

MATRICES NILPOTENTES ET TABLEAUX DE YOUNG

OLIVIER DEBARRE

Le corps de base \mathbf{K} est quelconque, sauf mention du contraire.

1. SUITE DES NOYAUX ITÉRÉS

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . On définit la suite des noyaux itérés par

$$E_k := \text{Ker}(f^k).$$

C'est donc une suite croissante

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E.$$

de sous-espaces vectoriels de E , qui doit donc se stabiliser. On note, pour tout $k \geq 0$,

$$d_k := \dim(E_k) \quad (\text{suite croissante majorée par } n)$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$\mu_k := d_k - d_{k-1} \quad (\text{suite positive}),$$

de sorte que

$$d_k = \mu_1 + \cdots + \mu_k.$$

Proposition 1.1. *La suite $(\mu_k)_{k \geq 1}$ est décroissante.*

DÉMONSTRATION. Soit $k \geq 1$. On a $f(E_{k+1}) \subset E_k$. Regardons la composée

$$E_{k+1} \xrightarrow{f} E_k \twoheadrightarrow E_k/E_{k-1}.$$

Un élément $x \in E_{k+1}$ est dans son noyau si et seulement si $f(x) \in E_{k-1}$, c'est-à-dire si et seulement si $f^{k-1}(f(x)) = 0$. C'est équivalent à $x \in E_k$. La factorisation canonique induit donc une injection

$$E_{k+1}/E_k \hookrightarrow E_k/E_{k-1}.$$

On a ainsi l'inégalité $\mu_{k+1} \leq \mu_k$. □

Corollary 1.2. *Si $d_{k_0} = d_{k_0+1}$ pour un $k_0 \geq 0$, alors $d_k = d_{k_0}$ pour tout $k \geq k_0$. La suite $(d_k)_{k \geq 0}$ est donc strictement croissante jusqu'à ce qu'elle soit constante.*

Si f est un endomorphisme nilpotent, la suite $(d_k)_{k \geq 0}$ est donc strictement croissante jusqu'à n . On en déduit $d_n = n$, donc $f^n = 0$.

2. DIAGRAMMES DE YOUNG

Définition 2.1 (Partitions). Une *partition* d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

de nombres entiers positifs de somme n . On n'indique en général pas les 0 à la fin de la suite.

Définition 2.2 (Diagramme de Young d'une partition). Un *diagramme de Young* est un diagramme d'un nombre fini de petites boîtes mises en ligne, chaque ligne ayant moins de boîtes que la précédente.

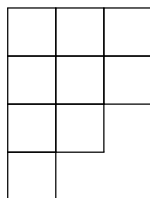
Le *dual* d'un diagramme de Young est le diagramme de Young où on a échangé lignes et colonnes.

Le diagramme de Young d'une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ de n est le diagramme dont la première ligne contient λ_1 boîtes, la seconde λ_2 boîtes, etc. Il y a au total n boîtes. Son dual est le diagramme d'une partition λ^* de n appelée *partition duale*.

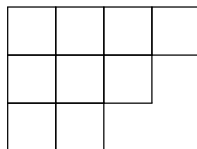
La formule générale est

$$\lambda_i^* := \text{Card}\{j \geq 1 \mid \lambda_j \geq i\}.$$

Par exemple, le diagramme de Young de la partition $(3, 3, 2, 1)$ est



Son dual est



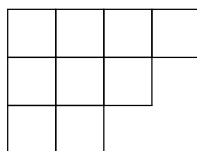
La partition duale est $(4, 3, 2)$.

3. RÉDUCTION DE JORDAN DES ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Si f est un endomorphisme *nilpotent* d'un espace vectoriel E de dimension finie n , la suite $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots)$ définie précédemment est une partition de n . Le *diagramme de Young* de f est celui de la partition duale $\lambda := \mu^*$; on met donc les μ_k en colonne, l'indice de nilpotence de f est le nombre de colonnes, c'est-à-dire λ_1 , et d_k est le nombre total de boîtes dans les k premières colonnes du diagramme.

Théorème 3.1. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie n et soit λ la partition de n associée à f . Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est composée de blocs de Jordan de taille $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.*

Par exemple, si $n = 9$ et que $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 8$ et $d_4 = 9$, on a $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 2$ et $\mu_4 = 1$. La partition λ_1 de f est donc $(4, 3, 2)$, son diagramme est

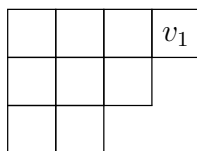


et la matrice est du type

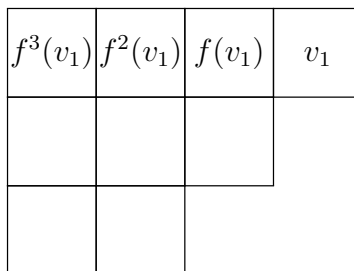
$$\begin{pmatrix} J_4 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

La partition de l'endomorphisme 0 est $(1, \dots, 1)$. Les blocs de Jordan sont tous des $J_1 = (0)$.

