Surfaces K3

Cours de M2
Université Paris Diderot
Printemps 2019

Olivier Debarre

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, toutes les variétés sont analytiques complexes.

1.1. Fibrés en droites et diviseurs

Une bonne référence pour plus de détails sur les résultats de ce paragraphe est [**Hu2**, § 2.3].

Soit X une variété compacte connexe lisse. Un *diviseur* sur X est une somme formelle finie $\sum_i n_i D_i$, où les n_i sont des entiers et les D_i des hypersurfaces irréductibles (réduites) de X. Le *support* de D est la réunion $\bigcup_{n_i \neq 0} D_i$. On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe (abélien libre) des diviseurs sur X.

Pour tout fibré en droites (holomorphe) L sur X et toute section méromorphe non nulle s de L, on définit son diviseur $\mathrm{div}(s)$ de la façon suivante : dans tout ouvert U de X au-dessus duquel L est trivial, on utilise une trivialisation de L pour voir s comme une fonction méromorphe $U \dashrightarrow \mathbf{C}$. La restriction de $\mathrm{div}(s)$ à U est alors le diviseur $\sum_{D \subset U} \mathrm{ord}_D(s) D$ (qui ne dépend pas du choix de la trivialisation).

La section s est holomorphe si et seulement si son diviseur $\mathrm{div}(s)$ est effectif (c'est-à-dire que s n'a pas de pôle). Des sections s et t de L ont le même diviseur si et seulement si s/t, qui est une fonction sur X, est holomorphe et ne s'annule pas ; comme X est compacte, elle est donc constante non nulle.

Exemple 1.1. Soit $d \in \mathbf{Z}$. Sur la variété complexe $\mathbf{P}^n$, le fibré en droites noté $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ (ou simplement $\mathscr{O}(d)$) est défini par les fonctions de transition $(x_i/x_j)^d$ pour le recouvrement de $\mathbf{P}^n$ par les ouverts affines standards (et on obtient ainsi tous les fibrés en droites sur $\mathbf{P}^n$). Si $d \geqslant 0$, tout polynôme homogène F de degré d en les $n+1$ variables $x_0, \dots, x_n$ définit une section de $\mathscr{O}(d)$ dont le diviseur est associé à l'hypersurface de $\mathbf{P}^n$ définie par l'annulation de F. On obtient ainsi toutes les sections holomorphes de $\mathbf{P}^n$ ([**Hu2**, Proposition 2.4.1]) ; on a donc $h^0(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}(d)) = \binom{n+d}{d}$ pour $d \geqslant 0$ (et $h^0(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}(d)) = 0$ pour $d < 0$).

Inversement, étant donné un diviseur $D = \sum_i n_i D_i$ sur X, il existe (puisque X est supposée lisse) un recouvrement de X par des ouverts U dans lesquels chaque D_i est défini comme le lieu d'annulation d'une fonction holomorphe $s_{U,i} \colon U \to \mathbf{C}$. Sur U, le diviseur de la fonction méromorphe $s_U := \prod_i s_{U,i}^{n_i}$ est $D|_U$ et sur $U \cap V$, la fonction méromorphe s_U/s_V n'a ni zéros ni pôle : elle est donc holomorphe et ne s'annule pas. On peut utiliser ces fonctions comme fonctions de transition pour construire un fibré en droites noté $\mathscr{L}_D$ sur X (la notation usuelle pour le faisceau des sections de $\mathscr{L}_D$ est $\mathscr{O}_X(D)$). Nous avons les propriétés suivantes ([**Hu2**, Proposition 2.3.18 et Corollary 2.3.19]) :

— si D et E sont des diviseurs, on a $\mathscr{L}_D \otimes \mathscr{L}_E \simeq \mathscr{L}_{D+E}$; en particulier, $\mathscr{L}_{-D}$ est isomorphe au dual de $\mathscr{L}_D$;
— si D et E sont des diviseurs, les fibrés en droites $\mathscr{L}_D$ et $\mathscr{L}_E$ sont isomorphes si et seulement si les diviseurs D et E sont *linéairement équivalents,* c'est-à-dire que $D - E$ est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle $X \dashrightarrow \mathbf{C}$;

— il existe une section méromorphe s_D de $\mathscr{L}_D$, non nulle, de diviseur D ;
— l'espace vectoriel des sections holomorphes de $\mathscr{L}_D$ s'identifie à l'espace vectoriel des fonctions méromorphes $f\colon X \dashrightarrow \mathbf{C}$ telles que soit $f = 0$, soit $f \neq 0$ et $\operatorname{div}(f) + D \geqslant 0$ (cette condition, prise localemenent, définit en fait le faisceau $\mathscr{O}_X(D)$ des sections holomorphes de $\mathscr{L}_D$ comme sous-faisceau du faisceau des fonctions méromorphes sur X). Lorsque D est effectif, la section s_D mentionnée ci-dessus correspond à la fonction $f = 1$;
— si L est un fibré en droites sur X admettant une section méromorphe non nulle de diviseur D, les fibrés en droites L et $\mathscr{L}_D$ sont isomorphes (parce que le fibré en droites $L^\vee \otimes \mathscr{L}_D$ a une section holomorphe partout non nulle).

Si L est un fibré en droites sur X, on confond souvent L et le faisceau (cohérent) de ses sections. On note aussi souvent $L(D)$ au lieu de $L \otimes \mathscr{L}_D$.

Si $\varphi\colon X \to Y$ est une application holomorphe entre variétés compactes connexes lisses et que D est un diviseur sur X dont le support ne contient pas l'image de $\varphi(X)$, on peut définir l'image inverse φ^*D sur Y de façon que $\mathscr{L}_{\varphi^*D} = \varphi^*\mathscr{L}_D$ (le support de φ^*D est l'image inverse par φ du support de D et il s'agit juste de définir les multiplicités correctes ; voir [**Hu2**, Corollary 2.3.13] pour plus de détails).

Si D est un diviseur effectif sur X, on peut aussi le voir comme un sous-espace analytique de X de codimension pure 1 dont le faisceau d'idéaux est (le faisceau des sections de) $\mathscr{L}_{-D}$ ([**Hu2**, Lemma 2.3.22]). On utilisera souvent la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-D} \xrightarrow{\cdot s_D} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_D \to 0 \tag{1}$$

de faisceaux cohérents sur X.

Soit X une variété compacte connexe lisse, soit L un fibré en droites sur X et soit V un espace vectoriel non nul de sections holomorphes de L (donc de dimension finie). On appelle l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$ un *système linéaire* ; on peut aussi le voir comme un espace de diviseurs effectifs D sur X tels que $\mathscr{L}_D = L$ en envoyant un élément de V sur son diviseur (le point crucial est que, X étant compacte, toute fonction holomorphe sur X est constante : l'application ainsi définie est injective sur $\mathbf{P}(V)$).

On définit une application méromorphe

$$\varphi_V\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}(V^\vee)$$

en posant, pour tout $x \in X$,

$$\varphi_V(x) = \{s \in V \mid s(x) = 0\}.$$

Cette application est holomorphe sur l'ouvert dense $\{x \in X \mid \exists s \in V \quad s(x) \neq 0\}$. En particulier, elle est holomorphe sur X si et seulement si V est sans point base (c'est-à-dire que le morphisme d'évaluation $V \otimes \mathscr{O}_X \to L$ est surjectif, ou encore que pour tout $x \in X$, il existe un diviseur D dans $\mathbf{P}(V)$ tel que x n'est pas dans le support de D) ; si c'est le cas, on a $\varphi^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}(V^\vee)}(1) \simeq L$ ([**Hu2**, Proposition 2.3.26]).

Soit x un point de X et soit $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{O}_X$ son faisceau d'idéaux, de sorte qu'on a une suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_x \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0,$$

où le faisceau $\mathscr{O}_x$ est le faisceau gratte-ciel des fonctions sur X nulles en dehors de x.

Comme L est un fibré en droites, on peut tensoriser cette suite exacte par L et obtenir une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathscr{I}_x \longrightarrow L \longrightarrow L_x \longrightarrow 0, \tag{2}$$

où $L_x := L \otimes \mathscr{O}_x$ est le faisceau gratte-ciel des sections de L nulles en dehors de x. On identifie ce faisceau avec l'espace vectoriel de ses sections globales, qui n'est autre que la fibre du fibré en droites L en x, isomorphe non canoniquement à $\mathbf{C}$.

Le point x n'est pas un point base du système linéaire $\mathbf{P}(H^0(X,L))$ (souvent noté $|L|$) si et seulement si l'application linéaire

$$\mathrm{ev}_x\colon H^0(X,L) \to L_x,$$

issue de la suite exacte (2), dite d'évaluation en x, est surjective. C'est le cas en particulier si $H^1(X, L \otimes \mathscr{I}_x) = 0$.

De même, on montre que l'application $\varphi_L := \varphi_{H^0(X,L)}$ est un plongement fermé (on dit alors que L est *très ample*) si et seulement si, pour tous points x et y de X, les applications linéaires

$$\mathrm{ev}_x \oplus \mathrm{ev}_y\colon H^0(X,L) \to L_x \oplus L_y \qquad (\text{si } x \neq y),$$

et

$$\mathrm{ev}_{2x}\colon H^0(X,L) \to L \otimes (\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_x^2)$$

sont surjectives. C'est le cas si

$$H^1(X, L \otimes \mathscr{I}_x\mathscr{I}_y) = 0$$

pour tous points x et y de X. La preuve utilise le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soient X et Y des variétés compactes lisses et soit $\varphi\colon X \to Y$ une application holomorphe. Si φ est injective et que la différentielle de φ est injective en tous points, φ est un plongement fermé : $\varphi(X)$ est une sous-variété fermée de Y et φ induit un isomorphisme de X sur $\varphi(X)$.*

1.2. Fibrés vectoriels et grassmanniennes

Les variétés grassmanniennes sont une généralisation des espaces projectifs que l'on peut définir ainsi. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n. La grassmannienne $\mathrm{Gr}(r,V)$ paramètre les sous-espaces vectoriels W de V de dimension r (de sorte que l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$ est $\mathrm{Gr}(1,V)$ et que l'espace projectif dual $\mathbf{P}(V^\vee)$ est $\mathrm{Gr}(n-1,V)$).

On peut plonger $\mathrm{Gr}(r,V)$ dans $\mathbf{P}(\bigwedge^r V)$ en envoyant un point $[W]$ de $\mathrm{Gr}(r,V)$ sur le sous-espace vectoriel $\bigwedge^r W$ de dimension 1 de $\bigwedge^r V$ (c'est le plongement de Plücker). On montre facilement que l'image (qui consiste en les tenseurs décomposables) est une sous-variété algébrique lisse de $\mathbf{P}(\bigwedge^r V)$ de dimension $r(n-r)$. On note aussi $\mathrm{Gr}(r,n)$ au lieu de $\mathrm{Gr}(r,\mathbf{C}^n)$. Par exemple $\mathrm{Gr}(2,4)$ est une quadrique lisse dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^4) = \mathbf{P}^5$. On note $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,n)}(1)$ la restriction de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\bigwedge^r V)}(1)$ à $\mathrm{Gr}(r,n)$.

Il y a sur $\mathrm{Gr}(r,V)$ un fibré vectoriel canonique $U_{r,V} \to \mathrm{Gr}(r,V)$ de rang r dit *sous-fibré tautologique.* Sa fibre au-dessus d'un point $[W]$ de $\mathrm{Gr}(r,V)$ est l'espace vectoriel W. On peut le définir par

$$U_{r,V} := \{([W],x) \in \mathrm{Gr}(r,V) \times V \mid x \in W\}.$$

C'est un sous-fibré du fibré trivial $\mathrm{Gr}(r,V) \times V$ et le fibré quotient $Q_{n-r,V}$ est appelé *fibré quotient tautologique.* Il est de rang $n-r$ et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow U_{r,V} \longrightarrow \mathrm{Gr}(r,V) \times V \longrightarrow Q_{n-r,V} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

de fibrés vectoriels qui entraîne que le fibré vectoriel $Q_{n-r,V}$ est engendré par ses sections globales (la suite exacte (3) induit en fait un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} H^0(\mathrm{Gr}(r,V), Q_{n-r,V})$). On a aussi $\bigwedge^{n-r} Q_{n-r,V} \simeq \bigwedge^r U_{r,V}^\vee \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,V)}(1)$, ainsi qu'un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \varpi\colon\ \mathrm{Gr}(r,V) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(n-r,V^\vee) \\ [W] &\longmapsto [W^\perp] \end{aligned}$$

qui vérifie $\varpi^* U_{n-r,V^\vee} = Q_{n-r,V}^\vee$ et $\varpi^* Q_{r,V^\vee} = U_{r,V}^\vee$.

Soit X une variété compacte et soit $\varphi\colon X \to \mathrm{Gr}(r,V)$ une application holomorphe. L'image inverse $E := \varphi^* U_{r,V}^\vee$ est un fibré vectoriel de rang r sur X, engendré par ses sections globales, et l'image inverse par φ du dual

$$0 \longrightarrow Q_{n-r,V}^\vee \longrightarrow \mathrm{Gr}(r,V) \times V^\vee \longrightarrow U_{r,V}^\vee \longrightarrow 0$$

de la suite exacte tautologique (3) donne un morphisme $X \times V^\vee \to E$ de fibrés vectoriels, donc une application linéaire $V^\vee \to H^0(X,E)$ entre espaces de sections globales.

Inversement, si E est un fibré vectoriel de rang r sur X et $V \to H^0(X,E)$ une application linéaire dont l'image engendre E (c'est-à-dire que le morphisme d'évaluation $X \times V \to E$, $(x,s) \mapsto s(x)$, est surjectif), on peut construire une application holomorphe

$$\varphi_V\colon X \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-r,V) \simeq \mathrm{Gr}(r,V^\vee)$$

en envoyant un point x de X sur $\{s \in V \mid s(x) = 0\}$. Elle vérifie $\varphi_V^* Q_{r,V} \simeq \varphi_V^* U_{r,V^\vee}^\vee \simeq E$.

1.3. Groupe de Picard

Soit X une variété compacte connexe lisse. Le *groupe de Picard* de X est le groupe des classes d'isomorphisme des fibrés en droites holomorphes sur X, muni de la loi de groupe (abélien) donnée par le produit tensoriel. On le note $\mathrm{Pic}(X)$ et on montre qu'il est isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$ ([**Hu2**, Corollary 2.2.10]). En associant à un diviseur D sur X la classe d'isomorphisme du fibré en droites $\mathscr{L}_D$, on définit un morphisme de groupes

$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Son noyau est le groupe des diviseurs principaux (ou linéairement équivalents à 0), c'est-à-dire le groupe des diviseurs des fonctions méromorphes non nulles sur X. Son image est le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ constitué des classes d'isomorphisme des fibrés en droites qui ont une section méromorphe non nulle ([**Hu2**, Corollary 2.3.20]).

La suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_X \xrightarrow{\cdot 2i\pi} \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow 1 \tag{4}$$

induit en cohomologie la suite exacte

$$0 \to H^1(X,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X,\mathscr{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbf{Z}) \to H^2(X,\mathscr{O}_X) \tag{5}$$

qui fait apparaître le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ comme une extension

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \mathrm{NS}(X) \to 0 \tag{6}$$

avec $\mathrm{Pic}^0(X) := H^1(X,\mathscr{O}_X)/\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Im}(c_1) \subset H^2(X,\mathbf{Z})$ (le *groupe de Néron–Severi* de X). Le morphisme de groupes c_1 est appelé *première classe de Chern.*

Tout comme $H^2(X,\mathbf{Z})$,

— $\mathrm{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini.

et, lorsque X est de plus kählérienne (par exemple projective),

— $\mathrm{Pic}^0(X)$ est un tore complexe de dimension $h^1(X, \mathscr{O}_X)$.

Exemple 1.3. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $H^1(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}) = 0$ et $H^2(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}c_1(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$, de sorte que $\mathrm{Pic}^0(\mathbf{P}^n) = 0$ et l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n) = \mathrm{NS}(\mathbf{P}^n) \\ d &\longmapsto \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. Plus généralement, on a le même énoncé pour les grassmanniennes : si $0 < r < n$, on a $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Gr}(r,n)) = 0$ et l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}(r,n)) = \mathrm{NS}(\mathrm{Gr}(r,n)) \\ d &\longmapsto \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,n)}(d) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

1.4. Dualité de Serre et adjonction

Pour toute variété compacte X de dimension n, tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X, et tout entier q, l'espace vectoriel $H^q(X, \mathscr{F})$ est de dimension finie et il est nul pour $q < 0$ ou $q > n$. Si X est de plus lisse et que Ω_X^n est le fibré en droites des n-formes holomorphes sur X, il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{Tr}\colon H^n(X, \Omega_X^n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$. Pour tout fibré vectoriel E sur X, l'application bilinéaire canonique

$$H^q(X, E) \times H^{n-q}(X, \Omega_X^n \otimes E^\vee) \longrightarrow H^n(X, \Omega_X^n) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbf{C} \tag{7}$$

est non dégénérée (dualité de Serre ; *cf.* [**Hu2**, Corollary 4.1.16]). Le fibré en droites Ω_X^n est aussi noté ω_X et est appelé le *faisceau dualisant* de X.

Théorème 1.4 (Formule d'adjonction). *Soit Y une hypersurface lisse d'une variété lisse X. On a*

$$\omega_Y = (\omega_X \otimes \mathscr{L}_Y)|_Y.$$

Démonstration. Pour toute sous-variété lisse Y de X, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \longrightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow 0,$$

de fibrés vectoriels sur Y, où $\mathscr{I}_Y$ est le faisceau d'idéaux de Y dans X (et où $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2$, le *fibré conormal* de Y dans X, est vu comme un $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y = \mathscr{O}_Y$-module). Dans le cas où Y est une hypersurface, on a $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 = \mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{O}_Y = \mathscr{L}_{-Y} \otimes \mathscr{O}_Y = \mathscr{L}_{-Y}|_Y$ et on obtient le résultat en prenant les déterminants dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-Y}|_Y \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \longrightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow 0$$

(voir aussi [**Hu2**, Proposition 2.4.7]). □

Exemple 1.5. Le fibré canonique de $\mathbf{P}^n$ est $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-n-1)$ ([**Hu2**, Proposition 2.4.3]). Plus généralement, on a

$$\omega_{\mathrm{Gr}(r,n)} = \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,n)}(-n).$$

Si $X \subset \mathbf{P}^n$ est une hypersurface (lisse) définie par un polynôme homogène de degré d, on a donc, par adjonction,

$$\omega_X = (\omega_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d))|_X = \mathscr{O}_X(-n-1+d).$$

1.5. Courbes

1.5.1. Définition.

Définition 1.6. *Une courbe est une variété complexe de dimension 1.*

Nous supposerons généralement que nos courbes sont compactes connexes mais nous nous permettrons quelques courbes singulières.

Exemple 1.7. La droite projective $\mathbf{P}^1$ est une courbe lisse compacte. Si $F \in \mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$ est un polynôme homogène (non nul) de degré $d \geqslant 1$, l'ensemble

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{P}^2 \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

est une courbe compacte connexe (isomorphe à $\mathbf{P}^1$ lorsque $d = 1$). Elle est lisse si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial T_0}, \frac{\partial F}{\partial T_1}, \frac{\partial F}{\partial T_2}$ n'ont pas de zéro commun autre que $(0,0,0)$.

L'ensemble

$$\left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}^3 \mid \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \leqslant 1\right\}$$

est aussi une courbe compacte lisse. Elle est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ par l'application

$$(y_0, y_1) \mapsto (y_0^3, y_0^2 y_1, y_0 y_1^2, y_1^3)$$

(qui n'est autre que $\varphi_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(3)}$).

1.5.2. Degré des fibrés en droites.

Définition 1.8. *Le* degré *d'un fibré en droites L sur une courbe compacte C est l'entier*

$$\deg(L) := \chi(C, \mathscr{O}_C) - \chi(C, L^\vee).$$

Exemple 1.9. Si C est une courbe compacte dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$, le degré de $\mathscr{O}_C(1) := \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|_C$ est le degré de la sous-variété C de $\mathbf{P}^n$ tel qu'il est défini dans [**H**, § I.7].

Un diviseur D sur une courbe lisse compacte C est une somme presque nulle $\sum_{x \in C} n_x x$. Son *degré* est l'entier $\deg(D) := \sum_{x \in C} n_x$; si D est effectif et qu'on le considère comme un sous-espace analytique (de dimension 0) de C, c'est aussi $h^0(D, \mathscr{O}_D)$.

On définit ainsi un morphisme de groupes surjectif

$$\deg\colon \operatorname{Div}(C) \longrightarrow \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Proposition 1.10. *Soit D un diviseur sur une courbe lisse compacte connexe C. On a*

$$\deg(\mathscr{L}_D) = \deg(D).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord D effectif. Comme $\mathscr{L}_D^\vee = \mathscr{L}_{-D}$, la suite exacte (1) s'écrit

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_D^\vee \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_D \to 0.$$

Comme D est fini, on a $\chi(D, \mathscr{O}_D) = h^0(D, \mathscr{O}_D) = \deg(D)$, et on en déduit

$$\chi(C, \mathscr{O}_C) = \chi(C, \mathscr{L}_D^\vee) + \chi(D, \mathscr{O}_D) = \chi(C, \mathscr{L}_D^\vee) + \deg(D),$$

d'où le résultat dans ce cas.

Si D est un diviseur quelconque, on l'écrit comme différence $E - F$ de diviseurs effectifs. En tensorisant par $\mathscr{L}_{-E}$, on déduit de (1) une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-E} \longrightarrow \mathscr{L}_{F-E} \longrightarrow \mathscr{O}_F \to 0.$$

Comme $\mathscr{L}_D^\vee = \mathscr{L}_{F-E}$, on en déduit

$$\deg(\mathscr{L}_D) = \chi(C, \mathscr{O}_C) - \chi(C, \mathscr{L}_{F-E}) = \chi(C, \mathscr{O}_C) - (\chi(C, \mathscr{L}_{-E}) + \chi(F, \mathscr{O}_F)) = \deg(\mathscr{L}_E) - \deg(F).$$

D'après le cas déjà traité, on a $\deg(\mathscr{L}_E) = \deg(E)$, donc

$$\deg(\mathscr{L}_D) = \deg(E) - \deg(F) = \deg(D)$$

ce qui montre la proposition. □

Si un fibré en droites L a une section holomorphe non nulle, de diviseur D (effectif), on a $L \simeq \mathscr{L}_D$, d'où $\deg(L) = \deg(\mathscr{L}_D) = \deg(D) \geqslant 0$.

