample sur $X$. On peut supposer $Y$ connexe, auquel cas on montre comme ci-dessus que $E_f((n+1)H)$ est globalement engendré. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y' = Y \times_X X \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\mathbf{k}_X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{k}_X$ est la multiplication par $k$. Le fibré vectoriel

$$E_{f'}((n+1)H) = (\mathbf{k}_X^* E_f)((n+1)H)$$

est globalement engendré, donc nef. Comme $\mathbf{k}_X^* H = k^2 H$, on en déduit que $E_f(\frac{n+1}{k^2}H)$ est nef (on peut donner un sens à cela), donc aussi, en passant à la limite, $E_f$. $\square$

Le fibré vectoriel $E_f$ peut très bien être numériquement trivial (c'est le cas par exemple si $f$ est étale). Lorsque $X$ est une variété abélienne *simple,* on a un résultat plus fort que nous allons démontrer.

**Théorème 3** *Soient $X$ une variété abélienne* simple, *$Y$ une variété projective lisse connexe et $f : Y \to X$ un revêtement. Si $f$ ne se factorise par aucune isogénie non triviale $X' \to X$, le fibré vectoriel $E_f$ est ample.*

On note comme plus haut $d$ le degré de $f$ et $n$ la dimension de $X$. Si $d \leq n$, on peut montrer que le morphisme $f_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est bijectif. En particulier, le groupe $H_1(Y, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $H_1(X, \mathbf{Z})$ (comparer avec la propriété c) ci-dessus), donc est sans torsion. Il en est donc de même pour $H^2(Y, \mathbf{Z})$ par le théorème des coefficients universels.

Lorsque $d < n$, le morphisme $H^2(f, \mathbf{Z}) : H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(Y, \mathbf{Z})$ est injectif à conoyau fini et il en est donc de même pour $\mathrm{Pic}(f) : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$. Il est probable que ces deux applications soient bijectives.

# 1 Transformée de Fourier–Mukai

Soient $X$ une variété abélienne de dimension $n$ et $\widehat{X}$ sa variété abélienne duale. Pour tout point $\xi$ de $\widehat{X}$, on note $P_\xi$ le faisceau inversible numériquement trivial correspondant sur $X$.

Il existe sur $X \times \widehat{X}$ un unique faisceau inversible $\mathscr{P}$, dit de Poincaré, qui vérifie, pour tout $\xi$ dans $\widehat{X}$,

$$\mathscr{P}|_{X \times \{\xi\}} \simeq P_\xi \quad , \quad \mathscr{P}|_{\{0\} \times \widehat{X}} \simeq \mathscr{O}_{\widehat{X}}$$

Étant donné un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $X$, ou plus généralement un complexe de tels faisceaux, on définit

$$\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}) = q_*(p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{P})$$

où $p : X \times \widehat{X} \to X$ et $q : X \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ sont les deux projections. On définit ainsi un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules cohérents, dont on note

$$\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}} : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(\widehat{X})$$

le foncteur dérivé. Comme $\widehat{\widehat{X}}$ est canoniquement isomorphe à $X$, on a aussi un autre foncteur

$$\mathbf{R}\mathscr{S} : \mathbf{D}(\widehat{X}) \to \mathbf{D}(X)$$

Le résultat principal de Mukai est le suivant.

**Théorème 4** *On a un isomorphisme canonique de foncteurs*

$$\mathbf{R}\mathscr{S} \circ \mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}} \simeq (-\mathbf{1}_X)^*[-n]$$

**Exemple 3** Si $\xi \in \widehat{X}$, on vérifie que l'on a $\mathbf{R}\mathscr{S}(\mathbf{C}_\xi) = P_\xi[0]$. On en déduit $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(P_\xi) = \mathbf{C}_{-\xi}[-n]$.

De façon plus pratique, la cohomologie du complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$ est donnée par les

$$R^i\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}) = R^i q_*(p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{P})$$

C'est un faisceau sur $\widehat{X}$ dont le support est contenu dans le lieu

$$V_i(\mathscr{F}) = \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi) \neq 0\} \tag{1}$$

**Définition 1** *Un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $X$ est dit* M-régulier *si*

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} R^i\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}) > i$$

*pour tout $i > 0$.*

En général, on vérifiera la $M$-régularité en montrant $\operatorname{codim} V_i(\mathscr{F}) > i$ pour tout $i > 0$[5].

