RATIONALITÉ DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

OLIVIER DEBARRE

Résumé. On cherche à paramétrer les solutions, dans un corps $\mathbf{K}$ contenant $\mathbf{Q}$, d'une équation polynomiale en n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$, par des fractions rationnelles en $n-1$ variables, à coefficients dans $\mathbf{K}$. Si c'est possible, on dit que la variété algébrique définie par cette équation est *rationnelle* (sur $\mathbf{K}$).

Dans le cas de l'équation $x^2 + y^2 = 1$, la construction est classique et peut se comprendre géométriquement ; on obtient par exemple $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Après avoir présenté des exemples et expliqué quelques résultats et conjectures, je parlerai de résultats spectaculaires obtenus récemment par Kontsevich & Tschinkel sur le comportement de la rationalité dans une famille de variétés algébriques $(X_\lambda)_{\lambda\in B}$ (par exemple, une famille d'équations polynomiales dont les coefficients sont des polynômes en un paramètre λ) : que peut-on dire de l'ensemble des $\lambda \in B$ pour lesquels X_λ est rationnelle ?

1. Paramétrer les courbes

1.1. **Paramétrer les coniques.** Commençons par le problème classique de trouver toutes les solutions entières de l'équation homogène

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Il est (presque) équivalent de trouver les solutions en nombres rationnels de l'équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

c'est-à-dire les points à coordonnées rationnelles de ce cercle. On peut procéder ainsi : on part de la solution $P_0 := (-1, 0)$. Toute autre solution $P = (x, y)$ définit une droite P_0P de pente rationnelle. Inversement, toute droite $y = t(x + 1)$ de pente t rationnelle passant par P_0 recoupe le cercle en un autre point à coordonnées rationnelles : on a

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

qui s'écrit aussi (puisque $x = -1$ est solution de ce polynôme quadratique)

$$x - 1 + t^2(x + 1) = 0,$$

soit

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Notons que cette paramétrisation rationnelle (c'est-à-dire par des fractions rationnelles) décrit aussi tous les points du cercle à coordonnées dans tout corps contenant $\mathbf{Q}$ (comme $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Si on revient à l'équation (homogène) (1), on peut aussi écrire

$$(x, y, z) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2).$$

1.2. **Paramétrer les courbes planes de degré supérieur.** Si on essaye de paramétrer de façon analogue la courbe d'équation

$$y^2 = x(x^2 - 1)$$

par des fractions rationnelles, on voit sans trop de mal que ce n'est pas possible : une telle paramétrisation sur $\mathbf{Q}$ est impossible tout simplement parce que les seules solutions rationnelles de cette équation sont $(0, 0)$ et $(\pm 1, 0)$, mais un calcul direct par substitution montre aussi qu'elle reste impossible même si on admet des fractions rationnelles à coefficients complexes.

En revanche, c'est possible pour la courbe d'équation

$$y^2 = x^2(x + 1)$$

parce qu'elle est *singulière* en $(0, 0)$: il suffit de chercher les points sous la forme (x, tx). On obtient $t^2x^2 = x^2(x + 1)$, qui se résoud en

$$(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

Ce qui se passe ici est qu'une courbe compacte complexe lisse est, topologiquement, une surface réelle lisse compacte orientée qui a un genre $g \geq 0$. Une paramétrisation de cette courbe par des fractions rationnelles à coefficients complexes est possible si et seulement si $g = 0$. C'est une condition topologique. Pour une paramétrisation avec des fractions rationnelles à coefficients *rationnels,* il faut demander de plus que la courbe ait un point à coordonnées rationnelles.

2. Paramétrer des variétés de dimension supérieure

2.1. **Paramétrer des quadriques.** On peut garder des équations de degré 2 mais augmenter le nombre d'inconnues, c'est-à-dire cherche à paramétrer (presque toutes) les solutions d'une équation

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

par des fractions rationnelles à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ de votre choix (de caractéristique autre que 2). Ici Q est un polynôme en n variables de degré 2, qu'on peut prendre homogène en ajoutant une variable (c'est alors une forme quadratique).