Corollaire 1.11. *Soit f une fonction méromorphe non nulle sur une courbe lisse compacte connexe C. On a* $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

Démonstration. Si $D := \operatorname{div}(f)$, on a vu que $\mathscr{L}_D \simeq \mathscr{O}_C$. Le corollaire résulte alors de la proposition. □

1.5.3. Projectivité des courbes compactes.

Proposition 1.12. *Tout fibré en droites sur une courbe compacte a une section méromorphe non nulle.*

Démonstration. Soit L un fibré en droites sur une courbe compacte connexe C et soit D un diviseur effectif sur C[1]. En tensorisant la suite exacte (1) par $L \otimes \mathscr{L}_D$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes \mathscr{L}_D \longrightarrow \mathscr{O}_D \to 0,$$

d'où une suite exacte longue

$$0 \to H^0(C, L) \to H^0(C, L \otimes \mathscr{L}_D) \to H^0(D, \mathscr{O}_D) \to H^1(C, L)$$

de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. En particulier,

$$\begin{aligned} h^0(C, L \otimes \mathscr{L}_D) &\geqslant h^0(C, L) + h^0(D, \mathscr{O}_D) - h^1(C, L) \\ &= h^0(C, L) + \deg(D) - h^1(C, L). \end{aligned}$$

Pour $\deg(D) > -\chi(C, L)$, le fibré en droites $L \otimes \mathscr{L}_D$ admet donc une section holomorphe non nulle s. Le quotient s/s_D est alors une section méromorphe non nulle de L. □

Une autre façon d'énoncer la proposition est de dire que tout fibré en droites sur C est du type $\mathscr{L}_D$. On en déduit que le morphisme (8) se factorise en

$$\operatorname{Div}(C) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z}.$$

Proposition 1.13. *Toute courbe compacte est (algébrique) projective.*

1. On triche un peu ici car on n'a défini les diviseurs que sur les variétés lisses. Mais toute la théorie fonctionne sur les courbes si on se limite à des diviseurs dont le support est composé de points lisses de C.

DÉMONSTRATION. Nous ne ferons la preuve que dans le cas où C est lisse connexe. Nous avons vu dans la preuve de la prop. 1.12 qu'il existe, sur une courbe compacte C, un fibré en droites L admettant des sections holomorphes non nulles. Celles-ci définissent alors une application méromorphe

$$\varphi_L : C \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(C,L)^\vee).$$

On a vu que cette application est holomorphe si $H^1(C, L \otimes \mathscr{I}_x) = 0$ pour tout $x \in C$. Comme C est une courbe, le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_x$ n'est autre que le (faisceau des sections du) fibré en droites $\mathscr{L}_{-x}$. Pour que φ_L soit holomorphe, il suffit donc qu'on ait $H^1(C, L \otimes \mathscr{L}_{-x}) = 0$ pour tout $x \in C$. De même, φ_L est un plongement fermé si $H^1(C, L \otimes \mathscr{L}_{-x} \otimes \mathscr{L}_{-y}) = 0$ pour tout x et tout y dans C (*cf.* § 1.1).

Pour montrer qu'il existe un fibré en droites L sur C vérifiant ces propriétés, on utilise la dualité de Serre. Soit L un fibré en droites sur C. On a

$$H^1(C, L \otimes \mathscr{L}_{-x}) \simeq H^0(C, \omega_C \otimes L^\vee \otimes \mathscr{L}_x)^\vee$$

et cet espace vectoriel est nul (pour tout x), dès que

$$0 > \deg(\omega_C \otimes L^\vee \otimes \mathscr{L}_x) = \deg(\Omega^1_C) - \deg(L) + 1.$$

Pour $\deg(L) > \deg(\omega_C) + 1$, l'application φ_L est donc holomorphe ; un raisonnement analogue entraîne que pour $\deg(L) > \deg(\omega_C) + 2$, c'est un plongement fermé, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme entre C et une sous-variété complexe de $\mathbf{P}(H^0(C,L)^\vee)$.

Comme C est compacte, un théorème de Chow nous dit alors que C est une sous-variété algébrique de $\mathbf{P}(H^0(C,L)^\vee)$. □

COROLLAIRE 1.14. *Soit $\varphi : C' \to C$ un morphisme fini entre courbes compactes connexes. Pour tout fibré en droites L sur C, on a*

$$\deg(\varphi^* L) = \deg(\varphi)\deg(L),$$

où $\deg(\varphi)$, *le* degré *de φ, est le cardinal d'une fibre générale de φ.*

Le degré de φ est 0 si et seulement si φ n'est pas surjective. Si $\deg(\varphi) = 1$ et que C est lisse, φ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. On écrit $L = \mathscr{L}_D$. Il ressort des preuves des prop. 1.12 et 1.13 qu'on peut choisir le support de D dans le lieu de lissité de φ, c'est-à-dire là où chaque point x de C a exactement $\deg(\varphi)$ antécédents ; plus précisément, on a $\deg(\varphi^*(x)) = \deg(\varphi)$. Comme $\varphi^* \mathscr{L}_D = \mathscr{L}_{\varphi^*(D)}$, on a le résultat. □

1.5.4. Genre des courbes compactes.

DÉFINITION 1.15. *Le genre d'une courbe compacte connexe C est la dimension de l'espace vectoriel $H^1(C, \mathscr{O}_C)$. On le note $g(C)$.*

On a $\chi(C, \mathscr{O}_C) = 1 - g(C)$ et la définition du degré d'un fibré en droites L sur C s'écrit (en tenant compte du fait que $\deg(L^\vee) = -\deg(L)$)

$$\chi(C, L) = \deg(L) + 1 - g(C). \tag{9}$$

Cette égalité est le théorème de Riemann–Roch sur les courbes (dans notre présentation, c'est une tautologie).

PROPOSITION 1.16. *Soit C une courbe compacte irréductible et soit $\nu : \widetilde{C} \to C$ sa normalisation. On a $g(\widetilde{C}) \leqslant g(C)$ et il y a égalité si et seulement si C est lisse.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \nu_* \mathscr{O}_{\widetilde{C}} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

où le faisceau $\mathscr{F}$ est de support le lieu singulier de C. Celle-ci entraîne qu'on a une suite exacte

$$0 \to H^0(C, \mathscr{O}_C) \to H^0(C, \nu_* \mathscr{O}_{\widetilde{C}}) \to H^0(C, \mathscr{F}) \to H^1(C, \mathscr{O}_C) \to H^1(C, \nu_* \mathscr{O}_{\widetilde{C}}) \to 0.$$

D'autre part, comme le morphisme ν est fini, on a des isomorphismes

$$H^i(C, \nu_* \mathscr{O}_{\widetilde{C}}) \simeq H^i(\widetilde{C}, \mathscr{O}_{\widetilde{C}})$$

pour tout i. La courbe C étant irréductible, il en est de même de la courbe $\widetilde{C}$. On a donc $h^0(C, \mathscr{O}_C) = h^0(C, \nu_* \mathscr{O}_{\widetilde{C}}) = 1$ et

$$g(\widetilde{C}) = g(C) - h^0(C, \mathscr{F}),$$

d'où la proposition, puisque $h^0(C, \mathscr{F}) = 0$ si et seulement si $\mathscr{F} = 0$. □

Si la courbe C est lisse, la dualité de Serre entraîne qu'on a aussi

$$g(C) = h^0(C, \Omega^1_C) = h^0(C, \omega_C).$$

En appliquant (9) à $L = \omega_C$, on obtient, en utilisant de nouveau la dualité de Serre,

$$\deg(\omega_C) + 1 - g(C) = h^0(C, \omega_C) - h^1(C, \omega_C) = g(C) - h^0(C, \mathscr{O}_C) = g(C) - 1,$$

de sorte que

$$\deg(\omega_C) = 2g(C) - 2. \tag{10}$$

Exemple 1.17. Un calcul explicite des groupes de cohomologie de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}$ (par exemple par la cohomologie de Cech) montre que $H^1(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}) = 0$. Le genre de $\mathbf{P}^1$ est donc 0.

Exemple 1.18. Soit $C \subset \mathbf{P}^2$ une courbe plane définie par un polynôme homogène F de degré $d \geqslant 1$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-d) \xrightarrow{\cdot F} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2} \longrightarrow \mathscr{O}_C \to 0$$

de faisceaux sur $\mathbf{P}^2$, qui entraîne (en utilisant la dualité de Serre, le fait que $\omega_{\mathbf{P}^2} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)$, et un calcul explicite des groupes de cohomologie des $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(e)$)

$$\begin{aligned}
\chi(C, \mathscr{O}_C) &= \chi(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}) - \chi(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)) \\
&= 1 - h^2(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)) \\
&= 1 - h^0(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d-3)) \\
&= 1 - \binom{d-1}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que le genre de C est $\binom{d-1}{2}$.

Si C est lisse, on peut aussi obtenir ce résultat en utilisant la formule d'adjonction (th. 1.4) : on a $\omega_C = (\omega_{\mathbf{P}^2} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d))|_C = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d-3)|_C$. Comme $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1)|_C$ est de degré d (le diviseur de toute section non nulle de ce fibré en droites est de degé d), on obtient

$$2g(C) - 2 = \deg(\omega_C) = d(d-3),$$

d'où le résultat.

EXEMPLE 1.19. Soit C une courbe lisse compacte connexe. On a $H^2(C,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, le groupe de Néron–Severi de C est donc aussi $\mathbf{Z}$ et le morphisme c_1 de la suite exacte (6) n'est autre que le degré. Celle-ci s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

et il résulte de la théorie de Hodge (*cf.* § 1.3, 1.5.5 et § 1.7) que le groupe $\mathrm{Pic}^0(C)$ est un tore complexe de dimension le genre $g(C)$.

PROPOSITION 1.20. *Soit C une courbe compacte connexe lisse. On a équivalence entre*

(i) $g(C) = 0$ *;*
(ii) *pour tout fibré en droites L sur C de degré 1, on a $h^0(C,L) = 2$;*
(iii) *il existe $x \in C$ tel que $h^0(C,\mathscr{L}_x) \geqslant 2$;*
(iv) *C est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.*

DÉMONSTRATION. Supposons $g(C) = 0$, de sorte que, par (10), on a $\deg(\omega_C) = -2$. Pour tout fibré en droites L sur C de degré 1, on a $\deg(\omega_C \otimes L^\vee) = -1$ donc, par dualité de Serre, $h^1(C,L) = h^0(C,\omega_C \otimes L^\vee) = 0$ et, par le théorème de Riemann–Roch, $h^0(C,L) = \chi(C,L) = 2$. On a donc (i)⇒(ii), et (ii)⇒(iii) est évident.

Supposons (iii). La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \xrightarrow{\cdot s_x} \mathscr{L}_x \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(C,\mathscr{O}_C) \xrightarrow{\cdot s_x} H^0(C,\mathscr{L}_x) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathbf{C}$$

qui entraîne $h^0(C,\mathscr{L}_x) = 2$.

Montrons que $\mathscr{L}_x$ est sans point base. Soit s une section holomorphe non nulle de $\mathscr{L}_x$ qui n'est pas proportionnelle à s_x. Son diviseur est effectif et de degré $\deg(\mathscr{L}_x) = 1$; c'est donc un (unique) point $x(s) \in C$, autre que x puisque s n'est pas proportionnelle à s_x. Le fibré $\mathscr{L}_x$ est donc sans point base. Il définit donc une application holomorphe surjective

$$\varphi_{\mathscr{L}_x} \colon C \longrightarrow \mathbf{P}(H^0(C,\mathscr{L}_x)^\vee) = \mathbf{P}^1$$

qui induit un isomorphisme $\varphi^*_{\mathscr{L}_x}\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \simeq \mathscr{L}_x$. Comme $\deg(\mathscr{L}_x) = 1$, le cor. 1.14 entraîne que $\varphi_{\mathscr{L}_x}$ est de degré 1, donc c'est la normalisation de son image. Comme $\mathbf{P}^1$ est lisse, $\varphi_{\mathscr{L}_x}$ est un isomorphisme. Cela montre (iii)⇒(iv).

Comme on a vu (iv)⇒(i) dans l'ex. 1.17, cela termine la preuve de la proposition. □

COROLLAIRE 1.21. *Soit C une courbe compacte connexe irréductible. On a $g(C) = 0$ si et seulement si C est une courbe rationnelle lisse connexe (c'est-à-dire une courbe isomorphe à $\mathbf{P}^1$).*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la prop. 1.20 à la normalisée de C et d'utiliser la prop. 1.16. □

PROPOSITION 1.22. *Soit C une courbe connexe projective lisse de genre $g \geqslant 2$. Le fibré en droites ω_C est sans point base. Il induit donc une application holomorphe*

$$\varphi_{\omega_C} \colon C \longrightarrow \mathbf{P}^{g-1}$$

appelée application canonique *et*

— *soit φ_{ω_C} est un plongement fermé qui induit un isomorphisme entre C et une courbe lisse de degré $2g-2$;*

— *soit* φ_{ω_C} *est de degré 2 sur une courbe rationnelle lisse de degré* $g-1$ *dans* $\mathbf{P}^{g-1}$.

Dans le second cas, la courbe C *est dite* hyperelliptique.

Démonstration. Soient x et y des points de C. Posons $g := g(C)$. Le théorème de Riemann–Roch et la dualité de Serre entraînent

$$h^0(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x}) = h^1(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x}) + 2g - 3 + 1 - g = h^0(C, \mathscr{L}_x) + g - 2.$$

Comme $g > 0$, on a $h^0(C, \mathscr{L}_x) = 1$ (prop. 1.20), de sorte que $h^0(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x}) = g-1$. Cela entraîne que l'application d'évaluation ev_x est surjective, donc que x n'est pas point base de ω_C ; ce fibré en droites est donc sans point base.

On a de même

$$h^0(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x-y}) = h^1(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x-y}) + 2g - 4 + 1 - g = h^0(C, \mathscr{L}_{x+y}) + g - 3.$$

Si $h^0(C, \mathscr{L}_{x+y}) = 1$, on a $h^0(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x-y}) = g - 2$ et les applications d'évaluation $\mathrm{ev}_x \oplus \mathrm{ev}_y$ et ev_{2x} sont surjectives, de sorte que φ_{ω_C} est un plongement fermé.

Si $h^0(C, \mathscr{L}_{x+y}) = 2$, le fibré en droites $\mathscr{L}_{x+y}$ est sans point base (utiliser la prop. 1.20) donc induit une application holomorphe $\varphi_{\mathscr{L}_{x+y}} \colon C \longrightarrow \mathbf{P}^1$ de degré 2. On a, pour tout $k \geqslant 1$, une inclusion

$$\mathrm{Sym}^k H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}) \subset H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}^{\otimes k})$$

et en particulier,

$$\mathrm{Sym}^{g-1} H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}) \subset H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}^{\otimes (g-1)}).$$

L'espace vectoriel $H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}^{\otimes (g-1)})$ est donc de dimension au moins g. Le théorème de Riemann–Roch et la dualité de Serre entraînent $h^0(C, \omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x-y}^{\otimes (g-1)}) \geqslant 1$. Comme le fibré en droites $\omega_C \otimes \mathscr{L}_{-x-y}^{\otimes (g-1)}$ est de degré 0, il est donc trivial, de sorte que $\omega_C \simeq \mathscr{L}_{x+y}^{\otimes (g-1)}$ et $H^0(C, \omega_C) = H^0(C, \mathscr{L}_{x+y}^{\otimes (g-1)}) = \mathrm{Sym}^{g-1} H^0(C, \mathscr{L}_{x+y})$. Cela entraîne une factorisation

$$\varphi_{\omega_C} \colon C \xrightarrow{\varphi_{\mathscr{L}_{x+y}}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\varphi_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(g-1)}} \mathbf{P}^{g-1},$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Remarque 1.23. Il ressort de la preuve ci-dessus que les courbes hyperelliptiques sont exactement les revêtements doubles (lisses) de $\mathbf{P}^1$.

Rappelons qu'on a vu dans la preuve de la prop. 1.13 que si C est une courbe projective de genre g et que L est un fibré en droites sur C, il est sans point base si $\deg(L) \geqslant 2g$ et très ample si $\deg(L) > 2g$.

Exemple 1.24. Soit C une courbe connexe projective lisse de genre g et, lorsque $g \geqslant 2$, soit $\varphi := \varphi_{\omega_C} \colon C \to \mathbf{P}^{g-1}$ l'application canonique. Il est commode (et traditionnel) d'appeler g_d^r un système linéaire sur C de degré d et de dimension (projective) r. Par exemple, la courbe C est hyperelliptique si et seulement si elle a un g_2^1. On peut donner des descriptions des courbes « générales » de petit genre.

(a) Si $g = 0$, la courbe C est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

(b) Si $g = 1$, la courbe C est isomorphe à une cubique dans $\mathbf{P}^2$ (c'est une courbe elliptique).

(c) Si $g = 2$, l'application φ est un revêtement double de $\mathbf{P}^1$ (la courbe C est hyperelliptique).

(d) Si $g = 3$ et que C n'a pas de g_2^1 (c'est le cas général), l'application φ induit un isomorphisme entre C et une quartique dans $\mathbf{P}^2$.

(e) Si $g = 4$ et que C n'a pas de g_2^1 (c'est le cas général), l'application φ induit un isomorphisme entre C et l'intersection d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbf{P}^3$.

(f) Si $g = 5$ et que C n'a pas de g_3^1 (c'est le cas général), l'application φ induit un isomorphisme entre C et l'intersection de trois quadriques dans $\mathbf{P}^4$.

(g) Si $g = 6$ et que C n'a ni g_3^1, ni g_5^2 et n'est pas revêtement double d'une courbe elliptique (c'est le cas général), l'application φ induit un isomorphisme entre C et l'intersection de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbf{P}^9$ avec une quadrique et un $\mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^9$ (voir § 1.2 pour la définition des grassmanniennes et du plongement de Plücker) [2].

(h) Si $g = 7$ et que C est générale, l'application φ induit un isomorphisme entre C et une intersection complète dans un espace homogène [3].

(i) Si $g = 8$ et que C n'a pas de g_7^2 (c'est le cas général), l'application φ induit un isomorphisme entre C et l'intersection de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbf{P}^{14}$ avec un $\mathbf{P}^7 \subset \mathbf{P}^{14}$ [4].

Comment montre-t-on ces résultats ? Prenons par exemple une courbe C de genre 4 non hyperelliptique. L'application canonique $\varphi := \varphi_{\omega_C} \colon C \to \mathbf{P}^3$ est un plongement fermé dont l'image est une courbe de degré $2g(C) - 2 = 6$. L'espace vectoriel des quadriques contenant C s'identifie au noyau de l'application de multiplication

$$\mathrm{Sym}^2 H^0(C, \omega_C) \longrightarrow H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}).$$

L'espace source est de dimension 10, tandis que l'espace but est de dimension $12+1-4 = 9$. La courbe canonique $\varphi(C)$ est donc contenue dans une quadrique Q, qui est irréductible. Cette quadrique est unique puisque l'intersection de deux quadriques irréductible distinctes est une courbe de degré 4. De même, l'espace vectoriel des cubiques contenant C s'identifie au noyau de l'application de multiplication

$$\mathrm{Sym}^3 H^0(C, \omega_C) \longrightarrow H^0(C, \omega_C^{\otimes 3}).$$

L'espace source est de dimension 20, tandis que l'espace but est de dimension $18 + 1 - 4 = 15$. Le noyau contient $Q \cdot H^0(C, \omega_C)$, espace vectoriel de dimension 4 qui correspond aux cubiques qui sont réunion de Q et d'un plan, qui sont les seules cubiques réductibles contenant $\varphi(C)$. La courbe $\varphi(C)$ est donc contenue dans une cubique irréductible, et c'est l'intersection de cette cubique avec Q (les deux courbes ont le même degré).

On peut utiliser deux théorèmes importants. Le premier, dû à Noether, dit que si une courbe C n'est pas hyperelliptique, les applications naturelles

$$\mathrm{Sym}^m H^0(C, \omega_C) \longrightarrow H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$$

sont surjectives pour tout $m \geqslant 1$. L'autre, dû à Petri, dit que l'idéal d'une courbe canonique sans g_3^1 est engendré par des quadriques. Cela entraîne que cette courbe canonique est intersection (schématique) des quadriques qui la contiennent.

2. Voir le § 5 de Mukai, S., Curves and Grassmannians, in *Algebraic Geometry and related Topics, 1992, Incheon, Korea,* 19–40, International Press, 1993, Cambridge, MA.

3. Voir Mukai, S., Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus $\leqslant 10$, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I,* 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

4. Voir Mukai, S., Curves and Grassmannians, in *Algebraic Geometry and related Topics, 1992, Incheon, Korea,* 19–40, International Press, 1993, Cambridge, MA.

Lorsque $g = 5$ et que C n'a pas de g^1_3, on en déduit que sa courbe canonique est contenue dans l'intersection de trois quadriques indépendantes, dont elle est l'intersection.

Les autres cas sont de plus en plus difficiles à traiter à mesure que le genre croît. Rappelons qu'établir l'existence d'un morphisme de la courbe C vers une grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,n)$ revient à trouver un fibré vectoriel E de rang 2 sur C et un espace vectoriel de dimension n de sections de E qui engendre E en tout point (voir § 1.2).

1.5.5. Liens avec la topologie. Le faisceau $\mathbf{C}_C$ des fonctions complexes localement constantes sur une courbe C lisse compacte connexe admet une résolution

$$0 \to \mathbf{C}_C \longrightarrow \mathscr{O}_C \xrightarrow{\partial} \Omega^1_C \to 0 \tag{11}$$

dite de de Rham. On en déduit l'égalité

$$\chi(C, \mathbf{C}_C) = \chi(C, \mathscr{O}_C) - \chi(C, \Omega^1_C) = 2 - 2g(C).$$

Les groupes de cohomologie du faisceau $\mathbf{C}_C$ s'identifient aux groupes de cohomologie singulière (à coefficients complexes) de l'espace topologique C. On a donc

$$\chi(C, \mathbf{C}_C) = b_0 - b_1 + b_2 = 2 - b_1,$$

où les $b_i := h^i(C, \mathbf{C})$ sont les *nombres de Betti* de C. Comme $b_0 = 1$ et $b_2 = 1$ (dualité de Poincaré), on en déduit $b_1 = 2g(C)$: le genre de C est un invariant topologique (il coïncide avec le genre topologique de la surface de Riemann C).