**Exemple 4** Si $L$ est un faisceau inversible ample sur $X$, on a $V_i(L) = \varnothing$ pour tout $i > 0$. Le complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(L)$ est concentré en degré 0, où c'est un faisceau localement libre de rang le degré $h^0(X, L)$ de $L$. On le note $\widehat{L}$. Le faisceau $L$ est $M$-régulier.

On vérifie aussi que le complexe $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(L^\vee)$ est concentré en degré $n$, où c'est le faisceau localement libre $(-\mathbf{1}_X)^*\widehat{L}^\vee$, de sorte que $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(L^\vee) = (-\mathbf{1}_X)^*\widehat{L}^\vee[-n]$.

[5]Soit $\pi : X' \to X$ une isogénie. On a $V_i(\pi^*\mathscr{F}) = \pi^*\big(V_i(\mathscr{F})\big)$, de sorte que $\mathscr{F}$ vérifie cette condition si et seulement si $\pi^*\mathscr{F}$ la vérifie. Probablement, $\mathscr{F}$ est $M$-régulier si et seulement si $\pi^*\mathscr{F}$ l'est.

## 2 Faisceaux $M$-réguliers

Les faisceaux $M$-réguliers ont des propriétés géométriques remarquables.

**Théorème 5 (Pareschi–Popa 2003, Debarre 2004)** *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent $M$-régulier sur la variété abélienne $X$. On considére les propriétés suivantes :*

(i) *le faisceau $\mathscr{F}$ est $M$-régulier ;*

(ii) *pour tout faisceau inversible $L$ ample sur $X$, il existe un entier positif $N$ tel que, pour $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \widehat{X}^N$ général, l'application*

$$\bigoplus_{i=1}^{N} H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes H^0(X, L \otimes P_{\xi_i}^{\vee}) \to H^0(X, \mathscr{F} \otimes L) \tag{2}$$

*est surjective ;*

(iii) *le faisceau $\mathscr{F}$ est* continûment globalement engendré *: il existe un entier positif $N$ tel que, pour $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \widehat{X}^N$ général, l'application*

$$\bigoplus_{i=1}^{N} H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes P_{\xi_i}^{\vee} \to \mathscr{F} \tag{3}$$

*est surjective ;*

(iv) *il existe une isogénie $\pi : X' \to X$ telle que $\pi^*(\mathscr{F} \otimes P_\xi)$ soit globalement engendré pour tout $\xi \in \widehat{X}$ ;*

(v) *$\mathscr{F}$ est ample.*

*On a* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v)[6].

Démonstration. Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). La surjectivité de l'application (2) est équivalente à celle, pour tout ouvert non vide $U$ de $\widehat{X}$, de

$$\bigoplus_{\xi \in U} H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi) \otimes H^0(X, L \otimes P_\xi^{\vee}) \to H^0(X, \mathscr{F} \otimes L)$$

[6]L'implication (v) $\Rightarrow$ (iv) n'est pas vraie en général : si $C$ est une courbe projective lisse dans sa jacobienne $JC$ et $\mathscr{F}$ un faisceau localement libre sur $C$ vu comme faisceau sur $JC$, il se peut que l'image inverse de $\mathscr{F}$ par aucun morphisme étale $C' \to C$ ne soit globalement engendré (voir Parameswaran s'il se peut que $H^0(C, \mathscr{F} \otimes P_\xi)$ soit nul pour tout $\xi \in \operatorname{Pic}^0(C)$). Je ne connais pas d'exemple avec $\mathscr{F}$ (ample) localement libre sur $X$ : si $\dim X = 1$, on a par Riemann–Roch $h^0(\mathscr{F} \otimes P) = c_1(\mathscr{F}) > 0$ ; si $\dim X = 2$, on a par Riemann–Roch $h^0(\mathscr{F} \otimes P) \geq \frac{1}{2}(c_1^2(\mathscr{F}) - 2c_2(\mathscr{F}))$.

donc à l'injectivité de sa duale

$$H^0(X, \mathscr{F} \otimes L)^\vee \to \bigoplus_{\xi \in U} H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi)^\vee \otimes H^0(X, L \otimes P_\xi^\vee)^\vee$$

ou, par dualité de Serre, à l'injectivité de

$$\operatorname{Ext}^g_X(\mathscr{F}, L^\vee) \to \bigoplus_{\xi \in U} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi), H^g(X, L^\vee \otimes P_\xi)) \tag{4}$$

On rappelle (exemple 4) que le transformé de Mukai $\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(L^\vee)$ de $L^\vee$ est le faisceau localement libre $\widehat{L^\vee} = (-\mathbf{1}_X)^*\widehat{L}^\vee$ sur $\widehat{X}$ placé en degré $n$.