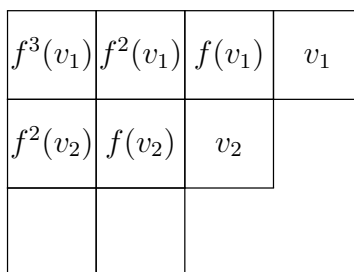
DÉMONSTRATION. On va remplir les cases du diagramme de f avec des vecteurs qui vont former une base de E . Faisons-le sur l'exemple. Si r est l'indice de nilpotence de f , la dernière colonne à droite du diagramme correspond à la dimension de E/E_{r-1} . On place dans cette colonne des vecteurs de E dont les classes forment une base de E/E_{r-1} . Dans notre exemple, il y a un seul tel vecteur :



On vérifie facilement que les images de ces vecteurs par f, f^2, \dots, f^{r-1} forment une famille libre, qu'on met dans le tableau :



La deuxième colonne en partant de la droite correspond à la dimension de E_{r-1}/E_{r-2} . On complète les vecteurs déjà présents pour en former une base et on remplit les lignes correspondantes par les images par les itérés de f :



On continue ainsi jusqu'à remplir tout le tableau

$f^3(v_1)$	$f^2(v_1)$	$f(v_1)$	v_1
$f^2(v_2)$	$f(v_2)$	v_2	
$f(v_3)$	v_3		

L'injection de la preuve de la prop. 1.1 correspond à passer d'une colonne à la colonne située immédiatement à gauche en appliquant f . La première colonne à gauche correspond au noyau de f .

La base de E formée en mettant tous ces vecteurs ensemble (en lisant de gauche à droite et de haut en bas) est de la forme cherchée. \square

Inversement, étant donnée une matrice formée de blocs de Jordan $J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots$, avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, de sorte que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est une partition de n , on retrouve les μ_k , donc les dimensions d_k des noyaux itérés, par la partition duale.

On rappelle que λ_1 est l'indice de nilpotence, tandis que $r = \mu_1 = d_1$ est la dimension du noyau.

Corollary 3.2. *Deux endomorphismes nilpotents de E sont semblables si et seulement s'ils ont la même partition.*

Soit $t \in \mathbf{K}^\times$. Si, à la fin de la preuve, on forme la base de E dans le même ordre mais en multipliant les vecteurs de la k -ième colonne par t^{k-1} , on trouve que la matrice est multipliée par t (sur la réduite de Jordan, on peut même remplacer chaque 1 par un élément de \mathbf{K} non nul quelconque).

Corollary 3.3. *Soit $t \in \mathbf{K}^\times$. Toute matrice nilpotente N est semblable à tN .*

Si, à la fin de la preuve, on forme la base de E en lisant de droite à gauche et de haut en bas, on trouve que la matrice est formée des mêmes blocs de Jordan, mais transposés.

Corollary 3.4. *Toute matrice nilpotente est semblable à sa transposée.*

Exemple 3.5. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(B) = \text{Ker}(B)$. Montrer que n est pair et que A et B sont semblables.

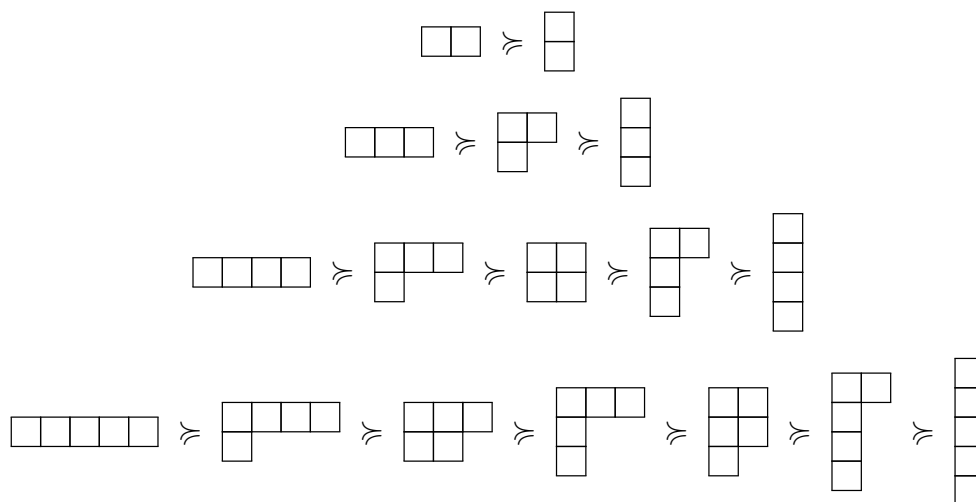
On a nécessairement $A^2 = B^2 = 0$, mais $A \neq 0 \neq B$, donc les matrices A et B sont d'indice de nilpotence 2. Leurs diagrammes de Young (qui ont n cases) ont ainsi deux colonnes. On a $\mu_1(A) = \dim(\text{Ker}(A))$ et $\mu_2(A) = n - \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Im}(A))$ (théorème du rang), donc $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ par hypothèse. Les deux colonnes ont donc $n/2$ cases et les matrices A et B sont toutes les deux semblables à la matrice avec $n/2$ blocs de Jordan $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. ORDRE SUR LES PARTITIONS