La résolution de de Rham (11) induit une suite exacte

$$0 \to H^0(C, \Omega^1_C) \to H^1(C, \mathbf{C}) \to H^1(C, \mathscr{O}_C) \to H^1(C, \Omega^1_C) \to H^2(C, \mathbf{C}_C) \to 0.$$

Comme $H^1(C, \Omega^1_C)$ est de dimension 1 (dualité de Serre), tout comme $H^2(C, \mathbf{C}_C)$ (dualité de Poincaré), on obtient une suite exacte courte

$$0 \to H^0(C, \Omega^1_C) \to H^1(C, \mathbf{C}) \to H^1(C, \mathscr{O}_C) \to 0.$$

C'est une forme faible de la décomposition de Hodge (*cf.* § 1.7)

$$H^1(C, \mathbf{C}) \simeq H^1(C, \mathscr{O}_C) \oplus H^0(C, \Omega^1_C),$$

cas particulier d'un résultat général valable pour toutes les variétés kählériennes compactes.

1.6. Surfaces

1.6.1. Produit d'intersection. Soit S une surface compacte connexe. Le groupe $\mathrm{Pic}(S)$ est le groupe (abélien) des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur S, pour lequel le produit est le produit tensoriel et l'opposé est le dual. Ce groupe est isomorphe à $H^1(S, \mathscr{O}_S^\times)$ et, si S est projective, c'est aussi le groupe des diviseurs sur S modulo l'équivalence linéaire (§ 1.3). On va définir (de plusieurs façons) sur $\mathrm{Pic}(S)$ une forme bilinéaire symétrique à valeurs entières appelée produit d'intersection.

Définition topologique. On suppose ici S lisse. La suite exacte exponentielle (4) fournit un morphisme première classe de Chern

$$c_1\colon \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{Z}).$$

Le produit d'intersection est alors relié au cup-produit (topologique) sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ par

$$L \cdot M = c_1(L) \smile c_1(M) \in H^4(S, \mathbf{Z}).$$

Comme S est une variété compacte réelle orientée de dimension 4, on a un isomorphisme canonique $H^4(S,\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. C'est donc bien un entier.

Définition cohomologique. C'est la définition la plus rapide, mais elle n'est pas très parlante. Si L et M sont des fibrés en droites sur une surface compacte S, on pose

$$L \cdot M := \chi(S,\mathscr{O}_S) - \chi(S,L^\vee) - \chi(S,M^\vee) + \chi(S,L^\vee \otimes M^\vee)$$

(comparer avec la déf. 1.8). Cette définition peut paraître formelle et peu concrète, mais elle a l'avantage d'être valable même si S est singulière (et sur n'importe quel corps !).

Définition géométrique. On suppose de nouveau S lisse. Soient C et D des courbes sur S sans composante commune. Si $p \in C \cap D$, les courbes C et D ont (puisque S est lisse) des équations locales respectives f et g dans un voisinage de p. Comme p est l'unique point d'intersection de C et D dans un voisinage de p, le Nullstellensatz dit que l'idéal (f,g) de l'anneau local $\mathscr{O}_{S,p}$ engendré par ses éléments f et g contient une puissance de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{S,p}$. En particulier, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{O}_{S,p}/(f,g)$ est de dimension finie. On appelle l'entier positif

$$m_p(C,D) := \dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_{S,p}/(f,g))$$

la *multiplicité d'intersection* de C et D en p. Elle vaut 1 si et seulement si f et g engendrent $\mathfrak{m}_{S,p}$, c'est-à-dire que C et D sont lisses et transverses en p. On a alors

$$C \cdot D := \sum_{p\in C\cap D} m_p(C,D).$$

Ce nombre n'est autre que la longueur $h^0(C\cap D,\mathscr{O}_{C\cap D})$ de l'intersection schématique $C\cap D$ (de dimension 0).

Remarque 1.25. On note aussi L^2 au lieu de $L\cdot L$ (et C^2 au lieu de $C\cdot C$), à ne pas confondre avec le carré tensoriel $L^{\otimes 2} = L\otimes L$ ou la somme directe $L^{\oplus 2} = L \oplus L$ (hélas aussi souvent notés L^2 dans la litérature...).

Si D est un diviseur ou une courbe, on note aussi $L\cdot D$ au lieu de $L\cdot \mathscr{L}_D$.

Faisons le lien entre les définitions cohomologique et géométrique. On suppose S lisse. La courbe C est le lieu des zéros d'une section s du fibré en droites $\mathscr{L}_C$ et la courbe D est le lieu des zéros d'une section t du fibré en droites $\mathscr{L}_D$. Montrons que la suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-C-D} \xrightarrow{(t,-s)} \mathscr{L}_{-C}\oplus\mathscr{L}_{-D} \xrightarrow{(s,t)} \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_{C\cap D} \longrightarrow 0 \tag{12}$$

est exacte. Soit $p\in S$ et soient $f,g\in\mathscr{O}_{S,p}$ des équations locales de C et D. Il s'agit de montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{S,p} \xrightarrow{(g,-f)} \mathscr{O}_{S,p}\oplus\mathscr{O}_{S,p} \xrightarrow{(f,g)} \mathscr{O}_{S,p} \longrightarrow \mathscr{O}_{S,p}/(f,g) \longrightarrow 0$$

est exacte. Le seul point à vérifier est l'exactitude en $\mathscr{O}_{S,p}\oplus\mathscr{O}_{S,p}$: si $a,b\in\mathscr{O}_{S,p}$ sont tels que $af+bg=0$, il s'agit de montrer qu'il existe $c\in\mathscr{O}_{S,p}$ tel que $a=gc$ et $b=-fc$. Cela résulte du fait que S étant lisse en p, l'anneau local $\mathscr{O}_{S,p}$ est factoriel et que f et g sont premiers entre eux dans cet anneau (puisque C et D n'ont pas de composante irréductible commune passant par p).

En prenant les caractéristiques d'Euler dans la suite exacte (12) et en utilisant le fait que $\mathscr{L}_C^\vee = \mathscr{L}_{-C}$ et $\mathscr{L}_D^\vee = \mathscr{L}_{-D}$, on obtient

$$C\cdot D = h^0(C\cap D,\mathscr{O}_{C\cap D}) = \chi(C\cap D,\mathscr{O}_{C\cap D}) = \mathscr{L}_C\cdot\mathscr{L}_D.$$

L'intérêt de cette formule est que le membre de droite ne dépend que des classes d'équivalence linéaire de C et D, et qu'il a un sens même lorsque C et D ont une composante commune.

Nous admettrons que les définitions topologique et cohomologique coïncident.

Exemple 1.26 (Théorème de Bézout). Supposons $S = \mathbf{P}^2$. L'application c_1 induit un isomorphisme

$$c_1\colon \operatorname{Pic}(\mathbf{P}^2) \longrightarrow H^2(\mathbf{P}^2, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$$

qui envoie la classe d'isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ sur 1. Comme $\chi(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d)) = \binom{d+2}{2}$, on a

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(c) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d) = \binom{c+d+2}{2} - \binom{c+2}{2} - \binom{d+2}{2} + 1 = cd.$$

Si C et D sont des courbes dans $\mathbf{P}^2$ sans composante commune, de degrés respectifs c et d, on a donc

$$\sum_{p \in C \cap D} m_p(C, D) = C \cdot D = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(c) \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(d) = cd.$$

Exemple 1.27 (Éclatement d'un point). Soit $\varepsilon\colon \operatorname{Bl}_p S \to S$ l'éclatement d'un point p sur une surface compacte S et soit $E \subset \operatorname{Bl}_p S$ le diviseur exceptionnel. L'application

$$\begin{aligned} \operatorname{Pic}(S) \oplus \mathbf{Z} &\longrightarrow \operatorname{Pic}(\operatorname{Bl}_p S) \\ (D, m) &\longmapsto \varepsilon^* D + mE \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes et

$$(\varepsilon^* D + mE)^2 = D^2 - m^2.$$

Pour la preuve, je renvoie à [**B**, prop. II.3].

Exemple 1.28. Si S est une surface dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ et que l'on pose $\mathscr{O}_S(1) := \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|_S$, l'auto-intersection $\mathscr{O}_S(1)^2$ est le degré de la sous-variété S de $\mathbf{P}^n$ tel qu'il est défini dans [**H**, § I.7].

Théorème 1.29. *Soit S une surface compacte connexe lisse. La forme d'intersection sur* $\operatorname{Pic}(S)$ *est bilinéaire et symétrique.*

La symétrie est évidente. Pour la bilinéarité, je renvoie à [**B**, th. I.4] dans le cadre algébrique ; sinon, elle est aussi conséquence évidente de la bilinéarité du cup-produit. Nous verrons dans le § 1.7 que la forme d'intersection est aussi non dégénérée. On parle donc du *réseau de Picard* (pour une surface compacte).

Exemple 1.30. Prenons $S = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. L'application c_1 induit un isomorphisme

$$c_1\colon \operatorname{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \longrightarrow H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

qui envoie la classe d'isomorphisme de $L_1 := \operatorname{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ sur $(0, 1)$ et celle de $L_2 := \operatorname{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ sur $(1, 0)$. On a $L_1^2 = L_2^2 = 0$ et $L_1 \cdot L_2 = 1$, de sorte que, par bilinéarité, on a

$$(m, n) \cdot (m', n') = mn' + m'n.$$

Le réseau de Picard de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est donc le plan hyperbolique, souvent noté U.

On a aussi $c_1(\omega_S) = (-2, -2)$. Si $C \subset S$ est une courbe lisse (connexe) et que $c_1(L_C) = (m, n)$, on a donc par adjonction $\omega_C = (L_1^{\otimes(m-2)} \otimes L_2^{\otimes(n-2)})|_C$. En anticipant et en utilisant la proposition suivante, on obtient

$$2g(C) - 2 = (m-2, n-2) \cdot (m, n) = n(m-2) + m(n-2),$$

soit

$$g(C) = (m-1)(n-1).$$

Proposition 1.31. *Soit S une surface compacte connexe lisse et soit $C \subset S$ une courbe lisse. Soit L un fibré en droites sur S. On a*

$$L \cdot C = \deg(L|_C).$$

Démonstration. On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-C} \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow 0$$

l'égalité $\chi(S, \mathscr{O}_S) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \chi(S, \mathscr{L}_{-C})$. Après tensorisation par $L^\vee$, on obtient de même

$$\chi(S, L^\vee) = \chi(C, L^\vee|_C) + \chi(S, L^\vee \otimes \mathscr{L}_{-C}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} L \cdot C = L \cdot \mathscr{L}_C &= \chi(S, \mathscr{O}_S) - \chi(S, L^\vee) - \chi(S, \mathscr{L}_{-C}) + \chi(S, L^\vee \otimes \mathscr{L}_{-C}) \\ &= \chi(C, \mathscr{O}_C) - \chi(C, L^\vee|_C), \end{aligned}$$

d'où la proposition, par définition du degré de $L|_C$ (déf. 1.8). □

Comme dans le cas des courbes, nous admettrons le résultat suivant.

Proposition 1.32. *Soit $\varphi \colon S' \to S$ une application holomorphe entre surfaces compactes irréductibles. Pour tout fibré en droites L sur S, on a*

$$(\varphi^* L)^2 = \deg(\varphi)\, L^2,$$

où $\deg(\varphi)$*, le* degré *de φ, est le cardinal d'une fibre générale de φ.*

Comme dans le cas des courbes, le degré de φ est 0 si et seulement si φ n'est pas surjective. Si φ est finie de degré 1 et que S est lisse, φ est un isomorphisme (théorème de Zariski).

1.6.2. Théorème de Riemann–Roch et formule de Noether.

Théorème 1.33 (Riemann–Roch). *Soit S une surface compacte connexe lisse. Pour tout fibré en droites L sur S, on a*

$$\chi(S, L) = \chi(S, \mathscr{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L \cdot \omega_S).$$

Démonstration. Calculons le produit $L^\vee \cdot (L \otimes \omega_S^{-1})$ avec la formule de définition

$$L^\vee \cdot (L \otimes \omega_S^{-1}) = \chi(S, \mathscr{O}_S) - \chi(S, L) - \chi(S, L^\vee \otimes \omega_S) + \chi(S, \omega_S).$$

Par dualité de Serre, on a $\chi(S, \omega_S) = \chi(S, \mathscr{O}_S)$ et $\chi(S, L^\vee \otimes \omega_S) = \chi(S, L)$. En utilisant la bilinéarité du produit d'intersection, on obtient la formule cherchée. □

Mentionnons aussi, sans preuve, la *formule de Noether* qui, sur une surface compacte S, relie la caractéristique d'Euler holomorphe $\chi(S, \mathscr{O}_S)$ à la caractéristique d'Euler topologique $\chi_{\mathrm{top}}(S) := b_0(S) - b_1(S) + b_2(S) - b_3(S) + b_4(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S)$.

Théorème 1.34 (Formule de Noether). *Soit S une surface compacte connexe lisse. On a*

$$12\chi(S, \mathscr{O}_S) = \omega_S^2 + \chi_{\mathrm{top}}(S).$$

Le résultat suivant calcule la signature $(b_2(S)^+, b_2(S)^-)$ du cup-produit, étendu en une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace vectoriel réel $H^2(S, \mathbf{R})$, de dimension $b_2(S)$.

THÉORÈME 1.35 (Signature). *Soit S une surface compacte connexe lisse. On a*

$$b_2(S)^+ - b_2(S)^- = \frac{1}{3}(\omega_S^2 - 2\chi_{\mathrm{top}}(S)).$$

La formule de Wu renseigne sur la parité du cup-produit.

THÉORÈME 1.36 (Formule de Wu). *Soit S une surface compacte connexe lisse. On a*

$$\forall a \in H^2(S, \mathbf{Z}) \qquad a \smile a \equiv a \smile c_1(\omega_S) \pmod 2.$$

Enfin, le lemme suivant donne un lien entre la structure complexe de S et sa topologie.

LEMME 1.37. *Soit S une surface compacte connexe lisse. On a*

$$h^0(S, \Omega_S^1) \leqslant b_1(S).$$

DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord que toute 1-forme holomorphe ω sur S est fermée : on a

$$\int_S d\omega \wedge d\bar{\omega} = \int_S d(\omega \wedge d\bar{\omega}),$$

qui est nul par le théorème de Stokes. Le fait que ω est holomorphe signifie que l'on a $\bar{\partial}\omega = 0$, c'est-à-dire que la forme $d\omega$ est de type $(2,0)$: elle s'écrit localement $d\omega(z_1, z_2) = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$, de sorte que

$$d\omega \wedge d\bar{\omega} = |f(z_1, z_2)|^2 \, dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$$

et l'annulation de l'intégrale entraîne celle de f.

Le faisceau $\mathbf{C}_S$ des fonctions complexes localement constantes sur S admet une résolution de de Rham (*cf.* (11))

$$0 \to \mathbf{C}_S \longrightarrow \mathscr{O}_S \xrightarrow{\partial} \Omega_S^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_S^2 \to 0.$$

On peut la séparer en deux suites exactes courtes

$$0 \to \mathbf{C}_S \longrightarrow \mathscr{O}_S \xrightarrow{\partial} \mathscr{S}_S \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathscr{S}_S \to \Omega_S^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_S^2 \to 0,$$

où $\mathscr{S}_S := \operatorname{Ker}(\Omega_S^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_S^2)$ est le faisceau des 1-formes holomorphes fermées sur S.

Comme S est compacte, on a un isomorphisme $H^0(S, \mathbf{C}_S) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathscr{O}_S)$, donc une inclusion $H^0(S, \mathscr{S}_S) \subset H^1(S, \mathbf{C})$. Toute 1-forme holomorphe sur S étant fermée, on a un isomorphisme $H^0(S, \mathscr{S}_S) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \Omega_S^1)$. Ceci permet de conclure. □

On peut assez facilement déduire du lemme ([**BHPV**, Theorem IV.(2.7)] qu'on a en fait plus précisément

— $b_1(S) = h^1(S, \mathscr{O}_S) + h^0(S, \Omega_S^1)$;
— si $b_1(S)$ est pair, $b_1(S) = 2h^1(S, \mathscr{O}_S)$;
— si $b_1(S)$ est impair, $b_1(S) = 2h^1(S, \mathscr{O}_S) - 1$.

De plus, la surface S est kählérienne si et seulement si $b_1(S)$ est pair (c'est un théorème difficile, pour la preuve duquel je renvoie à [**BHPV**, Theorem IV.(3.1)]).

EXEMPLE 1.38 (Surfaces cubiques). Soit $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface (lisse) de degré 3. On a par adjonction $\omega_S = \mathscr{O}_S(-1)$ (ex. 1.5), de sorte que $\omega_S^2 = 3$. D'autre part, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-3) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3} \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow 0$$

permet de calculer

$$\chi(S,\mathscr{O}_S)=\chi(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3},\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3})-\chi(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3},\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-3))=1-\binom{0}{3}=1.$$

Elle donne aussi $h^1(S,\mathscr{O}_S)=0$, donc $b_1(S)=0$ par ce qui précède. La formule de Noether donne $\chi_{\mathrm{top}}(S)=9$, donc $b_2(S)=7$. Enfin, le th. 1.35 donne $b_2(S)^+-b_2(S)^-=\frac{1}{3}(3-18)=-5$, de sorte que $b_2(S)^+=1$ et $b_2(S)^-=6$.

Exemple 1.39 (Surfaces quartiques). Soit $S\subset\mathbf{P}^3$ une surface (lisse) de degré 4. On a par adjonction $\omega_S=\mathscr{O}_S$ (ex. 1.5). La suite exacte

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-4)\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}\longrightarrow\mathscr{O}_S\longrightarrow 0$$

permet de calculer

$$\chi(S,\mathscr{O}_S)=\chi(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3},\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3})-\chi(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3},\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-4))=1-\binom{-1}{3}=2.$$

Elle donne aussi $h^1(S,\mathscr{O}_S)=0$. La formule de Noether donne alors $\chi_{\mathrm{top}}(S)=24$. Comme S est projective, donc kählérienne, on a $b_1(S)=2h^1(S,\mathscr{O}_S)=0$, d'où $b_2(S)=22$. De plus, $b_2(S)^+-b_2(S)^-=\frac{1}{3}(-48)=-16$, de sorte que $b_2(S)^+=3$ et $b_2(S)^-=19$.

1.7. Décomposition de Hodge

Nous exposerons seulement ici (rapidement et sans preuve) les résultats de la théorie de Hodge pour les surfaces compactes connexes lisses (ceux-ci restent valables en toute dimension pour les variétés kählériennes compactes). Soit donc S une telle surface.

Si le premier nombre de S de Betti est pair, on a ([**BHPV**, Proposition IV.(2.9) et Theorem IV.(2.10)]) une décomposition

$$H^1(S,\mathbf{C})=H^{0,1}(S)\oplus H^{1,0}(S)$$

en sous-espaces vectoriels complexes, avec $H^{0,1}(S)\simeq H^1(S,\mathscr{O}_S)$, $H^{1,0}(S)\simeq H^0(S,\Omega^1_S)$ et $H^{1,0}(S)=\overline{H^{0,1}(S)}$.

De façon analogue, on a aussi ([**BHPV**, Theorem IV.(2.10)]) pour toute surface lisse compacte S une décomposition

$$H^2(S,\mathbf{C})=H^{0,2}(S)\oplus H^{1,1}(S)\oplus H^{2,0}(S) \tag{13}$$

en sous-espaces vectoriels complexes, qui est orthogonale pour le cup-produit, et où

$$H^{p,q}\simeq H^q(S,\Omega^p_S)$$

et (symétrie de Hodge)

$$H^{q,p}(S)=\overline{H^{p,q}(S)}.$$

En particulier, les sous-espaces vectoriels $H^{0,2}(S)\oplus H^{2,0}(S)$ et $H^{1,1}(S)$ sont définis sur $\mathbf{R}$.

La forme d'intersection est non dégénérée sur $H^2(S,\mathbf{R})$. Elle est définie positive sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à $H^{0,2}(S)\oplus H^{2,0}(S)$, et, *si le premier nombre de S de Betti est pair,* sa signature est $(1,h^{1,1}(S)-1)$ sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à $H^{1,1}(S)$ ([**BHPV**, Theorem IV.(2.14)]).

Corollaire 1.40. *Soit S une surface compacte connexe lisse. Les entiers ω_S^2 et $h^q(S,\Omega^p_S)$ sont tous des invariants topologiques : ils sont les mêmes pour toute surface compacte connexe lisse homéomorphe à S.*

Dans la suite exacte (5)

$$\mathrm{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(S, \mathscr{O}_S),$$

l'application α se décompose comme la composée

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \to H^2(S, \mathbf{C}) \xrightarrow{\mathrm{pr}^{0,2}} H^2(S, \mathscr{O}_S),$$

où $\mathrm{pr}^{0,2}$ est la projection sur le facteur $H^{0,2}(S)$ de la décomposition de Hodge. On en déduit que le groupe de Néron–Severi de S (*cf.* § 1.3) est l'image inverse par l'application canonique $H^2(S, \mathbf{Z}) \to H^2(S, \mathbf{Z})/\mathrm{tors}$ du groupe abélien libre

$$H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbf{Z})/\mathrm{tors}$$

(c'est le *théorème de Lefschetz sur les classes de type* $(1,1)$; *cf.* [**BHPV**, Theorem IV.(2.13)]). Le rang de sa partie libre (appelé *nombre de Picard* de S et noté $\rho(S)$) est au plus $h^{1,1}(S) = b_2(S) - 2h^2(S, \mathscr{O}_S)$.

Chapitre 2

Surfaces K3 : premières propriétés et exemples

Nous définissons ici les surfaces que nous allons étudier, nommées ainsi par André Weil en 1958 « en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire ».

2.1. Définition et exemples

DÉFINITION 2.1. *Une* surface K3 *est une surface compacte connexe lisse S dont le fibré canonique ω_S est trivial et qui vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$.*

Comme $\omega_S \simeq \Omega_S^2$, la condition que ce fibré en droites est trivial signifie qu'il existe une 2-forme holomorphe sur S qui ne s'annule nulle part. Elle est donc non dégénérée en tout point $s \in S$ (en tant que 2-forme alternée sur le plan tangent $T_{S,s}$). On dit que c'est une *forme symplectique* sur S.