La méthode reste la même : si on connaît une solution $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, on prend une droite $a + tx$ passant par a (avec $x \in \mathbf{K}^n$) et on résoud l'équation

$$0 = Q(a + tx) = Q(a) + 2tB(a, x) + t^2 Q(x) = 2tB(a, x) + t^2 Q(x)$$

en

$$t = -\frac{2B(a, x)}{Q(x)}$$

ce qui, comme Q est homogène, donne les solutions

$$Q(x)a - 2B(a, x)x, \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{K}^n.$$

Si on veut une paramétrisation biunivoque, il faut prendre x dans un hyperplan de $\mathbf{K}^n$ ne contenant pas a (par exemple, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut prendre $a = (1, 0, \ldots, 0)$ puis $x = (0, x_2, \ldots, x_n)$).

2.2. **Paramétrer des cubiques.** Dès le degré 3, la situation devient bien plus compliquée. Regardons tout d'abord l'équation cubique dite de Fermat

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 1 = 0$$

en trois variables, qu'on peut homogénéiser en

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0.$$

Elle admet beaucoup de solutions rationnelles, comme par exemple tous les $(t, -t, 1, 1)$, pour $t \in \mathbf{Q}$. Cette famille de solutions correspond à une droite contenue dans la surface cubique définie par ces équations (soit dans $\mathbf{C}^3$, soit dans $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$). Mais peut-on paramétrer par des fractions rationnelles en deux variables dans $\mathbf{Q}^2$ (presque toutes) les solutions rationnelles, c'est-à-dire décrire une famille de solutions dépendant de deux paramètres indépendants, ceci de façon biunivoque ?

Il se trouve que oui. La méthode (déjà connue d'Euler) est de nouveau géométrique. Cette surface cubique contient beaucoup de droites (9 définies sur

$\mathbf{Q}$ et 18 autres définies sur $\mathbf{Q}(j)$), dont en particulier les droites non coplanaires $L := \{(t, jt, -j)\}$ et sa conjuguée $\bar{L} = \{(t, \bar{j}t, -\bar{j})\}$. On peut les utiliser pour paramétrer (presque toutes) les solutions rationnelles : si $P = (t, jt, -j) \in L$ et $\bar{P} = (\bar{t}, \bar{j}\bar{t}, -\bar{j}) \in \bar{L}$, la droite $P\bar{P}$ recoupe la surface en un troisième point $P(a, b)$, où $t = a + ib$, dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de a et de b.

Le résultat général est qu'on peut toujours paramétrer de façon biunivoque presque tous les points *complexes* d'une surface cubique lisse par des fonctions rationnelles en deux variables (à coefficients complexes). On dit que cette surface est *rationnelle.*

En dimension supérieure (c'est-à-dire lorsque le nombre de variables augmente mais qu'on garde une équation de degré 3), le problème de l'existence (ou non) d'une telle paramétrisation est beaucoup plus difficile, même sur $\mathbf{C}$.

Si on considère une équation cubique lisse quelconque en 4 variables (ou une équation cubique homogène en 5 variables), il n'a été montré qu'en 1972 par Clemens et Griffiths qu'il n'existe pas de paramétrisation rationnelle biunivoque des solutions complexes. La variété complexe (cubique de dimension 3) définie par cette équation *n'est donc pas rationnelle.* C'est d'autant plus remarquable qu'il existe une paramétrisation rationnelle des solutions mais celle-ci n'est pas biunivoque (elle est « de degré 2 »).

En dimension 4, il existe des cubiques lisses rationnelles. C'est le cas si la cubique contient deux plans disjoints, donc que son équation (homogène) est du type

$$\sum_{0 \le j \le 2,\, 3 \le k \le 5} \ell_{jk} x_j x_k = 0,$$

où les ℓ_{jk} sont des formes linéaires suffisamment générales (on peut même obtenir des paramétrisations à coefficients rationnels si les ℓ_{jk} ont des coefficients rationnels) ou de la cubique de Fermat, d'équation homogène

$$x_1^3 + \cdots + x_6^3 = 0.$$

On ne connaît aucune cubique lisse irrationnelle de dimension 4, même si tout le monde est convaincu que la plupart le sont.

En dimension encore plus grande, on ne sait presque rien sur les cubiques lisses : on connaît des exemples rationnels en dimension paire (comme par exemple les cubiques de Fermat d'équation $x_1^3 + \cdots + x_{2m}^3 = 0$), aucun en dimension impaire ; on ne connaît pas non plus d'exemples irrationnels.