Définition 4.1. Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ des partitions de n . On dit que λ domine μ , et on écrit $\lambda \succcurlyeq \mu$, si, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \dots + \mu_k.$$

C'est un ordre seulement partiel sur les partitions de n . Voici quelques exemples (c'est un ordre total pour $n \leq 5$) :



mais ce n'est plus un ordre total pour $n \geq 6$. Par exemple, les tableaux



ne sont pas comparables.

Le plus grand élément est toujours la partition (n) (tableau à une ligne), et le plus petit la partition $(1, 1, \dots)$ (tableau à une colonne).

Cet ordre est important pour nous pour la raison suivante.

Théorème 4.2. *Supposons $\mathbf{K} = \mathbb{C}$. Soit \mathcal{C}_λ la classe de conjugaison des matrices nilpotentes de partition λ . On a*

$$\mathcal{C}_\mu \subset \overline{\mathcal{C}_\lambda} \iff \lambda \succcurlyeq \mu.$$

Toute classe de conjugaison de matrices nilpotentes est donc contenue dans l'adhérence de $\mathcal{C}_{(n)}$ (un seul bloc de Jordan J_n). C'est facile : il suffit de remplacer certains des 1 de J_n par un paramètre t (voir le commentaire avant le cor. 3.3) qu'on fait tendre vers 0. Inversement, la matrice nulle (classe $\mathcal{C}_{(1,\dots,1)}$) est dans l'adhérence de toutes les classes (on peut appliquer le cor. 3.3 et y faire tendre t vers 0).

DÉMONSTRATION. Nous ne démontrerons que l'implication $\mathcal{C}_\mu \subset \overline{\mathcal{C}_\lambda} \Rightarrow \lambda \succcurlyeq \mu$. La réciproque est plus difficile.

Soit A une matrice de partition λ . Avec les notations du début, on a $d_k(A) = n - \text{rang}(A^k)$ pour tout $k \geq 0$. Ces nombres sont reliés à la partition duale $\lambda(A)^*$ par la formule $\lambda(A)^*_k = d_k(A) - d_{k-1}(A)$ pour tout $k \geq 1$. On a donc $\text{rang}(M^k) = n - d_k(A)$ pour tout $M \in \mathcal{C}_\lambda$.

Or l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est fermé (car défini par l'annulation de tous les mineurs de taille $r + 1$), donc toute matrice B dans $\overline{\mathcal{C}_\lambda}$ vérifie $\text{rang}(B^k) \leq n - d_k(A)$. Ceci entraîne $d_k(B) \geq d_k(A)$ pour tout $k \geq 0$. Par définition, c'est exactement dire

$$\lambda(B)^* \succcurlyeq \lambda(A)^*.$$

On vérifie facilement que cela est équivalent à $\lambda(A) \succcurlyeq \lambda(B)$. □

Remarquons pour finir que chaque classe \mathcal{C}_λ est aussi un cône (cor. 3.3). Ces classes forment une partition du cône nilpotent

$$\mathcal{N}_n := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^n = 0\}.$$

On a vu que l'adhérence de $\mathcal{C}_{(n)}$ contient toutes les autres classes, donc $\overline{\mathcal{C}_{(n)}} = \mathcal{N}_n$. De plus, $\mathcal{C}_{(n)}$ est ouverte dans \mathcal{N}_n (elle est définie par les conditions $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$). Toute autre classe \mathcal{C}_λ est dans la frontière de $\overline{\mathcal{C}_{(n)}} \setminus \mathcal{C}_{(n)}$ de $\mathcal{C}_{(n)}$, donc est d'intérieur vide.

UNIVERSITÉ DE PARIS, U.F.R. DE MATHÉMATIQUES, 75013 PARIS, FRANCE

E-mail address: `debarre@math.univ-paris-diderot.fr`