EXEMPLE 2.2. On a déjà vu dans l'ex. 1.39 que toute surface quartique lisse dans $\mathbf{P}^3$ est une surface K3. Cherchons des surfaces K3 parmi les intersections complètes S de degrés $d_1, \ldots, d_n$ dans $\mathbf{P}^{n+2}$, avec $2 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ (on exclut $d_1 = 1$ car cela correspond à prendre un hyperplan, ce qui nous ramène dans $\mathbf{P}^{n-1}$). Comme $\omega_S = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^{n+2}}(-n-3+d_1+\cdots+d_n)|_S$ (th. 1.4), on doit avoir $d_1 + \cdots + d_n = n+3$, ce qui entraîne $n+3 \geqslant 2n$, soit $n \leqslant 3$. Les seules possibilités sont alors

- $n = 1$, $d = 4$: ce sont les surfaces quartiques lisses ;
- $n = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$: ce sont les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^4$ d'une quadrique et d'une cubique ;
- $n = 3$, $d_1 = d_2 = d_3 = 2$: ce sont les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^5$ de trois quadriques.

On vérifie qu'une telle intersection S satisfait $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$. C'est donc bien une surface K3. Dans chaque cas, la surface S est munie du fibré en droites très ample $\mathscr{O}_S(1)$, dont l'auto-intersection vaut respectivement 4, 6 et 8.

Avant de présenter l'exemple suivant, mentionnons quelques faits concernant les *revêtements doubles,* c'est-à-dire les morphismes finis $f\colon X \to Y$ de degré 2 entre variétés compactes lisses. Étant donné un tel morphisme, l'image directe $f_*\mathscr{O}_X$ s'écrit $\mathscr{O}_Y \oplus L^\vee$, où L est un fibré en droites sur X. Le lieu des points de Y dont l'image inverse par f n'a qu'un seul point (lieu de branchement de f) est une hypersurface lisse $B \subset Y$ et $L^{\otimes 2} \simeq \mathscr{L}_B$. On a aussi

$$\omega_X = f^*(\omega_Y \otimes L).$$

Inversement, étant donné un fibré en droites $\pi\colon L \to Y$ et une hypersurface lisse $B \in |L^{\otimes 2}|$ (de sorte que B est le lieu des zéros d'une section s de $L^{\otimes 2}$), on construit un revêtement double $f\colon X \to Y$ branché le long de B en posant

$$X := \{x \in L \mid x^{\otimes 2} = s(\pi(x))\} \tag{14}$$

et $f := \pi|_X$.

Exemple 2.3. On applique la construction précédente en prenant $Y := \mathbf{P}^2$ et $L = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, et pour B une courbe sextique plane lisse. On obtient alors un revêtement double $f\colon X \to \mathbf{P}^2$ pour lequel, par (14), le fibré canonique ω_X est trivial. On a aussi

$$H^1(X, \mathscr{O}_X) = H^1(\mathbf{P}^2, f_*\mathscr{O}_X) = H^1(\mathbf{P}^2, f_*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}) \oplus H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)) = 0,$$

de sorte que X est une surface K3. Le fibré en droites $f^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ est d'auto-intersection 2.

Exemple 2.4. Considérons la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^5) = \mathbf{P}^9$ dans son plongement de Plücker (voir § 1.2). Elle est de dimension 6 et de degré 5. Son intersection S avec trois hyperplans et une quadrique généraux est une surface lisse. Par la formule d'adjonction (ex. 1.5 et th. 1.4), on a

$$\omega_S = \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,5)}(-5+2+1+1+1)|_S = \mathscr{O}_S.$$

On vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$, de sorte que S est une surface K3. Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,5)}(1)|_S$ est très ample et son auto-intersection vaut $\deg(\mathrm{Gr}(2,5)) \cdot 2 = 10$.

De même, considérons la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^6) = \mathbf{P}^{14}$, de dimension 8 et de degré 14. Son intersection S avec six hyperplans généraux est une surface lisse et la formule d'adjonction donne

$$\omega_S = \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,6)}(-6+1+1+1+1+1+1)|_S = \mathscr{O}_S.$$

On vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$, de sorte que S est une surface K3. Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,6)}(1)|_S$ est très ample et son auto-intersection vaut $\deg(\mathrm{Gr}(2,6)) = 14$.

Ces exemples ne sont pas pris au hasard. On peut montrer qu'ils décrivent les surfaces K3 munies d'un fibré en droites ample d'auto-intersection 2, 4, 6, 8, 10 ou 14 qui sont « générales ».

2.2. Groupes de (co)homologie d'une surface K3

Soit S une surface K3. On a $b_1(S) = 0$ par le lemme 1.37.

Lemme 2.5. *Le groupe de Picard d'une surface K3 est sans torsion.*

Démonstration. Soit M un élément de torsion de $\mathrm{Pic}(S)$. On a donc $M \cdot L = 0$ pour tout fibré en droites L sur S. Le théorème de Riemann–Roch et la dualité de Serre donnent alors

$$h^0(S, M) - h^1(S, M) + h^0(S, M^{-1}) = \chi(S, M) = \chi(S, \mathscr{O}_S) = 2.$$

En particulier, soit M, soit M^{-1} a une section non nulle s. Si m est un entier strictement positif pour lequel $M^{\otimes m}$ est trivial, la section non nulle $s^{\otimes m}$ de $M^{\otimes(\pm m)} = \mathscr{O}_S$ ne s'annule nulle part, donc s non plus. Cela montre que le fibré en droites M est trivial. □

Comme $H^2(S, \mathscr{O}_S)$ est aussi sans torsion, le lemme et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathscr{O}_S)$$

issue de (5) entraînent que le groupe abélien $H^2(S, \mathbf{Z})$ est sans torsion. Le théorème des coefficients universels, qui dit que les sous-groupes de torsion de $H^q(S, \mathbf{Z})$ et de $H_{q-1}(S, \mathbf{Z})$ sont isomorphes, entraîne que $H_1(S, \mathbf{Z})$ est sans torsion, donc nul (puisque $b_1(S) = 0$). Par la dualité de Poincaré, les groupes $H^\bullet(S, \mathbf{Z})$ et $H_\bullet(S, \mathbf{Z})$ sont sans torsion.

2.3. Le réseau K3

Soit S une surface K3. La formule de Noether (th. 1.34) entraîne $\chi_{\mathrm{top}}(S) = 12\chi(S, \mathscr{O}_S) - c_1^2(S) = 24$, de sorte que, comme $b_1(S) = b_3(S) = 0$, on a $b_2(S) = 22$. Le groupe abélien $H^2(S, \mathbf{Z})$ est donc libre de rang 22.

Le cup-produit est unimodulaire (Poincaré) et pair (th. 1.36). Sa signature (sur l'espace vectoriel réel $H^2(S, \mathbf{R})$) est donnée par le th. 1.35

$$b_2(S)^+ - b_2(S)^- = \frac{1}{3}(\omega_S^2 - 2\chi_{\mathrm{top}}(S)) = -\frac{2}{3}\chi_{\mathrm{top}}(S)) = -16.$$

C'est donc $(3, 19)$. Il existe une classification des réseaux (c'est-à-dire des groupes abéliens libres de type fini munis d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs entières) pairs indéfinis unimodulaires, que nous allons rapidement expliquer (je renvoie à [**S**, ch. V] pour les preuves). Rappelons que le *plan hyperbolique* U est le groupe $\mathbf{Z}^2$ muni de la forme quadratique de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. C'est un réseau pair de signature $(1, 1)$.

On construit maintenant un réseau pair positif défini de rang 8 de la façon suivante. Soit E le sous-réseau de $\mathbf{Z}^8$ (muni de la forme quadratique de matrice I_8 dans la base canonique $(e_1, \dots, e_8)$) formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est paire, et soit E_8 le sous-groupe de $\mathbf{Q}^8$ engendré par E et le vecteur $e := \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$. On vérifie que la forme quadratique canonique sur $\mathbf{Q}^8$ prend des valeurs entières paires sur E_8 et que celui-ci est un réseau unimodulaire (cela résulte du fait que E est d'indice 2 à la fois dans $\mathbf{Z}^8$ et dans E_8) défini positif de rang 8. Dans la base de E_8 formée des vecteurs $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - \cdots - e_7 + e_8)$, $e_1 + e_2$, $e_i - e_{i-1}$, $(2 \leqslant i \leqslant 7)$, la matrice de la forme quadratique est

$$\begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}.$$

On note $E_8(-1)$ le réseau (défini négatif) obtenu en inversant le signe de la forme quadratique. Le résultat suivant est [**S**, ch. V, th. 5].

THÉORÈME 2.6. *Un réseau Λ pair indéfini unimodulaire à signature négative est isomorphe à $U^{\oplus r} \oplus E_8(-1)^{\oplus s}$, où les entiers positifs r et s sont déterminés par $r = \frac{1}{2}(\mathrm{rang}(\Lambda) - \mathrm{sign}(\Lambda))$ et $s = -\frac{1}{8}\,\mathrm{sign}(\Lambda)$.*

Il s'ensuit que pour toute surface K3 S, le réseau $(H^2(S, \mathbf{Z}), \smile)$ est isomorphe au réseau

$$\Lambda_{\mathrm{K3}} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}, \tag{15}$$

que l'on appelle le *réseau K3*.

2.4. Groupe de Picard

Soit S une surface K3. Il résulte du § 2.2 que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ (des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur S) est un groupe abélien libre de rang $\rho(S) \leqslant 2h^{1,1}(S) = b_2(S) - 2h^2(S, \mathscr{O}_S) = 20$. Toutes les valeurs entre 0 et 20 sont possibles.

Lorsque S est projective, on a $\rho(S) \geqslant 1$ et la restriction à $\mathrm{Pic}(S)$ de la forme d'intersection est non dégénérée de signature $(1, \rho(S) - 1)$ (théorème de l'indice de Hodge). C'est même une condition suffisante dans une certain sens, à cause du résultat suivant, pour la preuve duquel je renvoie à [**BHPV**, Theorem IV.(6.2)].

THÉORÈME 2.7. *Une surface compacte S est projective si et seulement s'il existe un fibré en droites L sur S tel que $L^2 > 0$.*

Lorsque la surface K3 S n'est pas projective, la restriction à $\mathrm{Pic}(S)$ de la forme d'intersection est négative (dégénérée ou pas).

EXERCICE 2.8 (Un exemple de surface K3 de nombre de Picard maximal 20). Soit $S \subset \mathbf{P}^3$ la surface quartique dite de Fermat, d'équation $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$.

(a) Montrer que S est lisse ; c'est donc une surface K3.

(b) Montrer que S contient (au moins) 48 droites $\ell_1, \ldots, \ell_{48}$.

(c) Comment montreriez-vous (en utilisant un ordinateur) que le rang $\rho(S)$ du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ est au moins 20 ?

(d) En déduire $\rho(S) = 20$.

Chapitre 3

Systèmes linéaires sur les surfaces K3

3.1. Systèmes linéaires sur les surfaces

Soit X une variété complexe, soit L un fibré en droites sur S et soit $V \subset H^0(X,L)$ un sous-ensemble. On définit le *lieu base* de V comme l'intersection schématique

$$\mathrm{Bs}(V) := \bigcap_{s \in V} \mathrm{div}(s) \subset X.$$

Supposons que V est un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On a vu dans le § 1.1 qu'il définit alors une application holomorphe

$$\varphi_V \colon X \smallsetminus \mathrm{Bs}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V^\vee).$$

Supposons X lisse et compacte et $V \neq \{0\}$. On distingue dans $\mathrm{Bs}(V)$ la *partie fixe,* c'est-à-dire le plus grand diviseur (effectif) $F := \mathrm{Fix}(V)$ contenu (en tant que schéma) dans $\mathrm{Bs}(V)$. C'est aussi le plus grand diviseur F contenu dans le diviseur de chaque élément non nul de V. On peut voir naturellement V comme un sous-espace vectoriel V' de $H^0(X, L \otimes \mathscr{L}_F^{-1})$ dont le lieu base ne contient cependant plus d'hypersurface : c'est donc un sous-ensemble de X de codimension au moins 2 et $\varphi_{V'}$ étend φ_V à $X \smallsetminus \mathrm{Bs}(V')$. On appelle $M := L \otimes \mathscr{L}_F^{-1}$ la *partie mobile* de V.

On suppose maintenant qu'on est sur une surface S compacte lisse et que $\dim(V) \geqslant 2$, de sorte que φ_V est non constant. On a alors deux cas :

— soit $\varphi_V(S)$ est une courbe (on dit que V est *composé d'un pinceau*) et un élément général de V est réunion de $\deg(\varphi_V(S))$ courbes intègres ;

— soit $\varphi_V(S)$ est une surface et un élément général de V est une courbe intègre (c'est le théorème de Bertini).

Dans les deux cas, M est *nef,* c'est-à-dire que le degré de sa restriction à toute courbe de S est positive ou nulle, et $M^2 \geqslant 0$ (avec $M^2 > 0$ dans le second cas).

On peut enfin *résoudre les indéterminations* de l'application méromorphe $\varphi_{V'} = \varphi_V \colon S \dashrightarrow \mathbf{P}(V^\vee)$ (qui n'est pas définie sur l'ensemble fini $\mathrm{Bs}(V')$) en éclatant les points de $\mathrm{Bs}(V')$ (il faut parfois faire ces éclatements plusieurs fois), pour finalement obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bl}\, S \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi_{\varepsilon^* V'}"] & \\
S \arrow[r, dashed, "\varphi_V"] & \mathbf{P}(V^\vee),
\end{tikzcd}$$

où ε est la composée d'un nombre fini d'éclatements de points.

3.2. Fibrés en droites nefs, amples et très amples

On a déjà vu au paragraphe précédent la définition suivante.

DÉFINITION 3.1 (Fibré en droites nef). *On dit qu'un fibré en droites sur une variété* projective X *est* nef *s'il est de degré positif sur toute courbe de* X.

On peut définir les fibrés en droites nefs sur une variété complexe compacte pas nécessairement projective, mais il faut procéder différemment car celle-ci peut ne contenir aucune courbe.

Un fibré en droites dont le lieu base est fini est par exemple nef. On montre qu'un fibré en droites nef L sur une surface projective vérifie $L^2 \geqslant 0$. Être nef est une *propriété numérique :* elle ne dépend que de la première classe de Chern du fibré en droites (voir (6)). C'est aussi une notion très stable : l'image inverse d'un fibré en droites nef L sur X par n'importe quel morphisme $f\colon Y \to X$ entre variétés projectives est encore nef. Cela résulte de la formule de projection : pour toute courbe C sur Y, on a $\deg(f^*L|_C) = \deg(C \to f(C)) \deg(L|_{f(C)}) \geqslant 0$ (formule de projection).

On a aussi déjà rencontré la définition suivante.

DÉFINITION 3.2 (Fibré en droites très ample). *On dit qu'un fibré en droites L sur une variété compacte X est* très ample *s'il induit un plongement fermé* $\varphi_L\colon X \hookrightarrow \mathbf{P}(H^0(X,L)^\vee)$.

Un fibré en droites très ample est nef et sa restriction à toute sous-variété reste très ample. Mais cette notion ne se comporte cepdendant pas très bien. Sa version « stable » est en revanche primordiale.

DÉFINITION 3.3 (Fibré en droites ample). *On dit qu'un fibré en droites L sur une variété compacte est* ample *s'il existe un entier $k > 0$ tel que $L^{\otimes k}$ est très ample.*

Un fibré en droites ample L est nef ; il est même de degré strictement positif sur chaque courbe. En revanche, un fibré en droites ample peut n'avoir aucune section globale non nulle (mais pas sur une surface K3 !). Être ample est aussi une propriété numérique (mais ce n'est pas évident à montrer) ; on montre aussi que l'image inverse d'un fibré en droites ample par un morphisme fini est encore ample (lorsqu'on est sur des surfaces, ces propriétés résultent de la caractérisation (iv) ci-dessous et de la formule de projection donnée ci-dessus).

L'énoncé suivant, que nous ne démontrerons pas, est un amalgame d'un théorème de Serre et du critère de Nakai–Moishezon. Comme dans le § 1.2, on dira qu'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur une variété projective X est *engendré par ses sections globales* si l'application d'évaluation

$$H^0(X,\mathscr{F}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F}$$

est surjective. C'est équivalent à dire qu'il existe un entier r et une surjection de faisceaux $\mathscr{O}_X^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}$ est un fibré en droites, c'est aussi équivalent à dire que $\mathscr{F}$ est sans point base. Le produit tensoriel de faisceaux cohérents engendrés par leurs sections globales est encore engendré par ses sections globales.

THÉORÈME 3.4. *Soit L un fibré en droites sur une surface projective S. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *L est ample ;*
(ii) *pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur S, le faisceau cohérent $\mathscr{F} \otimes L^{\otimes k}$ sur S est engendré par ses sections globales pour tout entier $k \gg 0$;*
(iii) *pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur S, on a $H^1(S,\mathscr{F} \otimes L^{\otimes k}) = H^2(S,\mathscr{F} \otimes L^{\otimes k}) = 0$ pour tout entier $k \gg 0$;*
(iv) *L est de degré strictement positif sur chaque courbe de S et vérifie $L^2 > 0$.*

COROLLAIRE 3.5. *Soient L et M des fibrés en droites amples sur une surface projective S.*

(a) *On a*

$$L \textit{ ample} \iff \exists k > 0 \quad L^{\otimes k} \textit{ ample} \iff \forall k > 0 \quad L^{\otimes k} \textit{ ample}.$$

(b) *Si L et M sont amples, on a $L \cdot M > 0$ et le fibré en droites $L \otimes M$ est ample.*

(c) *Si L est ample, le fibré en droites $L^{\otimes k} \otimes M$ est ample pour tout entier $k \gg 0$.*

Démonstration. Le point (a) résulte de la caractérisation th. 3.4(iv) des fibrés amples. Si L et M sont amples, il existe un entier $k > 0$ tel que $M^{\otimes k}$ soit très ample, donc admette une section holomorphe non nulle, de diviseur D effectif non nul. On a alors

$$L \cdot M = \frac{1}{k} L \cdot M^{\otimes k} = \frac{1}{k} L \cdot D > 0.$$

On a donc $L \cdot M > 0$, donc $(L \otimes M)^2 > 0$ et l'amplitude de $L \otimes M$ résulte alors de la caractérisation th. 3.4(iv) des fibrés amples. Ceci montre (b).

Pour $k \gg 0$, on a bien $(L^{\otimes k} \otimes M)^2 > 0$. Utiliser la caractérisation th. 3.4(iv) des fibrés amples est difficile car si on a bien $(L^{\otimes k} \otimes M) \cdot C > 0$ pour $k \gg 0$, il faudrait montrer que le même entier k convient pour toutes les courbes. Nous allons plutôt utiliser la caractérisation th. 3.4(ii). Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur S. Comme L est ample, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que $L^{\otimes k_0} \otimes M$ est engendré par ses sections globales. On a

$$\mathscr{F} \otimes (L^{\otimes (k_0+1)} \otimes M)^{\otimes k} \simeq (\mathscr{F} \otimes L^{\otimes k}) \otimes (L^{\otimes k_0} \otimes M)^{\otimes k}.$$

Pour $k \gg 0$, ce faisceau est engendré par ses sections globales puisque $\mathscr{F} \otimes L^{\otimes k}$ l'est (par amplitude de L) ainsi que $L^{\otimes k_0} \otimes M$. Le th. 3.4(ii) entraîne que $L^{\otimes (k_0+1)} \otimes M$ est ample, donc aussi $L^{\otimes \ell} \otimes M$ pour tout $\ell > k_0$ en appliquant le point (b). □

Le résultat suivant est vrai plus généralement sur toute variété projective lisse (ou faiblement singulière).

Théorème 3.6 (Annulation de Kodaira). *Pour tout fibré en droites ample L sur une surface K3 S, on a $H^0(S, L^\vee) = H^1(S, L^\vee) = 0$.*

Une surface compacte avec un fibré ample est nécessairement projective.

Démonstration. On a $H^0(S, L^\vee) = 0$, puisque $L \cdot L^\vee = -L^2 < 0$, tandis que L est de degré strictement positif sur toute courbe de S. Pour montrer l'annulation de $H^1(S, L^\vee)$, supposons tout d'abord que $|L|$ contient une courbe intègre C. Puisque $\mathscr{L}_{-C} = L^\vee$, on a une suite exacte (1)

$$0 \longrightarrow L^\vee \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_C \to 0$$

et la suite de cohomologie associée donne une suite exacte

$$0 = H^0(S, L^\vee) \to H^0(S, \mathscr{O}_S) \to H^0(C, \mathscr{O}_C) \to H^1(S, L^\vee) \to H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0.$$

Comme C est intègre, on a $H^0(C, \mathscr{O}_C) = \mathbf{C}$, de sorte que $H^1(S, L^\vee) = 0$.

Pour traiter le cas général, on remarque que puisque $h^2(S, L) = h^0(S, L^\vee) = 0$, on a par le théorème de Riemann–Roch $h^0(S, L) \geqslant \chi(S, L) = 2 + \frac{1}{2} L^2 \geqslant 3$ donc le système linéaire $|L|$ est non vide. Prenons $D \in |L|$, vu comme sous-schéma de S ; la preuve ci-dessus s'applique si l'on sait prouver $H^0(D, \mathscr{O}_D) = \mathbf{C}$.

Soit $E \leqslant D$ un sous-diviseur maximal tel que $H^0(E, \mathscr{O}_E) = \mathbf{C}$. Si $E < D$, on a $E \cdot (D - E) > 0$ [1]. Il existe donc une courbe intègre $C \leqslant D - E$ telle que $E \cdot C > 0$, donc $H^0(C, \mathscr{L}_{-E}) = 0$. Il résulte de la suite exacte longue

$$0 \to H^0(C, \mathscr{O}_C(-E)) \to H^0(E + C, \mathscr{O}_{E+C}) \to H^0(E, \mathscr{O}_E) \to 0$$

associée à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_C(-E) \to \mathscr{O}_{E+C} \to \mathscr{O}_E \to 0.$$

que l'on a $H^0(E + C, \mathscr{O}_{E+C}) = \mathbf{C}$. Cela contredit la maximalité de E, donc $E = D$ et cela termine la preuve. □

3.3. Courbes lisses et systèmes linéaires sur les surfaces K3

Notre but est d'étudier les fibrés en droites sur une surface K3 et les morphismes vers les espaces projectifs qu'ils définissent. En particulier, on essaye de caractériser les fibrés en droites amples, sans point base ou très amples (c'est-à-dire ceux qui définissent un plongement dans un espace projectif).

Un système linéaire sans point base qui n'est pas composé d'un pinceau contient une courbe lisse irréductible C (théorème de Bertini). Nous allons donc tout d'abord étudier les systèmes linéaires du type $|\mathscr{L}_C|$, avec C lisse irréductible (qui ne sont pas nécessairement amples).