Il est facile de montrer qu'une hypersurface lisse de dimension n et de degré $\geq n+2$ est irrationnelle. De Fernex a montré qu'aucune hypersurface lisse de dimension $n \geq 3$ et de degré $n+1$ n'est rationnelle. Schreieder a démontré tout récemment qu'une hypersurface très générale de dimension n et de degré $> \log_2 n + 2$ est irrationnelle.

3. Comportement de la rationalité « en famille »

On a expliqué dans le § 1.2 que la cubique plane d'équation

$$y^2 = x(x+1)(x+\lambda)$$

est irrationnelle pour $\lambda = -1$ (et en fait pour tout $\lambda \neq 0, 1$) et rationnelle pour $\lambda = 0$. Mais c'est essentiellement dû au fait que la cubique devient singulière pour $\lambda = 0$. Dans les familles de courbes compactes lisses dépendant d'un paramètre λ, le genre reste (localement) constant, donc la rationalité est une propriété ouverte et fermée. De même, dans les familles de surfaces compactes lisses, la rationalité est aussi une propriété ouverte et fermée.

En dimension supérieure, la situation est de nouveau beaucoup plus subtile. Prenons par exemple la famille des cubiques lisses de dimension 4, qu'on paramètre par les $\binom{5+3}{3} = 56$ coefficients de leur équation. Dans l'espace des paramètres, on s'attend à ce que les cubiques rationnelles correspondent à un sous-ensemble dense mais d'intérieur vide (plus précisément, à une réunion dénombrable de fermés algébriques propres).

On avait jusqu'à très récemment aucun résultat sur ce problème (et d'ailleurs, la question sur les cubiques de dimension 4 est toujours ouverte). Mais de nouvelles techniques imaginées par Voisin puis raffinées par Colliot-Thélène–Pirutka ont permis de grandes avancées ces dernières années. Voici un exemple (dû à Hassett–Pirutka–Tschinkel) des (maintenant nombreux) résultats obtenus. On considère les systèmes de trois équations de degré 2 (homogènes) en 8 variables, qui définissent (en général) une variété lisse de dimension 4 dans $\mathbf{P}^7_{\mathbf{C}}$ dépendant de $3 \times \binom{7+2}{2}$ paramètres.

Théorème 1. *Les paramètres correspondant à des variétés lisses rationnelles de ce type forment un sous-ensemble dense de l'espace des paramètres, tandis* *que la variété correspondant à un paramètre très général n'est pas (stablement) rationnelle.*

On ne connaît pas d'exemple de ce phénomène avec des variétés lisses de dimension 3 (on ne sait construire de tels exemples qu'en remplaçant « rationnel » par « stablement rationnel »).

Un résultat extrêmement frappant a été démontré par Tschinkel & Kontsevich en août 2017 (il était déjà connu en dimension 3 mais les méthodes sont totalement nouvelles). Une version pour la stabilité rationnelle avait été montrée 9 jours avant par Nicaise & Shinder. Les deux eprints sont basés sur des idées de Larsen & Lunts de 2003.

Théorème 2. *Si, dans une famille de variétés algébriques complexes projectives lisses, les fibres générales sont rationnelles, toutes les fibres sont rationnelles.*

On dit que la rationalité est *stable par spécialisation* : cela entraîne que dans une famille de variétés algébriques projectives lisses, celles qui sont rationnelles correspondent, dans l'espace des paramètres, à une réunion dénombrable de fermés algébriques propres.

Nicaise & Shinder utilisent l'*anneau de Grothendieck* $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbf{C}})$ de $\mathbf{C}$: comme groupe, c'est le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés algébriques complexes, avec la relation $[X] = [Y] + [X \smallsetminus Y]$ pour toute sous-variété fermée $Y \subseteq X$; c'est un anneau pour le produit cartésien, qui est filtré par la dimension.

Larsen & Lunts ont montré qu'une variété projective lisse X est stablement rationnelle si et seulement si sa classe est congrue à 1 (la classe d'un point) modulo la classe de $\mathbf{C}$.