On vérifie qu'il existe une suite spectrale du quatrième quadrant ($p \geq 0$, $q \leq 0$)

$$E_2^{pq} = \operatorname{Ext}^p_{\widehat{X}}(R^{-q}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee}) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathbf{D}(\widehat{X})}(\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee})$$

Admettant l'existence de cette suite spectrale, on a par dualité de Serre

$$\operatorname{Ext}^p_{\widehat{X}}(R^{-q}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee}) \simeq H^{n-p}(\widehat{X}, R^{-q}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}) \otimes \widehat{L^\vee})^\vee$$

qui, puisque $\mathscr{F}$ est $M$-régulier, est nul pour $q < 0$ et $n - p \geq n - (-q)$, c'est-à-dire $p \leq -q$. D'autre part, ces groupes sont bien sûr nuls sauf peut-être pour $0 \leq p \leq n$ et $-n \leq q \leq 0$.

Les différentielles arrivant dans $E_r^{00}$ étant toujours nulles, on a une chaîne d'inclusions

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(\widehat{X})}(\mathbf{R}\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee}) = E_\infty^{00} \subset \cdots \subset E_3^{00} \subset E_2^{00} = \operatorname{Hom}_{\widehat{X}}(R^0\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee})$$

et un résultat de dualité de Mukai dit que le terme de gauche est isomorphe à $\operatorname{Ext}^n_X(\mathscr{F}, L^\vee)$. On obtient ainsi une application injective

$$\operatorname{Ext}^n_X(\mathscr{F}, L^\vee) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{X}}(R^0\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee})$$

qui est le morphisme sur les espaces de sections globales associé au morphisme de faisceaux

$$\varphi : \operatorname{Ext}^n_X(\mathscr{F}, L^\vee) \otimes \mathscr{O}_{\widehat{X}} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(R^0\widehat{\mathscr{S}}(\mathscr{F}), \widehat{L^\vee})$$

On vérifie qu'en un point général $\xi \in \widehat{X}$, le morphisme entre fibres induit par $\varphi$ n'est autre que l'application

$$\operatorname{Ext}^n_X(\mathscr{F}, L^\vee) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi), H^g(X, L^\vee \otimes P_\xi))$$

intervenant dans (4). Comme le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(R^0\widehat{\mathscr{S}(\mathscr{F})}, \widehat{L^\vee})$ est sans torsion, l'application (4) est injective.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $L$ un faisceau inversible ample sur $X$ tel que $\mathscr{F} \otimes L$ soit globalement engendré. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes H^0(X, L \otimes P_{\xi_i}^\vee) \otimes \mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, \mathscr{F} \otimes L) \otimes \mathscr{O}_X \arrow[d, two heads, "\mathrm{ev}"] \\
\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_{\xi_i}) \otimes L \otimes P_{\xi_i}^\vee \arrow[r] & \mathscr{F} \otimes L
\end{tikzcd}$$

la flèche horizontale du haut est surjective par (ii), et l'évaluation aussi. Il en est donc de même pour la flèche horizontale du bas, d'où (iii).

Montrons (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit $\xi_0 \in \widehat{X}$. Comme les points de torsion sont denses dans $\widehat{X}^N$, l'ouvert des points de $\widehat{X}^N$ pour lesquels l'application (3) est surjective et tous les $h^0(X, \mathscr{F} \otimes P_{\xi_i})$ ont leur valeur minimale contient un point du type

$$(\xi_0 + \eta_1(\xi_0), \ldots, \xi_0 + \eta_N(\xi_0))$$

où $(\eta_1(\xi_0), \ldots, \eta_N(\xi_0))$ est un point de torsion, donc contient aussi

$$U_{\xi_0} + (\eta_1(\xi_0), \ldots, \eta_N(\xi_0))$$

où $U_{\xi_0}$ est un voisinage de $\xi_0$ dans $\widehat{X}$. Comme $\widehat{X}$ est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini de ces voisinages, disons $U_{\xi_1}, \ldots, U_{\xi_M}$.