La formule d'adjonction (th. 1.4) donne $\omega_C = \mathscr{L}_C|_C$, de sorte que

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}C^2.$$

En particulier, si $g(C) > 0$, la surface S est projective (th. 2.7).

Proposition 3.7. *Soit S une surface K3 et soit C une courbe lisse irréductible de genre g sur S.*

(a) *On a $h^0(S, \mathscr{L}_C) = g + 1$ et, pour $g \geqslant 1$, le fibré en droites $\mathscr{L}_C$ est sans point base, de sorte qu'il définit une application holomorphe*

$$\varphi_{\mathscr{L}_C} : S \longrightarrow \mathbf{P}^g.$$

(b) *La restriction de $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ à C est l'application canonique $\varphi_{\omega_C} : C \to \mathbf{P}^{g-1}$.*

(c) *Si $g = 2$, l'application $\varphi_{\mathscr{L}_C} : S \to \mathbf{P}^2$ est de degré 2, ramifiée au-dessus d'une courbe sextique dans $\mathbf{P}^2$.*

(d) *Si $g \geqslant 3$,*

- *soit $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est un morphisme birationnel sur son image et une courbe générale dans $|\mathscr{L}_C|$ n'est pas hyperelliptique,*
- *soit $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est de degré 2 sur son image et une courbe générale dans $|\mathscr{L}_C|$ est hyperelliptique.*

(e) *Si $g \geqslant 3$ (resp. $g = 2$), l'application $\varphi_{\mathscr{L}_C^{\otimes k}}$ est birationnelle sur son image pour $k \geqslant 2$ (resp. $k \geqslant 3$).*

---

1. On dit que D est 1-connexe. C'est une conséquence du théorème de l'indice de Hodge. Écrivons $D = D_1 + D_2$ avec D_1 et D_2 effectifs non nuls, et posons $a_i := (D \cdot D_i)/D^2 > 0$. On a $a_1 + a_2 = 1$ donc $0 < a_i < 1$. Posons $E := a_1 D - D_1$; on a $D \cdot E = 0$ donc, puisque $D^2 > 0$ et que la signature de la forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(S)$ a un seul signe positif (§ 2.4), on a $E^2 \leqslant 0$. On en déduit $D_1 \cdot D_2 = (a_1 D - E) \cdot (a_2 D + E) = a_1 a_2 D^2 - E^2 \geqslant a_1 a_2 D^2 > 0$.

Démonstration. Le théorème de Riemann–Roch donne

$$h^0(S,\mathscr{L}_C)-h^1(S,\mathscr{L}_C)+h^2(S,\mathscr{L}_C)=2+\frac{1}{2}C^2+1=g+1.$$

La dualité de Serre donne ensuite $h^2(S,\mathscr{L}_C)=h^0(S,\mathscr{L}_{-C})=0$ et $h^1(S,\mathscr{L}_C)=h^1(S,\mathscr{L}_{-C})$. Comme C est intègre, on a vu lors de la preuve du th. 3.6 l'annulation $H^1(S,\mathscr{L}_{-C})=0$. On en déduit $h^0(S,\mathscr{L}_C)=g+1$. On considère ensuite la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathscr{O}_S\xrightarrow{\cdot s_C}\mathscr{L}_C\longrightarrow \omega_C\longrightarrow 0.$$

Elle induit une suite exacte

$$0\to \mathbf{C}\xrightarrow{\cdot s_C} H^0(S,\mathscr{L}_C)\to H^0(C,\omega_C)\to H^1(S,\mathscr{O}_S)=0$$

qui montre que la restriction de $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ à C est bien l'application canonique de C vers l'hyperplan de $\mathbf{P}(H^0(S,\mathscr{L}_C)^\vee)$ défini par la section s_C. De plus, comme le système linéaire $|\omega_C|$ est sans point base, le système linéaire $\mathscr{L}_C$ n'a pas de point base sur C, donc pas de point base (puisque ceux-ci seraient nécessairement sur C). Tout ceci montre (a) et (b).

Il s'ensuit que $\varphi_{\mathscr{L}_C}(S)$ est une surface (donc que $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est génériquement fini) et que

$$2g-2=C^2=\mathscr{L}_C^2=\deg(\varphi_{\mathscr{L}_C})\deg(\varphi_{\mathscr{L}_C}(S)). \tag{16}$$

Lorsque $g=2$, le morphisme $\varphi_{\mathscr{L}_C}\colon S\to\mathbf{P}^2$ est ainsi de degré 2. C'est donc un revêtement double et son lieu de branchement est de degré 6 (ex. 2.3) et lisse (puisque S est lisse). Ceci montre (c).

Si C n'est pas hyperelliptique (donc $g\geqslant 3$), φ_{ω_C} est un plongement d'image une courbe de degré $2g-2$. On a donc (le degré d'une sous-variété de l'espace projectif est égal au degré de toute section hyperplane)

$$\deg(\varphi_{\mathscr{L}_C}(S))=\deg(\varphi_{\mathscr{L}_C}(C))=2g-2,$$

d'où on déduit, avec (16), que $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est birationnel sur son image. Une courbe lisse générale de $|\mathscr{L}_C|$ est alors non hyperelliptique, puisque son image par $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ rencontre l'ouvert dense de $\varphi_{\mathscr{L}_C}(S)$ au-dessus duquel $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est un isomorphisme. On admettra *que toute courbe lisse de* $|\mathscr{L}_C|$ *est non hyperelliptique.*

Si C est hyperelliptique, toute courbe lisse de $|\mathscr{L}_C|$ est alors hyperelliptique, d'après ce qu'on vient d'admettre. Le morphisme $\varphi_{\mathscr{L}_C}$ est donc de degré 2 au-dessus d'une section hyperplane générale de $\mathbf{P}^g$, donc est de degré 2. Ceci montre (d).

Enfin, (e) résulte du fait que les morphismes k-canoniques des courbes lisses ont des propriétés analogues. □

Partons de la situation un peu différente d'une surface K3 S avec un fibré en droites ample L. Si L est sans point base, il définit un morphisme $\varphi_L\colon S\to\mathbf{P}(H^0(S,L)^\vee)$ génériquement fini et, par le théorème de Bertini, un élément général de $|L|$ est lisse irréductible. Nous allons donner, dans les deux énoncés suivants, une condition numérique sur L nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas.

Nous ne démontrerons pas le théorème qui suit. On trouvera une preuve « classique » du point (b) dans [**SD**, Theorem 5.2] et du point (a) dans [**Hu1**, Corollary 2.3.15] (où l'auteur examine aussi le cas où la surface est définie sur un corps de caractéristique non nulle) et une preuve plus « moderne » (utilisant la « méthode de Reider », qui construit des fibrés vectoriels de rang 2 sur la surface) dans les notes [**M**, Theorem, p. 35].

THÉORÈME 3.8. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S.*

(a) *Si L a un point base, il existe un diviseur (effectif) D sur S tel que $L \cdot D = 1$ et $D^2 = 0$.*

(b) *Si L est sans point base mais n'est pas très ample et que $L^2 \geqslant 4$, il existe un diviseur (effectif) D sur S tel que*

— *soit $L \cdot D = 2$ et $D^2 = 0$,*
— *soit $L \simeq \mathscr{L}_{2D}$ et $D^2 = 2$.*

Il y a des parenthèses autour du mot « effectif » car, si M est un fibré en droites sur la surface K3 S tel que $M^2 \geqslant -2$, le théorème de Riemann–Roch et la dualité de Serre entraînent

$$\begin{aligned} h^0(S,M) + h^0(S,M^\vee) &\geqslant h^0(S,M) - h^1(S,M) + h^0(S,M^\vee) \\ &= \chi(S,M) = 2 + \frac{1}{2}M^2 > 0, \end{aligned}$$

de sorte que soit M, soit $M^\vee$ a une section non nulle. Plus précisément,

(17) pour tout fibré en droites L ample sur S, $\begin{cases} H^0(S,M) \neq 0 & \text{si } L \cdot M > 0\,; \\ H^0(S,M^\vee) \neq 0 & \text{si } L \cdot M < 0\,; \\ M \simeq \mathscr{O}_S & \text{si } L \cdot M = 0. \end{cases}$

On peut donc toujours supposer D effectif (puisque $D^2 \geqslant -2$ et $L \cdot D > 0$).

Montrons maintenant une sorte de réciproque.

PROPOSITION 3.9. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S.*

(a) *S'il existe un diviseur (effectif) D sur S tel que $L \cdot D = 1$ et $D^2 = 0$, le système linéaire L a une composante fixe.*

(b) *Si L est sans point base mais qu'il existe un diviseur (effectif) D sur S tel que $L \cdot D = 2$ et $D^2 = 0$, le morphisme φ_L est de degré 2 sur son image.*

DÉMONSTRATION. Posons $g := \frac{1}{2}L^2 + 1$, de sorte que $g \geqslant 2$ et $h^0(S,L) = g + 1$.

Pour montrer (a), on considère le fibré en droites $L(-gD)$. On a

$$(L(-gD))^2 = 2g - 2 - 2g = -2.$$

Comme $L \cdot L(-gD) = 2g - 2 - g = g - 2 \geqslant 0$, on déduit de (17) que $L(-gD)$ a une section non nulle. Dans ce cas, comme $h^0(S,\mathscr{L}_D) \geqslant 2$ (Riemann–Roch) donc $h^0(S,\mathscr{L}_{gD}) \geqslant g+1$, on en déduit que $L(-gD)$ est fixe dans L. Ceci montre (a).

Montrons (b). Comme L est sans point base, un élément général de $|L|$ est une courbe irréductible lisse C. Si $g = 2$, la conclusion est claire puisque $L^2 = 2$ et φ_L est à valeurs dans $\mathbf{P}^2$. Si $g \geqslant 3$, on a $h^0(S,\mathscr{L}_D) \geqslant 2$ (théorème de Riemann–Roch) et, puisque $L \cdot (\mathscr{L}_D \otimes L^\vee) = 4 - 2g < 0$, on a $H^0(S, \mathscr{L}_D \otimes L^\vee) = 0$ (une section non nulle aurait un diviseur effectif dont l'intersection avec le fibré ample L serait positive). La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_D \otimes L^\vee \longrightarrow \mathscr{L}_D \longrightarrow \mathscr{L}_D|_C \longrightarrow 0$$

entraîne $h^0(C, \mathscr{L}_D|_C) \geqslant 2$. Comme le fibré en droites $\mathscr{L}_D$ est de degré 2 sur la courbe C, celle-ci est hyperelliptique et φ_L est de degré 2 sur son image. □

COROLLAIRE 3.10. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S. Le fibré en droites $L^{\otimes k}$ est sans point base pour $k \geqslant 2$ et est très ample pour $k \geqslant 3$.*

3.4. Structure des surfaces K3 polarisées de bas degré

THÉORÈME 3.11. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S.*

(a) *Si $L^2 = 2$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D = 1$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^2$ est un revêtement double.*

(b) *Si $L^2 = 4$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2\}$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^3$ induit un isomorphisme sur une quartique.*

(c) *Si $L^2 = 6$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2\}$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^4$ induit un isomorphisme sur l'intersection d'une quadrique et d'une cubique.*

(d) *Si $L^2 = 8$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2, 3\}$, alors soit $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^5$ induit un isomorphisme sur l'intersection de trois quadriques, soit φ_L est un revêtement double d'une surface de Veronese.*

(e) *Si $L^2 = 10$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2, 3\}$, ou bien $D^2 = 2$ et $L \cdot D = 5$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^6$ induit un isomorphisme sur une variété obtenue comme l'intersection dans $\mathbf{P}^{10}$ d'un cône sur la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2, 5) \subset \mathbf{P}^9$ dans son plongement de Plücker, d'une quadrique et d'un espace linéaire $\mathbf{P}^6 \subset \mathbf{P}^{10}$.*

Montrons par exemple le cas (c). Il ressort du th. 3.8 que L est très ample. L'image $\varphi_L(S)$ est donc une surface de degré 6 dans $\mathbf{P}^4$. On considère, comme dans l'ex. 1.24, les applications canoniques

$$\mathrm{Sym}^2 H^0(S, L) \longrightarrow H^0(C, L^{\otimes 2}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sym}^3 H^0(C, L) \longrightarrow H^0(C, L^{\otimes 3})$$

Le théorème de Riemann–Roch et l'annulation de $h^1(S, L^{\otimes 2})$ et de $h^1(S, L^{\otimes 3})$ (annulation de Kodaira) entraînent $h^0(C, L^{\otimes 2}) = 14$ et $h^0(C, L^{\otimes 3}) = 29$. On en déduit que S est contenue dans une quadrique irréductible unique et dans une cubique ne la contenant pas. C'est donc l'intersection de ces deux hypersurfaces.

Le point (e) est plus délicat (on pourra consulter Mukai, S., Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I,* 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988).

Chapitre 4

Cône ample d'une surface K3

4.1. Un peu de géométrie Lorentzienne

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n+1>0$ muni d'une forme quadratique non dégénérée de signature $(1,n)$ (on pensera par exemple à l'espace vectoriel $\mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbf{R}$, où S est une surface K3 projective). Le cône

$$\{x \in V \mid x^2 > 0\}$$

a deux composantes connexes opposées $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$. Dans une base de V dans laquelle la forme quadratique s'écrit $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$, les deux composantes correspondent aux deux signes possibles de x_0 (qui est non nul si $x^2 > 0$).

Si $x \in \mathscr{P}^+$ et $y \in \overline{\mathscr{P}^+} \smallsetminus \{0\}$, on a $x \cdot y > 0$ (il suffit pour cela de prendre $e_0 = x/\sqrt{x^2}$: on a alors $x \cdot y = x^2 y_0$) et donc $x \cdot y < 0$ si $y \in \overline{\mathscr{P}^-} \smallsetminus \{0\}$: *l'hyperplan* $x^\perp$ *sépare les deux composantes du cône.* On peut aussi dire que si $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, alors x et y sont dans la même composante connexe si et seulement si $x \cdot y > 0$.

4.2. Caractérisation du cône ample

Soit S une surface K3 projective. Rappelons que les plongements de S dans des espaces projectifs sont gouvernés par les fibrés amples sur S. On cherche donc à décrire les classes de fibrés en droites amples sur S, ou encore le *cône ample* de S, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathrm{Amp}(S) &:= \{\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r \mid r > 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}_{>0}, L_1, \ldots, L_r \text{ amples}\}\\ &\subset \mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Lemme 4.1. *Si S est une surface projective, le cône* $\mathrm{Amp}(S)$ *est un ouvert convexe non vide et les classes amples sont exactement les points de* $\mathrm{Amp}(S) \cap \mathrm{Pic}(S)$.

Le cône $\mathrm{Amp}(S)$ *est contenu dans une composante connexe* $\mathrm{Pos}(S)$ *du cône* $\{x \in \mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbf{R} \mid x^2 > 0\}$ *qu'on appelle le* cône positif *de S. Pour toute classe ample H, on a*

$$\mathrm{Pos}(S) = \{x \in \mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbf{R} \mid x^2 > 0, x \cdot H > 0\}.$$

Démonstration. Soit $(M_1, \ldots, M_{\rho(S)})$ une base de l'espace vectoriel réel $\mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbf{R}$ constituée d'éléments de $\mathrm{Pic}(S)$ et soit $x = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r \in \mathrm{Amp}(S)$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$. Par le cor. 3.5(c), il existe un entier $k \gg 0$ tel que les fibrés en droites $L_1^{\otimes k} \otimes M_i$ soient amples pour tout $i \in \{1, \ldots, \rho(S)\}$. Pour $\mu_1, \ldots, \mu_{\rho(S)} \geqslant 0$, la classe

$$x + \mu_1 M_1 + \cdots + \mu_{\rho(S)} M_{\rho(S)} = \Big(\lambda_1 - k \sum_{i=1}^{\rho(S)} \mu_i\Big) L_1 + \sum_{i=1}^{\rho(S)} \mu_i (k L_1 + M_i) + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_r L_r$$

est encore dans $\mathrm{Amp}(S)$ pour $\sum_{i=1}^{\rho(S)} \mu_i < \lambda_1/k$. En remplaçant les classes M_i par $\pm M_i$, on voit qu'une boule centrée en x est contenue dans $\mathrm{Amp}(S)$, qui est donc ouvert.

Pour toute classe ample H sur S et tout $x = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r \in \mathrm{Amp}(S)$, on a $x \cdot H = \lambda_1 x L_1 \cdot H + \cdots + \lambda_r L_r \cdot H > 0$, donc les énoncés du deuxième paragraphe du lemme résultent du § 4.1.

Enfin, il est clair que les classes amples sont dans $\mathrm{Amp}(S) \cap \mathrm{Pic}(S)$. Inversement, tout point de cette intersection est la classe d'un fibré en droites L qui s'écrit $L = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r$ dans $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R}$. On a donc $L^2 > 0$ (puisque $\mathrm{Amp}(S) \subset \mathrm{Pos}(S)$) et $L \cdot C > 0$ pour toute courbe C sur S, donc L est ample (th. 3.4(iv)). $\square$

Quelle est la différence entre les cônes $\mathrm{Amp}(S)$ et $\mathrm{Pos}(S)$? Si $L \in \mathrm{Pos}(S) \cap \mathrm{Pic}(S)$, le th. 3.4 entraîne que L est ample si et seulement si

$$L \cdot C > 0$$

pour toute courbe irréductible C sur S. Nous allons montrer qu'on peut simplifier cette condition. Soit $C \subset S$ une courbe intègre. Comme dans la preuve du th. 3.6, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_{-C} \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow 0$$

fournit (avec la dualité de Serre) $h^1(S, \mathscr{L}_{-C}) = h^1(S, \mathscr{L}_C) = 0$ et $g(C) = h^1(C, \mathscr{O}_C) = h^2(S, \mathscr{L}_{-C}) - 1 = h^0(S, \mathscr{L}_C) - 1$. Le théorème de Riemann–Roch entraîne $g(C) = \frac{1}{2}C^2 + 1$ (on avait déjà vu cette formule lorsque C est lisse). On a donc

$$h^0(S, \mathscr{L}_C) = 1 \iff C^2 < 0 \iff C^2 = -2 \iff C \text{ courbe rationnelle lisse.} \tag{18}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} \Delta &:= \{M \in \mathrm{Pic}(S) \mid M^2 = -2\}, \\ \Delta^+ &:= \{M \in \Delta \mid H^0(S, M) \neq 0\}, \end{aligned} \tag{19}$$

de sorte que $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ (*cf.* (17)). Si L est ample et $M \in \Delta$, on a $M \in \Delta^+$ si et seulement si $L \cdot M > 0$.

Par (18), l'ensemble Δ^+ contient les classes de toutes les courbes rationnelles lisses situées sur S (il se peut qu'il n'y en ait aucune) mais peut aussi parfois contenir d'autres classes. Par exemple, si C_1 et C_2 sont des courbes rationnelles lisses sur S se coupant transversalement en un point, on a $C_1 \cdot C_2 = 1$ et $C_1 + C_2 \in \Delta^+$. Si $M \in \Delta^+$, la partie fixe F de $|M|$ est non vide (sinon, M serait nef) et toute composante irréductible C de F satisfait $h^0(S, \mathscr{L}_C) = 1$, de sorte que C est une courbe rationnelle lisse par (18).

Théorème 4.2. *Soit S une surface K3 projective. On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Amp}(S) &= \{x \in \mathrm{Pos}(S) \mid \forall M \in \Delta^+ \quad x \cdot M > 0\} \\ &= \{x \in \mathrm{Pos}(S) \mid \forall C \subset S \text{ courbe rationnelle lisse} \quad x \cdot C > 0\}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a des inclusions

$$\begin{aligned} \mathrm{Amp}(S) &\subset \{x \in \mathrm{Pos}(S) \mid \forall M \in \Delta^+ \quad x \cdot M > 0\} \\ &\subset \{x \in \mathrm{Pos}(S) \mid \forall C \subset S \text{ courbe rationnelle lisse} \quad x \cdot C > 0\}. \end{aligned}$$

Comme les points de $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{Q}$ sont denses dans tous ces ensembles, il suffit de montrer que si x est un point de $\mathrm{Pos}(S) \cap (\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{Q})$ dont l'intersection avec toute courbe rationnelle lisse est strictement positive, alors il est dans $\mathrm{Amp}(S)$. On peut supposer x entier, auquel cas c'est la classe d'un fibré en droites L sur S. Il faut montrer que L est ample c'est-à-dire, par la caractérisation du th. 3.4(iv), que son intersection avec toute courbe irréductible $C \subset S$ est strictement positive.

Si $C^2 \geqslant 0$, on a $C \in \overline{\mathrm{Pos}(S)} \smallsetminus \{0\}$ et l'inégalité $L \cdot C > 0$ résulte du § 4.1.

Si $C^2 = -2$, la courbe C est une courbe rationnelle lisse par (18). On a donc bien $L \cdot C > 0$ par hypothèse. □

REMARQUE 4.3 (Cône de Kähler). La « plupart » des surfaces K3 S ne sont pas projectives (cor. 6.13), c'est-à-dire qu'elles ne portent aucune classe ample ($\mathrm{Amp}(S) = \varnothing$). En revanche, elles sont toutes kählériennes (puisque $b_1(S) = 0$ est pair ; *cf.* § 1.6.2) : $H^2(S, \mathbf{R})$ contient donc des *classes de Kähler,* c'est-à-dire des classes de 2-formes alternées non dégénérées réelles fermées positives de type $(1, 1)$.

Dans l'espace vectoriel réel $H^2(S, \mathbf{R}) \cap H^{1,1}(S)$, les classes de Kähler de S forment un cône convexe ouvert $\mathrm{Kah}(S)$ contenu dans une des deux composantes connexes du cône des classes de carré strictement positif qu'on appelle encore le cône positif $\mathrm{Pos}(S)$ de S. Les classes de Kähler entières sont exactement les classes de fibrés en droites amples sur S (théorème de Kodaira). On a donc $\mathrm{Amp}(S) \subset \mathrm{Kah}(S)$ et le sous-cône convexe $\mathrm{Amp}(S)$ est engendré par les points entiers de $\mathrm{Kah}(S)$.

4.3. Chambres et murs

Nous allons étudier la situation décrite dans le paragraphe précédent d'un point de vue plus « abstrait » (en oubliant provisoirement la surface K3). On part donc d'un réseau Λ de signature $(1, n)$ (penser au réseau de Picard d'une surface K3 projective) et on *choisit* une composante connexe $\mathscr{P}$ du cône

$$\{x \in \Lambda \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0\}$$

qu'on appelle le *cône positif.*

On note $\mathrm{O}(\Lambda)$ le groupe des isométries de Λ et $O^+(\Lambda)$ le sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{O}(\Lambda)$ des isométries qui préservent $\mathscr{P}$.