Tschinkel & Kontsevich utilisent un nouvel anneau, qu'ils appellent l'*anneau de Burnside* $\mathrm{Burn}(\mathbf{C})$ de $\mathbf{C}$ (ils le définissent pour n'importe quel corps de caractéristique 0). C'est maintenant le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphisme birationnel de variétés algébriques complexes irréductibles ; le produit cartésien en fait un anneau qui est gradué par la dimension. Il existe une surjection d'anneaux gradués

$$\rho\colon \mathrm{Burn}(\mathbf{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}(K_0(\mathrm{Var}_{\mathbf{C}}))$$

qui n'est pas injective (L. Borisov).

Dans les deux articles, la preuve est basée sur la construction d'un morphisme de spécialisation

$$\operatorname{Burn}\big(\mathbf{C}((\lambda))\big) \longrightarrow \operatorname{Burn}(\mathbf{C})$$

qui est un morphisme de groupes (pas d'anneaux). On procède en gros de la façon suivante : soit $\mathscr{X}$ une variété irréductible définie sur le corps $\mathbf{C}((\lambda))$ des séries de Laurent. Ses équations sont donc à coefficients dans ce corps et on peut chasser les dénominateurs pour les prendre à coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[[\lambda]]$ des séries formelles. Lorsqu'on fait $\lambda = 0$, il n'y a aucune raison pour que la variété (complexe) X définie par ces équations soit lisse, ni même irréductible. Par un célèbre théorème d'Hironaka, on peut cependant rendre X « presque lisse », c'est-à-dire supposer que c'est une réunion de composantes irréductibles lisses $X_1, \ldots, X_r$ se rencontrant transversalement. On pose

$$\begin{aligned}\rho([\mathscr{X}]) &:= \sum_{\varnothing \subsetneq I \subset \{1,\ldots,r\}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)-1}[\mathbf{C}^{\operatorname{Card}(I)-1} \times \bigcap_{i\in I} X_i] \\ &= \sum_i [X_i] - \sum_{i<j} [\mathbf{C} \times (X_i \cap X_j)] + \cdots\end{aligned}$$

Tout le travail consiste alors à montrer que cette application est bien définie, c'est-à-dire que la classe du membre de droite ne change pas lorsqu'on remplace $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ par une autre variété du même type, ni lorsqu'on remplace $\mathscr{X}$ par une variété qui lui est birationnellement isomorphe. La preuve utilise le « théorème de factorisation faible », qui dit qu'une application birationnelle est composée d'éclatements à centres lisses et de leurs inverses.

Expliquons maintenant comment on prouve le th. 2. On considère une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in B}$ de variétés projectives lisses de dimension n paramétrée par une variété (disons une courbe lisse) B et on suppose que toutes les X_λ sont rationnelles pour $\lambda \neq \lambda_0$. Il s'agit de montrer que X_{λ_0} est rationnelle. Considérant une paramétrisation analytique de B au voisinage de λ_0, on peut supposer que les X_λ sont définies par des équations polynomiales dont les coefficients sont des fonctions de λ holomorphes au voisinage de 0. On les voit comme des séries formelles en λ qui définissent une variété $\mathscr{X}$ projective lisse sur le corps $\mathbf{C}((\lambda))$ dont la « réduction en 0 » est X_{λ_0}.

L'hypothèse que les X_λ sont rationnelles pour $\lambda \neq \lambda_0$ entraîne que la variété $\mathscr{X}$ est rationnelle sur une extension $\mathbf{C}((\lambda^{1/m}))$ pour un certain $m > 0$ [1].

1. Cette extension est nécessaire : la surface cubique d'équation $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_4^3 = 0$ est rationnelle pour tout $\lambda \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$, elle ne l'est pas sur le corps $\mathbf{C}((\lambda))$ mais elle l'est sur le corps $\mathbf{C}((\lambda^{1/3}))$).

Sa classe dans $\mathrm{Burn}\big(\mathbf{C}((\lambda^{1/m}))\big)$ est donc celle de $\mathbf{C}((\lambda^{1/m}))^n$, de sorte que $\rho([\mathscr{X}]) = \rho([\mathbf{C}((\lambda^{1/m}))^n]) = [\mathbf{C}^n]$. Mais la donnée de notre famille dit aussi $\rho([\mathscr{X}]) = [X_{\lambda_0}]$. On a donc $[X_{\lambda_0}] = [\mathbf{C}^n]$, ce qui montre que X_{λ_0} est rationnelle !

Département de Mathématiques et Applications – CNRS UMR 8553, PSL Research University, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

E-mail address: `olivier.debarre@ens.fr`