Soit $\pi : X' \to X$ une isogénie telle que le noyau de $\widehat{\pi} : \widehat{X} \to \widehat{X}'$ contienne tous les $\eta_i(\xi_j)$, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $j \in \{1, \ldots, M\}$. Fixons $j \in \{1, \ldots, M\}$. L'application

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)}) \otimes \pi^* P_\xi^\vee \otimes \pi^* P_{\eta_i(\xi_j)}^\vee \longrightarrow \pi^* \mathscr{F}$$

est surjective pour tout $\xi \in U_{\xi_j}$. mais cette application n'est autre que

$$\bigoplus_{i=1}^N H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)}) \otimes \pi^* P_\xi^\vee \longrightarrow \pi^* \mathscr{F}$$

et comme chaque $H^0(X, \mathscr{F} \otimes P_\xi \otimes P_{\eta_i(\xi_j)})$ est un sous-espace vectoriel de $H^0(Y, \pi^*(\mathscr{F} \otimes P_\xi))$, le faisceau $\pi^*(\mathscr{F} \otimes P_\xi)$ est globalement engendré pour tout $\xi \in U_{\xi_j}$, donc pour tout $\xi \in \widehat{X}$.

Montrons (iv) $\Rightarrow$ (v). Soit $C$ une courbe dans $X'$. S'il existe un quotient trivial $\pi^*\mathscr{F}|_C \twoheadrightarrow \mathscr{O}_C$, on a aussi des surjections $\pi^*(\mathscr{F}\otimes P_\xi)|_C \twoheadrightarrow \pi^*(P_\xi)|_C$ pour chaque $\xi \in \widehat{X}$. Comme $\pi^*(\mathscr{F}\otimes P_\xi)$ est globalement engendré, il en est de même pour $\pi^*(P_\xi)|_C$. Cela entraîne que l'application $\widehat{X} \to \widehat{X}' \to \mathrm{Pic}^0(C)$ est nulle, donc que $\pi(C)$ est un point, ce qui est absurde. Le lemme de Gieseker[7] entraîne que $\pi^*\mathscr{F}$ est ample, donc aussi $\mathscr{F}$. $\square$

# 3 Démonstration du théorème 3

C'est un théorème de Green et Lazarsfeld que les composantes irréductibles des lieux

$$V_i = \{\xi \in \widehat{X} \mid H^{n-i}(Y, f^*P_\xi^\vee) \neq 0\}$$

sont des sous-variétés abéliennes translatées de codimension $\geq i$ de $\widehat{X}$. Comme $X$ est simple, $V_i$ est fini pour $i > 0$. Notons $\widehat{Y} = \mathrm{Pic}^0(Y)$. Comme $Y$ est connexe, on a

$$\begin{aligned} V_n &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^0(Y, f^*P_\xi^\vee) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in \widehat{X} \mid f^*P_\xi^\vee \simeq \mathscr{O}_Y\} \\ &= \mathrm{Ker}(\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}) \end{aligned}$$

donc $V_n = \{0\}$ puisque $\widehat{f}$ est injectif. Par dualité de Serre sur $Y$, on a

$$\begin{aligned} V_i &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(Y, \omega_Y \otimes f^*P_\xi) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in \widehat{X} \mid H^i(X, f_*\omega_Y \otimes P_\xi) \neq 0\} \end{aligned}$$

Par dualité pour un morphisme fini, $f_*\omega_Y = \mathscr{O}_X \oplus E_f$, donc $V_i(E_f) \subset V_i$ et $V_n(E_f) = \varnothing$. Le faisceau $E_f$ est $M$-régulier, donc ample par le théorème 5.

[7] Ce lemme énonce que pour qu'un faisceau cohérent globalement engendré $\mathscr{G}$ sur une variété propre $Y$ soit ample, il faut et il suffit que sa restriction à toute courbe n'ait pas de quotient trivial. Il se démontre ainsi : l'évaluation $H^0(Y,\mathscr{G})\otimes\mathscr{O}_Y \to \mathscr{G}$ est surjective et induit un morphisme $f : \mathbf{P}(\mathscr{G}) \to \mathbf{P}(H^0(Y,\mathscr{G})\otimes\mathscr{O}_Y) \to \mathbf{P}(H^0(Y,\mathscr{G}))$ tel que $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{G})}(1) = f^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}(H^0(Y,\mathscr{G}))}(1)$ ; le faisceau $\mathscr{G}$ est donc ample si et seulement si ce morphisme est fini.