DÉFINITION 4.4. (a) On appelle *racine* du réseau Λ tout élément δ de Λ tel que $\delta^2 = -2$. On note Δ l'ensemble des racines de Λ.

(b) Le *mur* associé à une racine δ est $\delta^\perp \cap \mathscr{P}$.

(c) Une *chambre* de $\mathscr{P}$ est une composante connexe de $\mathscr{P} \smallsetminus \bigcup_{\delta \in \Delta} \delta^\perp$.

L'ensemble Δ peut être vide ; il est bien sûr stable par l'involution $\delta \mapsto -\delta$. Lorsque $n \geqslant 1$, aucun mur n'est vide : le mur $\delta^\perp \cap \mathscr{P}$ est un cône positif pour le réseau $\delta^\perp$, de signature $(1, n-1)$.

Une chambre de $\mathscr{P}$ est déterminée par la suite des signes des $x \cdot \delta$, pour $\delta \in \Delta$. En d'autres termes, des éléments x et y de $\mathscr{P}$ sont dans la même chambre si et seulement si $(x \cdot \delta)(y \cdot \delta) > 0$ pour tout $\delta \in \Delta$. Ou encore, une chambre est définie par le choix d'un ensemble Δ^+ de racines dites positives tel que $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ (en demandant $x \cdot \delta > 0$ pour tout $\delta \in \Delta^+$). Par exemple, le cône ample d'une surface K3 projective est une chambre de son réseau de Picard (th. 4.2).

PROPOSITION 4.5. (a) *Pour toute racine $\delta \in \Delta$, la réflexion*

$$s_\delta \colon x \longmapsto x + (x \cdot \delta)\delta$$

(par rapport à l'hyperplan $\delta^\perp$) est dans $O^+(\Lambda)$.

(b) *Le sous-groupe $W(\Lambda)$ de $O^+(\Lambda)$ engendré par les $(s_\delta)_{\delta \in \Delta}$ est distingué dans $O(\Lambda)$. On l'appelle le* groupe de Weyl *de Λ.*

(c) *Le groupe $W(\Lambda)$ agit sur la réunion des murs et librement et transitivement sur l'ensemble des chambres.*

DÉMONSTRATION. Le point (a) résulte des relations $(s_\delta(x))^2 = x^2 > 0$ et $s_\delta(x)\cdot x = x^2+(x\cdot\delta)^2 > 0$ si $x \in \mathscr{P}$, et du § 4.1.

Le point (b) résulte de l'égalité

$$\forall g \in \mathrm{O}(\Lambda) \qquad g \circ s_\delta \circ g^{-1} = s_{g(\delta)}. \tag{20}$$

Pour le point (c), soient δ et δ' des racines. Si $x \in \delta^\perp \cap \mathscr{P}$, on a $s_{\delta'}(x) \in \mathscr{P}$ par (a), et $s_{\delta'}(x)\cdot s_{\delta'}(\delta) = x\cdot\delta = 0$, donc $s_{\delta'}(x) \in s_{\delta'}(\delta)^\perp$. On a donc $s_{\delta'}(\delta^\perp \cap \mathscr{P}) = s_{\delta'}(\delta)^\perp \cap \mathscr{P}$, ce qui montre que $W(\Lambda)$ agit sur la réunion des murs, donc sur l'ensemble des chambres.

Nous aurons besoin du résultat suivant.

LEMME 4.6. *La réunion $\bigcup_{\delta\in\Delta}(\delta^\perp \cap \mathscr{P})$ des murs est localement finie, donc fermée, dans $\mathscr{P}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $h \in \mathscr{P}$. Nous allons montrer que seul un nombre fini de murs rencontrent un petit voisinage de h. Complétons $h/\sqrt{h^2}$ en une base de $\Lambda\otimes\mathbf{R}$ dans laquelle la forme quadratique de Λ s'écrit $(x_0,x')^2 = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$ (où on écrit les éléments $\Lambda\otimes\mathbf{R}$ sous la forme $x = (x_0, x')$, avec $x' = (x_1,\dots,x_n)$) et $x \in \mathscr{P}$ si et seulement si $x_0 > \|x'\| \geqslant 0$.

Si $\delta = (\delta_0, \delta') \in \Delta$, on a donc $\delta_0^2 - \|\delta'\|^2 = -2$, d'où $\|\delta'\| \leqslant |\delta_0| + 2$.

Si $x \in \delta^\perp \cap \mathscr{P}$, on a $x_0\delta_0 = x'\cdot\delta'$ et, par Cauchy–Schwarz,

$$|x_0\delta_0| \leqslant \|x'\|\cdot\|\delta'\| \leqslant \|x'\|\cdot(|\delta_0|+2),$$

de sorte que

$$|\delta_0|(x_0 - \|x'\|) \leqslant 2\|x'\|.$$

Lorsque x s'approche de h, alors x' tend vers 0 et x_0 tend vers $\sqrt{h^2}$, donc δ_0 tend vers 0 et δ' reste borné. Comme Λ est discret (et $\delta \in \Lambda$), x ne peut rencontrer qu'un nombre fini de murs dans un voisinage de h. $\square$

Soit $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{P}$ une chambre et soit $\Delta_{\mathscr{C}_0} \subset \Delta$ l'ensemble des racines δ telles que $\delta^\perp \cap \mathscr{P}$ soit un mur de codimension 1 de $\mathscr{C}_0$.

LEMME 4.7. *Soient $\delta_1,\dots,\delta_r \in \Delta_{\mathscr{C}_0}$. On pose, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$,*

$$\mathscr{C}_i := s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}(\mathscr{C}_0).$$

Pour tout $i \in \{0,\dots,r-1\}$, les chambres $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_{i+1}$ sont adjacentes : elles sont séparées par le mur $(s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i})(\delta_{i+1}^\perp \cap \mathscr{P})$, de codimension 1.

DÉMONSTRATION. On montre facilement, à partir de (20), la formule

$$s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}\circ s_{\delta_{i+1}} = s_{s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1})}\circ s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}$$

par récurrence sur i. En l'appliquant à $\mathscr{C}_0$, on obtient

$$\mathscr{C}_{i+1} = s_{s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1})}(\mathscr{C}_i), \tag{21}$$

c'est-à-dire que $\mathscr{C}_{i+1}$ est la réflexion de $\mathscr{C}_i$ par rapport au mur $(s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i})(\delta_{i+1}^\perp \cap \mathscr{P})$, qui est bien de codimension 1 comme mur de $\mathscr{C}_i$, puisque $\delta_{i+1}^\perp \cap \mathscr{P}$ est un mur de codimension 1 de $\mathscr{C}_0$. Ceci prouve le lemme. $\square$

Le lemme suivant entraîne que $W(\Lambda)$ agit bien transitivement sur l'ensemble des chambres.

LEMME 4.8. *Le sous-groupe $W_{\mathscr{C}_0}$ de $W(\Lambda)$ engendré par les $(s_\delta)_{\delta\in\Delta_{\mathscr{C}_0}}$ agit transitivement sur l'ensemble des chambres et on a en fait $W_{\mathscr{C}_0} = W(\Lambda)$.*

DÉMONSTRATION. On peut connecter $\mathscr{C}_0$ à n'importe quelle autre chambre par un chemin dans $\mathscr{P}$ qui ne passe d'une chambre à l'autre qu'en traversant des murs de codimension 1 et qui, par le lemme 4.6, ne traverse qu'un nombre fini de chambres et de murs. On obtient donc des chambres $\mathscr{C}_0, \dots, \mathscr{C}_r$ telles que $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_{i+1}$ ne sont séparées que par un mur $\mu_{i+1}^\perp \cap \mathscr{P}$, de codimension 1. En particulier, $s_{\mu_{i+1}}(\mathscr{C}_i) = \mathscr{C}_{i+1}$. On définit par récurrence sur i des éléments $\delta_1, \dots, \delta_r$ de Δ par les formules

$$\forall i \in \{0, \dots, r-1\} \qquad s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1}) = \mu_{i+1}.$$

En comparant $\mathscr{C}_{i+1} = s_{\mu_{i+1}}(\mathscr{C}_i) = s_{s_{\delta_1}\circ\cdots\circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1})}(\mathscr{C}_i)$ avec (21), on voit que $\mathscr{C}_i = s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}(\mathscr{C}_0)$ pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$. Comme $\mu_{i+1} \in \Delta_{\mathscr{C}_i} = s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}(\Delta_{\mathscr{C}_0})$, on a aussi $\delta_{i+1} \in \Delta_{\mathscr{C}_0}$ pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$. La composée $s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_r}$ est donc bien dans $\Delta_{\mathscr{C}_0}$ et envoie $\mathscr{C}_0$ sur $\mathscr{C}_r$. Le groupe $W_{\mathscr{C}_0}$ agit donc bien transitivement sur l'ensemble des chambres

Montrons maintenant $W_{\mathscr{C}_0} = W(\Lambda)$. Soit δ une racine. Par le lemme 4.6, il existe une chambre $\mathscr{C}_1$ pour laquelle $\delta^\perp \cap \mathscr{P}$ est un mur de codimension 1, c'est-à-dire $\delta \in \Delta_{\mathscr{C}_1}$. Il existe alors $g \in W_{\mathscr{C}_0}$ tel que $g(\mathscr{C}_0) = \mathscr{C}_1$, de sorte que $g(\Delta_{\mathscr{C}_0}) = \Delta_{\mathscr{C}_1}$. Il existe donc $\delta' \in \Delta_{\mathscr{C}_0}$ tel que $g(\delta') = \delta$. On a alors

$$s_\delta = s_{g(\delta')} = g \circ s_{\delta'} \circ g^{-1},$$

ce qui termine la preuve, puisque g et $s_{\delta'}$ sont dans $W_{\mathscr{C}_0}$. □

On peut maintenant finir la preuve de la proposition en montrant que l'action de $W(\Lambda)$ sur l'ensemble des chambres est libre. Il s'agit de montrer que si $g \in W(\Lambda)$ laisse stable une chambre $\mathscr{C}_0$, alors $g = \mathrm{Id}$. Par le lemme 4.8, on a $g \in W_{\mathscr{C}_0}$ et on écrit $g = s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_r}$, avec $\delta_i \in \Delta_{\mathscr{C}_0}$ et r *minimal.* On définit comme dans le lemme 4.7 des chambres $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_r$; on a en particulier $\mathscr{C}_r = g(\mathscr{C}_0) = \mathscr{C}_0$.

Si $r \geqslant 1$, on a $r \geqslant 2$ (puisque $s_{\delta_1}(\mathscr{C}_0) \neq \mathscr{C}_0$). On construit un lacet partant (et arrivant) dans $\mathscr{C}_0$ qui traverse successivement les murs $s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1}^\perp \cap \mathscr{P})$ séparant $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_{i+1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Comme le lacet revient à son point de départ, tous les hyperplans qu'il traverse le sont un nombre pair de fois. Il existe donc $i \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que $\delta_1^\perp = s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}(\delta_{i+1}^\perp)$.

Si on pose $g' := s_{\delta_1} \circ \cdots \circ s_{\delta_i}$, on a $\delta_1^\perp = g'(\delta_{i+1})^\perp$, donc $s_{\delta_1} = s_{g'(\delta_{i+1})}$. On en déduit

$$g' \circ s_{\delta_{i+1}} = s_{g'(\delta_{i+1})} \circ g' = s_{\delta_1} \circ g' = s_{\delta_2} \circ \cdots \circ s_{\delta_i},$$

soit

$$g = g' \circ s_{\delta_{i+1}} \circ \cdots \circ s_{\delta_r} = s_{\delta_2} \circ \cdots \circ s_{\delta_i} \circ s_{\delta_{i+2}} \circ \cdots \circ s_{\delta_r},$$

ce qui contredit la minimalité de r. On a donc $r = 0$ et $g = \mathrm{Id}$. □

COROLLAIRE 4.9. *Pour toute chambre $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}$, l'adhérence $\overline{\mathscr{C}} \cap \mathrm{Pos}(X)$ est un domaine fondamental pour l'action de $W(\Lambda)$ sur $\mathrm{Pos}(X)$, dans le sens où*

$$\mathrm{Pos}(X) = \bigcup_{g\in W(\Lambda)} g(\overline{\mathscr{C}} \cap \mathrm{Pos}(X)),$$

et $g(\overline{\mathscr{C}} \cap \mathrm{Pos}(X)) \cap g'(\overline{\mathscr{C}} \cap \mathrm{Pos}(X))$ est un convexe d'intérieur vide si $g \neq g'$.

4.4. Structure du cône ample

On revient maintenant au cas d'une surface K3 projective S et de son réseau de Picard $\Lambda := \mathrm{Pic}(S)$, de signature $(1, \rho(S) - 1)$. On choisit comme cône positif $\mathscr{P}$ le cône $\mathrm{Pos}(S)$ défini dans le § 4.2. Le th. 4.2 dit alors que le cône ample $\mathrm{Amp}(S)$ est une *chambre de* $\mathscr{P}$.

Proposition 4.10. *Soit S une surface K3 projective.*

(a) *Chaque courbe rationnelle lisse $C \subset S$ définit un mur $C^\perp \cap \mathrm{Pos}(S)$ de codimension 1 de* $\mathrm{Amp}(S)$ *et tous les murs de codimension 1 de* $\mathrm{Amp}(S)$ *sont obtenus de cette façon.*

(b) *Pour chaque $x \in \mathrm{Pos}(S)$, il existe des courbes rationnelles lisses $C_1, \ldots, C_r \subset S$ telles que $s_{C_1} \circ \cdots \circ s_{C_r}(x) \in \overline{\mathrm{Amp}(S)}$. Si de plus $x \cdot \delta \neq 0$ pour toute classe $\delta \in \mathrm{Pic}(S)$ telle que $\delta^2 = -2$, on a $s_{C_1} \circ \cdots \circ s_{C_r}(x) \in \mathrm{Amp}(S)$.*

Démonstration. Le th. 4.2 dit que le cône ample est défini dans $\mathrm{Pos}(S)$ par les conditions $x \cdot C > 0$ pour toute courbe rationnelle lisse $C \subset S$. Soit $\delta^\perp \cap \mathrm{Amp}(S)$ un mur de codimension 1 de $\mathrm{Amp}(S)$. Si $\delta \neq \pm C$ pour toute courbe rationnelle lisse $C \subset S$, il existe des points x de part et d'autre du mur pour lesquels tous les signes des $x \cdot C$ restent les mêmes, c'est-à-dire positifs. C'est absurde, donc le mur est bien défini par une courbe rationnelle lisse.

Inversement, une telle courbe C définit bien un mur de codimension 1 : si $h \in \mathrm{Amp}(S)$ est une classe ample, considérons la classe $x = 2h + (h \cdot C)C$. Elle est dans $C^\perp$ et on a donc $0 < x \cdot h = \frac{1}{2}x^2$, donc $x \in C^\perp \cap \mathrm{Pos}(S)$. Pour toute autre courbe rationnelle lisse $C' \subset S$, on a $x \cdot C' = 2(h \cdot C') + (h \cdot C)(C \cdot C') > 0$. En utilisant le lemme 4.6, on en déduit que tout un voisinage de x dans $C^\perp$ est donc contenu dans $\overline{\mathrm{Amp}(S)}$. Ceci montre donc (a).

Montrons (b). Il résulte du lemme 4.8 que le groupe de Weyl $W(\Lambda)$ est égal à $W_{\mathrm{Amp}(S)}$. Par (a) et cor. 4.9, il existe donc des courbes rationnelles lisses $C_1, \ldots, C_r \subset S$ telles que $s_{C_1} \circ \cdots \circ s_{C_r}(x) \in \overline{\mathrm{Amp}(S)}$. Si de plus $x \cdot \delta \neq 0$ pour toute racine δ, la classe $s_{C_1} \circ \cdots \circ s_{C_r}(x)$ n'est sur aucun mur : elle est donc ample par le th. 4.2. $\square$

Chapitre 5

Théorème de Torelli et automorphismes des surfaces K3

5.1. Le théorème de Torelli

Si S est une surface K3, rappelons qu'on a une décomposition de Hodge (*cf.* (13))

$$H^2(S, \mathbf{C}) = H^{0,2}(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^{2,0}(S) \quad \text{avec} \quad H^{q,p}(S) = \overline{H^{p,q}(S)}. \tag{22}$$

De plus, l'espace vectoriel complexe $H^2(S, \mathbf{C})$ est munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée entière sur le réseau $H^2(S, \mathbf{Z})$ pour laquelle la décomposition de Hodge est orthogonale. Notons que cette décomposition est entièrement déterminée par la droite complexe $H^{2,0}(S) \subset H^2(S, \mathbf{C})$: on retrouve $H^{0,2}(S)$ comme son conjugué et $H^{1,1}(S)$ comme l'orthogonal de $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S)$.

Étant donné un groupe abélien libre de type fini Λ, on appelle *structure de Hodge* (entière de poids 2) sur Λ une décomposition de l'espace vectoriel complexe $\Lambda_{\mathbf{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ satisfaisant les conditions de (22). Cette structure de Hodge est dite *polarisée* s'il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée entière sur Λ (qui fait donc de Λ un réseau) pour laquelle cette décomposition est orthogonale (il faut imposer aussi des conditions sur la signature de cette forme mais nous n'aurons pas besoin de les préciser).

Un *isomorphisme de structures de Hodge* entre des structures de Hodge sur des groupes abéliens libres de type fini Λ et Λ' est un isomorphisme $\varphi \colon \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda'$ dont le complexifié $\varphi_{\mathbf{C}} \colon \Lambda_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\sim} \Lambda'_{\mathbf{C}}$ respecte les décompositions de Hodge. Il suffit pour cela que $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(\Lambda_{\mathbf{C}})) = H^{2,0}(\Lambda'_{\mathbf{C}})$. Cet isomorphisme est un *isomorphisme de structures de Hodge polarisées* (ou une *isométrie de Hodge*) si φ est une isométrie entre les réseaux Λ et Λ'.

Notre exemple principal est le suivant : si $u \colon S' \xrightarrow{\sim} S$ est un isomorphisme entre des surfaces K3 S et S', l'application induite

$$u^* \colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S', \mathbf{Z})$$

est une isométrie de Hodge. Cet isomorphisme a une propriété supplémentaire : il envoie le cône de Kähler de S dans le cône de Kähler de S' et le cône ample de S dans le cône ample de S' (*cf.* § 4.2). Le théorème de Torelli dit que la réciproque est vraie.

Théorème 5.1 (Théorème de Torelli). *Des surfaces K3 S et S' sont isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge $\varphi \colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S', \mathbf{Z})$.*

De plus, il existe un isomorphisme $u \colon S' \xrightarrow{\sim} S$ tel que $\varphi = u^*$ si et seulement si $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Kah}(S)) \cap \mathrm{Kah}(S') \neq \varnothing$.

Dans la seconde partie du théorème, l'isomorphisme φ est nécessairement unique par le th. 5.2.

Lorsque S est projective, la condition $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Kah}(S)) \cap \mathrm{Kah}(S') \neq \varnothing$ est équivalente à $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Amp}(S)) \cap \mathrm{Amp}(S') \neq \varnothing$ (ainsi qu'aux égalités $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Kah}(S)) = \mathrm{Kah}(S')$ et $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Amp}(S)) = \mathrm{Amp}(S')$).

Pour une preuve moderne de ce théorème, je renvoie à [**Hu1**].

5.2. Représentations orthogonales du groupe des automorphismes

Le théorème de Torelli pour les surfaces K3 peut servir à déterminer leur groupe d'automorphismes. Soit S une surface K3. Tout automorphisme de S agit par isométries sur $H^2(S, \mathbf{Z})$. Si $\mathrm{Aut}(S)$ est le groupe des automorphismes (biholomorphes) de S, on obtient ainsi une représentation

$$\Psi_S \colon \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{O}(H^2(S, \mathbf{Z}), \smile).$$

Le théorème de Torelli (th. 5.1) dit que l'image de ce morphisme consiste en les isométries φ de $H^2(S, \mathbf{Z})$ telles que

- $\varphi_{\mathbf{C}}$ préserve la droite complexe $H^{2,0}(S) \subset H^2(S, \mathbf{C})$;
- $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Kah}(S)) \cap \mathrm{Kah}(S) \neq \varnothing$ (lorsque S est projective, cette condition est équivalente à $\varphi_{\mathbf{C}}(\mathrm{Amp}(S)) \cap \mathrm{Amp}(S) \neq \varnothing$).

Il se trouve que le morphisme de groupes Ψ_S est injectif.

THÉORÈME 5.2. *Soit S une surface K3. Tout automorphisme de S qui agit trivialement sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ est* Id_S.

Avant de commencer la preuve du théorème, remarquons que le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie complexe (c'est-à-dire d'une structure de variété complexe pour laquelle les opérations de groupe sont des fonctions holomorphes) dont l'algèbre de Lie (c'est-à-dire l'espace tangent en Id_S) est l'algèbre de Lie $H^0(S, T_S)$ des champs de vecteurs holomorphes sur S (munie du crochet des champs de vecteurs) ; tout cela reste d'ailleurs valable pour toute variété complexe compacte. Comme S est une surface K3, toute forme symplectique sur S induit un isomorphisme $T_S \simeq \Omega^1_S$. On a donc

$$H^0(S, T_S) \simeq H^0(S, \Omega^1_S) \subset H^1(S, \mathbf{C}) = 0.$$

Le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ est donc discret.

DÉMONSTRATION. Soit σ un automorphisme de S qui agit trivialement sur $H^2(S, \mathbf{Z})$. Il laisse en particulier invariant toute classe de Kähler. Nous invoquons tout d'abord un théorème de Fujiki ([**F**, Theorem 4.8]) qui dit que le groupe $\mathrm{Aut}^\alpha(X)$ des automorphismes d'une variété kählérienne compacte X qui fixent une classe de Kähler α n'a qu'un nombre fini de composantes connexes : ce groupe $\mathrm{Aut}^\alpha(X)$ contient la composante connexe $\mathrm{Aut}^0(X)$ de l'identité dans $\mathrm{Aut}(X)$ et le quotient $\mathrm{Aut}^\alpha(X)/\mathrm{Aut}^0(X)$ est donc fini. Comme $\mathrm{Aut}^0(S)$ est trivial, cela entraîne que $\mathrm{Aut}^\alpha(S)$ est fini et que σ est d'ordre fini n. Supposons $\sigma \neq \mathrm{Id}_S$, c'est-à-dire $n > 1$. Nous allons analyser les points fixes de σ et tout d'abord montrer qu'ils sont en nombre fini.

LEMME 5.3. *Soit S une surface complexe lisse, soit σ un automorphisme d'ordre fini n de S et soit $x \in S$ un point fixe de σ. Il existe des coordonnées locales (z_1, z_2) sur S autour de x et des racines n-ièmes λ_1 et λ_2 de l'unité, dans lesquelles on a $\sigma(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$.*

DÉMONSTRATION. Montrons qu'on peut linéariser σ dans un voisinage analytique de x. On se place dans des coordonnées analytiques locales sur S centrées en x. On voit ainsi σ comme un automorphisme holomorphe d'un ouvert de $\mathbf{C}^2$ contenant $(0,0)$ et son application tangente T_σ en $(0,0)$ comme un automorphisme linéaire de $\mathbf{C}^2$, d'ordre fini n. On pose

$$f := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_\sigma^{-j} \circ \sigma^j.$$

L'application tangente à f en $(0,0)$ est l'identité. On peut donc faire un changement de variables en utilisant f. Comme

$$f \circ \sigma = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_\sigma^{-j} \circ \sigma^{j+1} = T_\sigma \circ f,$$

l'automorphisme σ est linéaire, égal à T_σ, dans ces nouvelles coordonnées. Comme T_σ est d'ordre fini, donc diagonalisable, on obtient finalement la forme voulue. $\square$

Revenons à la preuve du théorème. Comme σ agit trivialement sur $H^2(S, \mathbf{C})$, il agit aussi trivialement sur son sous-espace $H^0(S, \Omega_S^2)$: si ω est une forme symplectique sur S, on a $\sigma^*\omega = \omega$. Si $x \in S$ est un point fixe de σ, on peut écrire, grâce au lemme, $\sigma(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ dans des coordonnées locales adéquates. Comme ω est un multiple non nul de $dz_1 \wedge dz_2$, on a $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} =: \lambda_x$ et λ_x est une racine primitive n-ième de l'unité.

Comme $\lambda_x \neq 1$ (puisque $\sigma \neq \mathrm{Id}_S$), les points fixes de σ sont isolés, donc en nombre fini $N(\sigma)$. Pour arriver à une contradiction, nous allons utiliser deux théorèmes de points fixes.

Théorème 5.4 (Formule des points fixes de Lefschetz topologique). *Soit X une variété différentielle (lisse) compacte et soit σ un automorphisme de X. On suppose que pour tout point fixe x de σ, le déterminant de $\mathrm{Id}_{T^{\mathbf{R}}_{X,x}} - T^{\mathbf{R}}_{\sigma,x}$ n'est pas nul et on note $\iota_\sigma(x) \in \{-1, 1\}$ son signe (l'*indice de σ en x*). L'ensemble des points fixes de σ est fini et on a*

$$\sum_{\sigma(x)=x} \iota_\sigma(x) = \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{H^j(X,\mathbf{R})}).$$

On notera que si X est une variété compacte complexe et σ un automorphisme biholomorphe de X dont l'ensemble des points fixes est fini, l'indice de σ en tout point fixe vaut 1, de sorte que le membre de gauche de l'égalité est le nombre $N(\sigma)$ de points fixes de σ. Revenons à notre preuve : comme σ agit trivialement en cohomologie, on obtient

$$N(\sigma) = \chi_{\mathrm{top}}(S) = 24. \tag{23}$$

Nous allons maintenant utiliser un second théorème de points fixes.

Théorème 5.5 (Formule des points fixes de Lefschetz holomorphe). *Soit X une variété complexe compacte lisse et soit σ un automorphisme biholomorphe de X. On suppose que pour tout point fixe x de σ, le déterminant de $\mathrm{Id}_{T_{X,x}} - T_{\sigma,x}$ n'est pas nul. L'ensemble des points fixes de σ est fini et on a*

$$\sum_{\sigma(x)=x} \frac{1}{\mathrm{dét}(\mathrm{Id}_{T_{X,x}} - T_{\sigma,x})} = \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{H^j(X,\mathscr{O}_X)}).$$

Cette dernière formule, appliquée à notre automorphisme σ, donne donc

$$\sum_{\sigma(x)=x} \frac{1}{(1-\lambda_x)(1-\lambda_x^{-1})} = \chi(X, \mathscr{O}_X) = 2.$$

Comme λ_x est de module 1, on a $|1 - \lambda_x| \leqslant 2$. On obtient donc $\frac{1}{4} N(\sigma) \leqslant 2$, ce qui contredit (23) et termine la preuve. $\square$

Si S est une surface K3, on peut aussi considérer la représentation

$$\overline{\Psi}_S \colon \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{Pic}(S), \cdot).$$

Celle-ci n'est pas toujours injective : si $S \to \mathbf{P}^2$ est un revêtement double branché le long d'une courbe sextique plane très générale, le nombre de Picard est 1 donc tout automorphisme de S agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(S)$, y compris l'involution de S associée au revêtement double (*cf.* prop. 5.11). On a cependant le résultat suivant.

PROPOSITION 5.6. *Soit S une surface K3 projective. Le noyau de la représentation $\overline{\Psi}_S$ est fini.*

DÉMONSTRATION. Considérons un plongement $S \subset \mathbf{P}^N$ associé à un fibré en droites L très ample sur S. Tout automorphisme de S qui est dans $\mathrm{Ker}(\overline{\Psi}_S)$ laisse fixe L donc agit linéairement sur l'espace de ses sections, donc linéairement sur $\mathbf{P}^N$. Le groupe $\mathrm{Ker}(\overline{\Psi}_S)$ est donc un sous-groupe algébrique fermé du groupe algébrique affine $\mathrm{PGL}(N+1, \mathbf{C})$. Il a donc un nombre fini de composantes irréductibles. Comme il est discret, il est fini. □

5.3. Automorphismes symplectiques

Si S est une surface K3, que ω est une forme symplectique sur S et que σ est un automorphisme de S, on a vu au début du § 5.2 qu'il existe un complexe non nul $\mu(\sigma)$ tel que

$$\sigma^*\omega = \mu(\sigma)\omega.$$

Le nombre complexe $\mu(\sigma)$ est de module 1, puisqu'on a

$$0 \neq \int_S \omega \wedge \bar{\omega} = \int_S \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\bar{\omega} = \mu(\sigma)\overline{\mu(\sigma)} \int_S s\omega \wedge \bar{\omega}.$$

On obtient donc un morphisme

$$\mu\colon\ \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}^\star$$

dont on note le noyau $\mathrm{Aut}^s(S)$. Il est formé des automorphismes dits *symplectiques,* qui laissent invariantes les formes symplectiques sur S. On dit aussi qu'un automorphisme σ est *antisymplectique* si $\mu(\sigma) = -1$.

Le nombre complexe $\mu(\sigma)$ peut être d'ordre infini ([**Hu1**, Example 15.1.11]), mais pas sur une surface K3 projective.

PROPOSITION 5.7. *Soit S une surface K3* projective. *Il existe un entier $n \leqslant 66$ tel que l'image de μ soit le groupe des racines n-ièmes de l'unité.*

DÉMONSTRATION. Nous allons introduire pour la preuve un outil important, le *réseau transcendant* $T(S)$ de la surface S. C'est l'orthogonal dans $H^2(S, \mathbf{Z})$, pour la forme d'intersection, du réseau de Picard $\mathrm{Pic}(S)$. Il est donc de rang $22 - \rho(S)$ et, comme S est projective, la signature de la forme d'intersection est $(2, 20 - \rho(S))$. Il est invariant par tout automorphisme de S.

L'espace vectoriel réel $T(S)_{\mathbf{R}} := T(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ contient l'espace vectoriel réel $V(S) := (H^{0,2}(S) \otimes H^{2,0}(S)) \cap H^2(S, \mathbf{R})$, de dimension 2, sur lequel la forme d'intersection est définie positive ; elle est donc définie négative sur l'orthogonal $V(S)^\perp$ de $V(S)$ dans $T(S)_{\mathbf{R}}$.

Soit σ un automorphisme de S. L'automorphisme σ^* laisse stable les sous-espaces supplémentaires $V(S)$ et $V(S)^\perp$ de $T(S)_{\mathbf{R}}$ et y opère par isométries *euclidiennes.* Toutes ses valeurs propres sont donc des complexes de module 1, donc aussi toutes ses valeurs propres sur $T(S)_{\mathbf{R}}$. D'autre part, comme σ^* laisse stable le réseau $T(S)$, ses valeurs propres sont des entiers algébriques (racines de son polynôme caractéristique) dont tous les conjugués sont aussi racines du polynôme caractéristique, donc encore des valeurs propres, donc de module 1. Un théorème de Kronecker entraîne que ce sont des racines de l'unité.

En particulier, $\mu(\sigma)$, qui est une valeur propre (complexe) de σ^* sur $V(S)$, est une racine primitive m-ième de l'unité et son polynôme minimal, le m-ième polynôme cyclotomique, divise le polynôme caractéristique de $\sigma^*|_{T(S)_{\mathbf{R}}}$, qui est de degré $22-\rho(S)$. On a donc $\varphi(m) \leqslant 22-\rho(S) \leqslant 21$ (où φ est la fonction d'Euler), soit $m \leqslant 66$.

L'image de μ est donc contenu dans le groupe des racines $66!$-ièmes de l'unité ; c'est donc le groupe des racines n-ièmes de l'unité et, par ce qui précède, on a $n \leqslant 66$. $\square$

Exercice 5.8. Soit S une surface K3, soit ω une 2-forme holomorphe non nulle sur S et soit σ un automorphisme de S tel que $\sigma^*(\omega) = \varepsilon\omega$, avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Montrer que $\sigma^*|_{T(S)} = \varepsilon \operatorname{Id}_{T(S)}$ (*Indication :* on pourra montrer que, pour tout $t \in T(S)$, les classes $t - \varepsilon\sigma^*(t)$ et ω sont orthogonales).

Exercice 5.9. Soit S une surface K3 projective de nombre de Picard impair. Soit ω une 2-forme holomorphe sur S et soit σ un automorphisme de S. On veut montrer que $\sigma^*(\omega) = \pm\omega$, c'est-à-dire que σ^2 est symplectique.

(a) Avec les notations de la preuve de la prop. 5.7, montrer que $\sigma^*|_{V(S)^\perp}$ a une valeur propre $\varepsilon \in \{-1,1\}$ puis qu'il existe $t \in T(S)$ non nul tel que $\sigma^*(t) = \varepsilon t$.

(b) Montrer que t est orthogonal à $(\sigma^2)^*(\omega) - \omega$ puis conclure que $\sigma^*(\omega) = \varepsilon\omega$.

Exercice 5.10 (Surfaces K3 avec un automorphisme symplectique non trivial d'ordre fini). Soit S une surface K3 et soit σ un automorphisme symplectique de S d'ordre fini $n > 1$.

(a) Montrer que le nombre $N(\sigma)$ de points fixes de σ vérifie $1 \leqslant N(\sigma) \leqslant 8$ et qu'on a de plus

$$N(\sigma) = \frac{24}{n} \prod_{p|n,\, p \text{ premier}} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big)^{-1}.$$

(*Indication :* on pourra appliquer la formule des points fixes de Lefschetz holomorphe à σ^k, pour $\operatorname{pgcd}(k,n) = 1$, et admettre que pour toute racine primitive n-ième λ de 1, on a

$$\sum_{\operatorname{pgcd}(k,n)=1} \frac{1}{(1-\lambda^k)(1-\lambda^{-k})} = \frac{n^2}{12} \prod_{p|n,\, p \text{ premier}} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big).)$$

(b) Soit $H^2(X,\mathbf{C})^{\sigma^*}$ le sous-espace vectoriel de $H^2(X,\mathbf{C})$ formé des éléments invariants par σ^*. Montrer l'inégalité

$$\dim_{\mathbf{C}}(H^2(X,\mathbf{C})^{\sigma^*}) \geqslant 3$$

(*Indication :* on pourra considérer une classe de Kähler α sur S et la classe $\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma^j)^*(\alpha)$).

(c) Montrer l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tr}((\sigma^j)^*|_{H^2(X,\mathbf{C})}) = n \dim_{\mathbf{C}}(H^2(X,\mathbf{C})^{\sigma^*}).$$

(d) Déduire de (b), (c) et de la formule des points fixes de Lefschetz topologique que l'on a l'inégalité

$$24 + \sum_{j=1}^{n-1} N(\sigma^j) \geqslant 5n.$$

(e) En utilisant (a), en déduire que l'on a $n \leqslant 8$, avec les valeurs suivantes pour $N(\sigma)$:

n	2	3	4	5	6	7	8
$N(\sigma)$	8	6	4	4	2	3	2

(f) On suppose la surface K3 *projective.* Si $T(S)$ est le réseau transcendant de S, montrer, en utilisant l'exerc. 5.8, l'inclusion $T(S)_{\mathbf{R}} \subset H^2(X,\mathbf{C})^{\sigma^*}$ et en déduire comme dans (d) les inégalités

$$24 + \sum_{j=1}^{n-1} N(\sigma^j) \geqslant n(24 - \rho(S))$$

puis $\rho(S) \geqslant 9$.

Comme le montre l'exerc. 5.10, les surfaces K3 avec beaucoup d'automorphismes ont aussi un grand nombre de Picard. Voici un autre résultat dans cette direction (l'existence de surfaces K3 vérifiant les hyptohèses de la proposition résulte du cor. 6.15).

PROPOSITION 5.11. *Soit S une surface K3 projective dont le groupe de Picard est de rang 1, engendré par une classe ample H. On a*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \begin{cases} \{\mathrm{Id}_S\} & \text{si } H^2 > 2; \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \text{si } H^2 = 2. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit σ un automorphisme de S. On a $\sigma^* H = H$ et, si ω est une 2-forme holomorphe sur S, on a $\sigma^*\omega = \varepsilon\omega$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (exerc. 5.9). Cela entraîne $\sigma^*|_{T(S)} = \varepsilon\,\mathrm{Id}_{T(S)}$ (exerc. 5.8). Si $\varepsilon = 1$, l'application linéaire σ^* est l'identité sur $\mathrm{Pic}(S) \oplus T(S)$, donc sur l'espace vectoriel engendré $H^2(S, \mathbf{R})$. Le th. 5.2 entraîne alors $\sigma = \mathrm{Id}_S$.

On suppose donc $\varepsilon = -1$, c'est-à-dire $\sigma^*|_{T(S)} = -\mathrm{Id}_{T(S)}$. On peut alors faire des calculs explicites dans le réseau K3

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}} = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$$

(*cf.* (15)). En effet, un résultat de théorie des réseaux nous dit que deux éléments primitifs de Λ_{K3} de même carré diffèrent par une isométrie (th. 6.14). On peut donc supposer, si (u, v) est une base canonique d'un facteur U de Λ_{K3}, que l'isométrie $H^2(S, \mathbf{Z}) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}}$ est choisie de façon que $H = u + dv$, où $H^2 =: 2d$. On a alors $u - dv \in T(S)$ et

$$\sigma^*(u + dv) = u + dv \quad \text{et} \quad \sigma^*(u - dv) = -(u - dv),$$

d'où $2d\sigma^*(v) = 2u$. Ceci n'est possible que si $d = 1$, auquel cas on a $\sigma^*(v) = u$ et $\sigma^*(u) = v$, tandis que σ^* est $-\mathrm{Id}$ sur $U^\perp = U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \subset T(S)$. Réciproquement, le théorème de Torelli entraîne que cette isométrie de $H^2(S, \mathbf{Z})$ se relève bien en un automorphisme (involutif) antisymplectique de S. Plus simplement, on peut se souvenir (th. 3.11) que S est revêtement double de $\mathbf{P}^2$ donc admet une involution non triviale, celle qui échange les deux feuillets du revêtement. □

On peut donc dire que les groupes d'automorphismes des surfaces K3 projectives de nombre de Picard 1 ne sont pas très intéressants. Lorsque le nombre de Picard est 2, le groupe des automorphismes peut être infini et on peut montrer qu'il est alors isomorphe soit à $\mathbf{Z}$, soit au groupe diédral infini $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Pour des nombres de Picard plus grands, on peut obtenir des groupes encore plus gros (comme le groupe libre sur 2 éléments).

EXEMPLE 5.12 ([**Hu1**, § 15.2.5(i)]). Soit $S \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ l'intersection complète lisse d'une hypersurface de bidegré $(1, 1)$ et d'une hypersurface de bidegré $(2, 2)$. La surface S est une surface K3 projective. Il y a deux involutions antisymplectiques σ_1 et σ_2 sur S correspondant aux deux revêtements doubles $p_1 \colon S \to \mathbf{P}^2$ et $p_2 \colon S \to \mathbf{P}^2$ induits par les deux projections.

On note $e_i = c_1(p_i^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1))$. Le réseau de Picard de S contient le réseau $\mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$ de matrice d'intersection $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Il est même égal à ce réseau pour des choix très généraux des hypersurfaces définissant S dans $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, ce qu'on supposera.

Les involutions σ_1 et σ_2 agissent sur $\mathrm{Pic}(S)$ par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, respectivement : on a $\sigma_i^*(e_i) = e_i$ et, si on écrit $\sigma_1^*(e_2) = ae_1 + be_2$, le fait que σ_1 est une isométrie entraîne $4 = \sigma_1^*(e_1) \cdot \sigma_1^*(e_2) = 2a + 4b$ et $2 = \sigma_1^*(e_2)^2 = 2a^2 + 8ab + 2b^2$, d'où $b = \pm 1$, puis $\sigma_1^* \neq \mathrm{Id}$ (sinon, e_2 proviendrait du premier $\mathbf{P}^2$ et serait multiple de e_1) donne $b = -1$ et $a = 4$.

La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est un automorphisme symplectique d'ordre infini de S et le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ contient le groupe diédral infini $\langle\sigma_1\rangle \star \langle\sigma_2\rangle \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (il lui est même égal).

Exemple 5.13 ([**CO**]). Soit $S \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ une hypersurface lisse de tridegré $(2, 2, 2)$. C'est une surface K3 projective dont le réseau de Picard contient le réseau de rang 3 de matrice d'intersection $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Il est même égal à ce réseau pour un choix très général de l'équation de S dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, ce qu'on supposera. Il y a trois involutions antisymplectiques σ_1, σ_2 et σ_3 sur S correspondant aux trois projections $S \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (obtenues en oubliant un des facteurs de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$), qui sont des revêtements doubles.

Elles agissent sur $\mathrm{Pic}(S)$ par les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, respectivement. Le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ contient le groupe infini $\langle\sigma_1\rangle \star \langle\sigma_2\rangle \star \langle\sigma_3\rangle \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (il lui est même égal).

5.4. Automorphismes sans point fixe

Nous allons étudier sous quelles conditions une surface K3 S peut admettre un automorphisme σ sans point fixe.

Lemme 5.14. *Soit S une surface K3 avec un automorphisme σ sans point fixe et soit ω une forme symplectique sur S. On a $\sigma^*\omega = -\omega$ et $\sigma^*|_{T(S)} = -\mathrm{Id}_{T(S)}$, la surface S est projective et $\rho(S) \geqslant 2$.*

Démonstration. La formule des points fixes de Lefschetz holomorphe donne

$$0 = 1 + \mathrm{Tr}(\sigma^*|_{H^2(S,\mathscr{O}_S)}) = 1 + \overline{\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{H^0(S,\Omega_S^2)})} = 1 + \overline{\mu(\sigma)}.$$

On a donc $\mu(\sigma) = -1$, de sorte que $\sigma^*\omega = -\omega$. Cela entraîne $\sigma^*|_{T(S)} = -\mathrm{Id}_{T(S)}$ (exerc. 5.8).

Montrons que S est projective. Comme $H^2(S, \mathbf{Q})$ est dense dans $H^2(S, \mathbf{R})$ et que le cône de Kähler $\mathrm{Kah}(S)$ est ouvert non vide dans $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbf{R})$, il existe une classe $c \in H^2(S, \mathbf{Z})$ dont la composante $(1, 1)$ est une classe de Kähler α. On a

$$(\sigma^*c + c) \cdot \omega = (\sigma^*c \cdot \omega) + (c \cdot \omega) = (c \cdot (\sigma^*)^{-1}(\omega)) + (c \cdot \omega) = (c \cdot (-\omega)) + (c \cdot \omega) = 0,$$

de sorte que la classe entière $\sigma^*c + c$ est de type $(1, 1)$, donc égale à $\sigma^*\alpha + \alpha$. C'est donc une classe de Kähler entière, c'est-à-dire une classe ample, et S est projective. L'inégalité $\rho(S) \geqslant 2$ provient par exemple de la prop. 5.11. □

Exemple 5.15 (Surfaces d'Enriques). Il existe des surfaces K3 S admettant une involution σ sans point fixe. La surface S est alors projective (lemme 5.14) et le quotient S/σ est une surface projective dite *surface d'Enriques.* On a $\rho(S) \geqslant 9$.

Lemme 5.16. *Soit S une surface K3 avec un automorphisme σ sans point fixe. Si $\rho(S) = 2$, le polynôme caractéristique de $\sigma^*|_{\mathrm{Pic}(S)_{\mathbf{R}}}$ est $T^2 - 18T \pm 1$ et σ est d'ordre infini.*

Démonstration. Comme $\sigma^*|_{T(S)} = -\mathrm{Id}_{T(S)}$ (lemme 5.14) et que $T(S)$ est de rang 20, on a

$$\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{H^2(S,\mathbf{R})}) = \mathrm{Tr}(\sigma^*|_{\mathrm{Pic}(S)_{\mathbf{R}}}) - 20.$$

La formule des points fixes de Lefschetz topologique donne $\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{H^2(S,\mathbf{R})}) = -2$, donc $\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{\mathrm{Pic}(S)_{\mathbf{R}}}) = 18$. Comme σ^* est un automorphisme du réseau $\mathrm{Pic}(S)$, son déterminant est ± 1. On obtient donc les polynômes caractéristiques du lemme.

Les racines $9 \pm \sqrt{81 \pm 1}$ des polynômes $T^2 - 18T \pm 1$ ne sont pas des racines de l'unité, donc σ est d'ordre infini. □

Remarque 5.17. Un théorème de Gromov–Yomdin dit qu'un automorphisme biholomorphe σ d'une variété kählérienne compacte X est d'entropie strictement positive si et seulement si une valeur propre de $\sigma^*|_{H^2(X,\mathbf{C})}$ est de module > 1. C'est le cas pour l'automorphisme σ du lemme 5.16.

On veut maintenant construire une surface K3 (projective) de nombre de Picard 2 avec un automorphisme sans point fixe. Il faut donc commencer par trouver un réseau de rang 2 admettant un automorphisme de polynôme caractéristique $T^2 - 18T \pm 1$.

Proposition 5.18. *Soit S une surface K3 dont le réseau de Picard est isomorphe au réseau de rang 2 de matrice d'intersection $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Il existe un automorphisme biholomorphe antisymplectique de S sans point fixe d'entropie strictement positive agissant par la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ sur $\mathrm{Pic}(S)$.*

Nous montrerons plus tard (cor. 6.15) qu'il existe des surfaces K3 vérifiant les hypothèses de la proposition.

Démonstration. Si $\eta := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ est le nombre d'or, racine de l'équation $\eta^2 = 1 + \eta$, le réseau $\Lambda = \mathrm{Pic}(S)$ est aussi le réseau $\mathbf{Z}[\eta] = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\eta$ muni de la forme quadratique $x \cdot x = 4N(x)$. Remarquons qu'on a

$$\eta^n = a_{n-1} + a_n \eta$$

pour tout $n \geqslant 1$, où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de Fibonacci commençant par 0 et 1.

L'application $x \mapsto -\eta^6 x$ est une isométrie du réseau $\mathbf{Z}[\eta]$. Montrons que cette isométrie s'étend à une isométrie φ de Λ_{K3} qui vaut $-\mathrm{Id}$ sur $\Lambda^\perp$. Comme dans la preuve de la prop. 5.11, un résultat de théorie des réseaux (th. 6.14) nous dit qu'on peut choisir une isométrie $H^2(S,\mathbf{Z}) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}}$ et des bases canoniques (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de deux plans hyperboliques dans Λ_{K3} de façon que la base canonique de Λ s'envoie sur $(u_1 + 2v_1, u_1 + u_2 - 2v_2)$ (la matrice d'intersection est bien celle de Λ). Comme $u_1 - 2v_1 - u_2$ et $u_2 + 2v_2$ sont dans $\Lambda^\perp$, on doit avoir, par le lemme 5.14, les relations

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1 + 2v_1) &= a_5(u_1 + 2v_1) + a_6(u_1 + u_2 - 2v_2),\\
\varphi(u_1 + u_2 - 2v_2) &= a_6(u_1 + 2v_1) + a_7(u_1 + u_2 - 2v_2),\\
\varphi(u_1 - 2v_1 - u_2) &= -(u_1 - 2v_1 - u_2),\\
\varphi(u_2 + 2v_2) &= -(u_2 + 2v_2).
\end{aligned}$$

On en déduit (puisque $a_5 = 5$, $a_6 = 8$ et $a_7 = 13$)

$$\begin{aligned}
\varphi(2u_1 - u_2) &= a_5(u_1 + 2v_1) + a_6(u_1 + u_2 - 2v_2) - (u_1 - 2v_1 - u_2)\\
&= 12u_1 + 12v_1 + 9u_2 - 16v_2,\\
\varphi(u_1 + 2u_2) &= a_6(u_1 + 2v_1) + a_7(u_1 + u_2 - 2v_2) - (u_2 + 2v_2)\\
&= 21u_1 + 16v_1 + 12u_2 - 28v_2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(5u_1) &= 45u_1 + 40v_1 + 30u_2 - 60v_2,\\ \varphi(5u_2) &= 30u_1 + 20v_1 + 15u_2 - 40v_2.\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\begin{aligned}\varphi(u_1) &= 9u_1 + 8v_1 + 6u_2 - 12v_2,\\ \varphi(v_1) &= 2u_1 + v_1 + u_2 - 2v_2,\\ \varphi(u_2) &= 6u_1 + 4v_1 + 3u_2 - 8v_2,\\ \varphi(v_2) &= -3u_1 - 2v_1 - 2u_2 + 3v_2\end{aligned}$$

et $\varphi = -\operatorname{Id}$ sur $(U \oplus U)^\perp = U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}$ pour définir une isométrie de $H^2(S, \mathbf{Z})$ qui vérifie $\varphi(h) = 5h + 8\ell$ et $\varphi(\ell) = 8h + 13\ell$ et qui agit par $-\operatorname{Id}$ sur $\operatorname{Pic}(S)^\perp$, donc en particulier sur $H^{2,0}(S)$. Elle préserve donc la structure de Hodge.

Le th. 4.2 et le fait que le réseau $\operatorname{Pic}(S)$ ne représente pas -2 entraînent que le cône ample de S est son cône positif. Comme $h \cdot \varphi(h) = 36 > 0$, l'isométrie φ envoie la classe ample h sur une classe ample. Le théorème de Torelli entraîne qu'il existe un (unique) automorphisme σ de S qui agit par φ sur $H^2(S, \mathbf{Z})$.

Montrons maintenant que σ est sans point fixe. Comme 1 n'est pas valeur propre de $\sigma^* = \varphi$, le lieu fixe de σ ne contient pas de courbe. C'est donc un ensemble fini dont le cardinal $N(\sigma)$ peut être calculé par la formule de Lefschetz topologique (th. 5.4)

$$\begin{aligned}N(\sigma) &= 2 + \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{H^2(S,\mathbf{R})})\\ &= 2 + \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{\operatorname{Pic}(S)\otimes\mathbf{R}}) + \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{\operatorname{Pic}(S)^\perp\otimes\mathbf{R}})\\ &= 2 + (5+13) - 20 = 0.\end{aligned}$$

Le fait que σ est d'entropie positive est une conséquence des résultats de Gromov et Yomdim (rem. 5.17). □

5.5. Groupe des automorphismes

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la nature du groupe d'automorphismes d'une surface K3.

PROPOSITION 5.19. *Soit S une surface K3 projective. Le groupe* $\operatorname{Aut}(S)$ *est de type fini.*

La conclusion reste vraie pour toutes les surfaces K3 ([**O**, Theorem 1.5]).

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que le groupe $\operatorname{Aut}^s(S)$, qui est d'indice fini dans $\operatorname{Aut}(S)$ par la prop. 5.7, est de type fini. Ce groupe est, par le th. 5.2, isomorphe à son image G dans $\mathrm{O}(H^2(S, \mathbf{Z}))$ par la représentation Φ_S.

Soit $\sigma \in \operatorname{Aut}^s(S)$. Il résulte de l'exerc. 5.8 que σ^* est l'identité sur $T(S)$ (dont l'orthogonal est le réseau $\operatorname{Pic}(S)$). Il est clair aussi que σ^* laisse globalement stable le sous-ensemble Δ^+ de $\operatorname{Pic}(S)$ défini en (19). Soit donc G le sous-groupe des éléments de $\mathrm{O}(H^2(S, \mathbf{Z}))$ qui sont l'identité sur le réseau transcendant $T(S)$ et qui laissent globalement stable l'ensemble Δ^+ et le cône $\operatorname{Pos}(S)$. C'est ce qu'on appelle un groupe arithmétique (c'est-à-dire le groupe des points entiers d'un groupe algébrique défini sur $\mathbf{Q}$) et un théorème de Borel et Harish Chandra que ces groupes sont tous de type fini.

Pour terminer la preuve, il nous suffit donc de montrer qu'il y a égalité dans l'inclusion $\Phi_S(\mathrm{Aut}^s(S)) \subset G$. Soit φ un élément de G. Comme φ est l'identité sur $T(S)$ et que la droite $H^{2,0}(S)$ est contenue dans $T(S)_{\mathbf{R}}$, l'isométrie φ préserve cette droite. De plus, par le th. 4.2, φ laisse aussi stable le cône ample $\mathrm{Amp}(S)$. Le théorème de Torelli (th. 5.1) dit alors que φ provient d'un automorphisme de S, qui est nécessairement symplectique. ☐

Nous terminons sur une caractérisation des surfaces K3 projectives dont le groupe d'automorphismes est fini (pour la preuve, je renvoie à [**Hu1**, Theorem 8.4.2]). Soit S une surface K3 projective, de sorte que le réseau de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ est de signature $(1, \rho(S) - 1)$. Nous avons défini dans la prop. 4.5 le sous-groupe distingué de Weyl $W(\mathrm{Pic}(S)) \subset O(\mathrm{Pic}(S))$.

Théorème 5.20. *Soit S une surface K3 projective. Le morphisme de groupes*

$$\mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{Pic}(S))/W(\mathrm{Pic}(S))$$

induit par $\overline{\Psi}_S$ est de noyau et conoyau finis.

Corollaire 5.21. *Soit S une surface K3 projective. Le groupe* $\mathrm{Aut}(S)$ *est fini si et seulement si le groupe* $\mathrm{O}(\mathrm{Pic}(S))/W(\mathrm{Pic}(S))$ *est fini.*

On peut donc lire la finitude du groupe $\mathrm{Aut}(S)$ sur le réseau $\mathrm{Pic}(S)$. Nikulin a montré (*cf.* [**Hu1**, Theorem 15.2.10]) que l'ensemble des classes d'isomorphisme de réseaux Λ de signature $(1, \rho - 1)$ tels que $\mathrm{O}(\Lambda)/W(\Lambda)$ est fini est

— infini si $1 \leqslant \rho \leqslant 2$;
— fini non vide si $3 \leqslant \rho \leqslant 19$;
— vide si $\rho \geqslant 20$.

En particulier, le groupe d'automorphismes d'une surface K3 de nombre de Picard maximal 20 est toujours infini.

Mentionnons aussi [**Hu1**, Corollary 4.7], qui dit que si le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ est fini, S ne contient qu'un nombre fini de courbes rationnelles lisses (et la réciproque est vraie si S contient au moins une courbe rationnelle lisse).

Chapitre 6

Espaces de modules et application des périodes

6.1. L'application de Kodaira–Spencer

Nous allons parler (un peu vaguement ; pour (un peu) plus de détails, voir [**Hu2**, Chapter 6]) de théorie des déformations. L'idée est la suivante. On se donne une variété complexe lisse compacte connexe X et on cherche à classifier les déformations locales de X, c'est-à-dire les applications holomorphes propres et lisses

$$f\colon \mathscr{X} \longrightarrow B,$$

où B est un (germe d') espace analytique muni d'un point $0 \in B$ pour lequel la fibre $\mathscr{X}_0$ est isomorphe à X (pour tout $b \in B$, on pose $\mathscr{X}_b := f^{-1}(b)$). Étant donnée une telle déformation pour laquelle B est lisse, il y a une suite exacte (*cf.* [**H**, Proposition II.8.11])

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_B \longrightarrow \Omega_{\mathscr{X}} \longrightarrow \Omega_{\mathscr{X}/B} \longrightarrow 0$$

de fibrés vectoriels sur $\mathscr{X}$. On obtient, en dualisant et en restreignant à X, une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_X \longrightarrow T_{\mathscr{X}}|_X \longrightarrow T_{B,0} \otimes \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

de fibrés vectoriels sur X. La suite exacte longue de cohomologie associée fournit une application linéaire

$$T_{B,0} \longrightarrow H^1(X, T_X)$$

qu'on appelle *application de Kodaira–Spencer* associée à la déformation $f\colon \mathscr{X} \to B$.

Voici une autre façon de comprendre cette application : nous allons montrer que $H^1(X, T_X)$ paramètre les (classes d'isomorphisme de) déformations de X au premier ordre, c'est-à-dire les déformations de base $B = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$. On entend par là les morphismes

$$f\colon \mathscr{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)),$$

propres et plats dont la fibre en 0 est isomorphe à X.

Étant donnée une telle déformation, on peut voir X comme le sous-espace analytique fermé de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal (ε) et considérer de nouveau la suite exacte (*cf.* [**H**, Proposition II.8.12])

$$0 \longrightarrow (\varepsilon)/(\varepsilon^2) \longrightarrow \Omega_{\mathscr{X}} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-modules. Comme $\varepsilon^2 = 0$, le terme de gauche de cette suite exacte est isomorphe à $\varepsilon\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \simeq \mathscr{O}_X$. On obtient donc une extension de Ω_X par $\mathscr{O}_X$, c'est-à-dire un élément de

$$\operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \simeq H^1(X, T_X).$$

Une façon plus « concrète » de construire cet élément dans le cadre algébrique est la suivante. On montre que les déformations au premier ordre des schémas affines lisses sont triviales. Si on recouvre X par des ouverts affines (U_i), on a donc des isomorphismes

$$\theta_i\colon U_i \times \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{X}|_{U_i}$$

et des automorphismes de $\mathbf{C}$-algèbres

$$\theta_i^{-1} \circ \theta_j \colon (U_i \cap U_j) \times \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \xrightarrow{\sim} (U_i \cap U_j) \times \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$$

qui sont l'identité modulo ε. Si $U_i \cap U_j = \operatorname{Spec}(A_{ij})$ et $a \in A_{ij}$, cet automorphisme est associé à un automorphisme θ_{ij} de la $\mathbf{C}$-algèbre $A_{ij}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ qui vérifie

$$\theta_{ij}(a) = a + \varepsilon f_{ij}(a),$$

où $f_{ij} \colon A_{ij} \to A_{ij}$ est $\mathbf{C}$-linéaire. Comme θ_{ij} est un automorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres, il vérifie, pour tout $a, b \in A_{ij}$,

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(a)\theta_{ij}(b) &= (a + \varepsilon f_{ij}(a))(b + \varepsilon f_{ij}(b)) \\ &= ab + \varepsilon(a f_{ij}(b) + b f_{ij}(a)) = \\ \theta_{ij}(ab) &= ab + \varepsilon f_{ij}(ab). \end{aligned}$$

Le morphisme f_{ij} est donc une $\mathbf{C}$-dérivation de A_{ij} ; il induit un morphisme A_{ij}-linéaire $\Omega_{A_{ij}/\mathbf{C}} \to A_{ij}$, c'est-à-dire un élément de $H^0(U_{ij}, T_{U_{ij}})$. La relation $\theta_{ij}\theta_{jk}\theta_{ki} = \operatorname{Id}$ entraîne la condition de cocycle

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0.$$

Le cocycle (f_{ij}) définit donc un élément de $H^1(X, T_X)$ (en cohomologie de Cech). Réciproquement, un tel cocycle permet de définir une donnée de recollement des schémas $U_i \times \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ en un schéma $\mathscr{X}$ plat sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$.

Modulo vérification des détails, nous avons donc expliqué la bijection entre $H^1(X, T_X)$ et les classes d'isomorphisme de déformations de X au premier ordre. Étant donnée une déformation $\mathscr{X} \to B$, l'application de Kodaira–Spencer envoie alors un vecteur de l'espace tangent de Zariski à B en 0 sur la déformation au premier ordre de X qui lui correspond.

6.2. Déformation locale universelle

Maintenant que nous avons paramétré les déformations au premier ordre d'une variété X compacte connexe lisse, nous aimerions savoir si on peut étendre ces déformations $\mathscr{X} \to \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ à des ordres supérieurs, c'est-à-dire sur les schémas $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^m))$, pour tout $m \geqslant 2$. Il existe des obstructions pour faire cela, qui vivent dans $H^2(X, T_X)$ (*cf.* [**Hu2**, Section 6.1]). On a le théorème général suivant.

Théorème 6.1 (Kuranishi). *Soit X une variété compacte connexe lisse vérifiant $H^0(X, T_X) = 0$. Il existe un espace analytique pointé $(B_{\text{univ}}, 0)$ et une déformation (propre et lisse)*

$$f_{\text{univ}} \colon \mathscr{X}_{\text{univ}} \longrightarrow B_{\text{univ}}$$

dont la fibre en 0 est isomorphe à X, qui est universelle dans le sens suivant : pour toute déformation $f \colon \mathscr{X} \to B$, il existe un unique morphisme $B \to B_{\text{univ}}$ tel que f est obtenue (au voisinage de 0) en tirant f_{univ} en arrière par ce morphisme.

L'espace tangent de Zariski à B_{univ} en 0 est isomorphe à $H^1(X, T_X)$ via l'application de Kodaira–Spencer $T_{B_{\text{univ}},0} \to H^1(X, T_X)$ et B_{univ} est défini (au voisinage de 0) dans un espace analytique lisse de dimension $h^1(X, T_X)$ par $h^2(X, T_X)$ équations.

Corollaire 6.2. *Soit S une surface K3. Il existe une déformation universelle*

$$f_{\text{univ}} \colon \mathscr{S}_{\text{univ}} \longrightarrow B_{\text{univ}},$$

où $(B_{\text{univ}}, 0)$ est un germe d'espace analytique lisse de dimension 20.

Démonstration. On a en effet $H^2(S,T_S) \simeq H^0(S,\Omega_S)$ (dualité de Serre) et $H^0(S,\Omega_S) \simeq H^0(S,T_S)$ (puisque $\Omega_S \simeq T_S$), puis $H^0(S,\Omega_S) \subset H^1(S,\mathbf{C}) = 0$. Enfin $h^1(S,T_S) = h^1(S,\Omega_S) = 20$. $\square$

Nous verrons dans le § suivant que toutes les fibres de la déformation universelle d'une surface K3 sont encore des surfaces K3. Cependant, la plupart des fibres ne sont pas des surfaces algébriques. Nous reviendrons plus tard sur ce point important (cor. 6.13).

Remarque 6.3 (Automorphismes et déformations). Soit X une variété compacte connexe lisse vérifiant $H^0(X,T_X) = H^2(X,T_X) = 0$ et soit $f_{\mathrm{univ}}\colon \mathscr{X}_{\mathrm{univ}} \to B_{\mathrm{univ}}$ sa déformation locale universelle, avec $(B_{\mathrm{univ}},0)$ lisse.

Supposons que X admette un automorphisme σ. On montre qu'il existe un voisinage B de 0 dans B_{univ}, un plongement ouvert holomorphe $\gamma\colon (B,0) \hookrightarrow (B_{\mathrm{univ}},0)$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f_{\mathrm{univ}}^{-1}(B) \arrow[r, hook, "\Sigma"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{X}_{\mathrm{univ}} \arrow[d, "f_{\mathrm{univ}}"] \\ B \arrow[r, hook, "\gamma"] & B_{\mathrm{univ}}, \end{tikzcd}$$

où Σ induit sur les fibres centrales l'automorphisme $\sigma\colon X \xrightarrow{\sim} X$ et, pour tout $b \in B$, un automorphisme $\Sigma_b\colon \mathscr{X}_b \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}_{\gamma(b)}$.

On peut voir γ comme un automorphisme du germe $(B_{\mathrm{univ}},0)$ et Σ comme un automorphisme du « germe » $(\mathscr{X}_{\mathrm{univ}},X)$. La paire (γ,Σ) est alors uniquement déterminée.

Le lieu fixe $B^\gamma := \{b \in B \mid \gamma(b) = b\}$ est une sous-variété de B lisse au voisinage de 0, dont l'espace tangent en 0 est (via l'isomorphisme $T_{B,0} \xrightarrow{\sim} H^1(X,T_X)$ donné par l'application de Kodaira–Spencer)

$$T_{B^\gamma,0} \xrightarrow{\sim} \{x \in H^1(X,T_X) \mid \sigma^*(x) = x\}.$$

La paire (X,σ) se déforme le long de B^γ. Si on fait une théorie analogue des déformations des paires composées d'une variété et d'un automorphisme, c'est même la base de la déformation locale universelle de cette paire.

6.3. Application des périodes locale

Soit S une surface lisse compacte connexe et soit $f\colon \mathscr{S} \to (B,0)$ une déformation de S de base B lisse connexe avec $S \simeq \mathscr{S}_0$. Un théorème d'Ehresmann dit que du point de vue différentiel, cette application est localement triviale, ce qui fait que toutes les fibres sont difféomorphes. En particulier, les nombres de Betti des fibres restent tous constants.

Considérons le *système local* $R^2 f_*\underline{\mathbf{Z}}$. C'est un faisceau localement constant de fibre en b le groupe abélien $H^2(\mathscr{S}_b,\mathbf{Z})$. On peut identifier $H^2(\mathscr{S}_b,\mathbf{Z})$ avec $H^2(S,\mathbf{Z})$ en choisissant un chemin dans S joignant 0 à b. Cette identification ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin. Elle définit le *morphisme de monodromie*

$$\rho\colon \pi_1(B,0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^2(S,\mathbf{Z})).$$

Si $\widetilde{B} \to B$ est le revêtement universel, l'image inverse du faisceau $R^2 f_*\underline{\mathbf{Z}}$ est triviale sur $\widetilde{B}$ et on obtient $R^2 f_*\underline{\mathbf{Z}}$ comme quotient de $\widetilde{B} \times H^2(S,\mathbf{Z})$ par l'action du groupe $\pi_1(B,0)$ agissant canoniquement sur $\widetilde{B}$ et via ρ sur $H^2(S,\mathbf{Z})$.

Le système local $R^2 f_* \underline{\mathbf{Z}}$ définit un fibré vectoriel (complexe) $R^2 f_* \underline{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{O}_B = R^2 f_* \underline{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{O}_B$ dont la fibre en b est naturellement isomorphe à $H^2(\mathscr{S}_b, \mathbf{C})$. On montre qu'il existe une injection naturelle

$$f_* \Omega^2_{\mathscr{S}/B} \longrightarrow R^2 f_* \underline{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{O}_B \tag{24}$$

de fibrés vectoriels holomorphes dont les fibres en b sont $H^{2,0}(\mathscr{S}_b) \hookrightarrow H^2(\mathscr{S}_b, \mathbf{C})$. En particulier, les nombres de Hodge $H^{2,0}(\mathscr{S}_b)$ restent constants.

Si B est simplement connexe, ce qu'on peut toujours supposer quitte à le rétrécir (puisqu'on l'a supposé lisse), l'injection (24) correspond aussi à une application holomorphe

$$\wp \colon B \longrightarrow \mathrm{Gr}(h^{2,0}(S), H^2(S, \mathbf{C})) \tag{25}$$

dite *application des périodes* (locale). Rappelons que l'espace tangent à la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r, V)$ en un point correspondant à un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(W, V/W)$. La structure de l'application tangente

$$T_{\wp,0} \colon T_{B,0} \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{2,0}(S), H^2(S, \mathbf{C})/H^{2,0}(S))$$

est expliquée dans le théorème suivant, qui utilise la décomposition de Hodge (13) de $H^2(S, \mathbf{C})$.

Théorème 6.4 (Transversalité de Griffiths). *L'application tangente à l'application des périodes se factorise en*

$$T_{\wp,0} \colon T_{B,0} \xrightarrow{\mathrm{KS}} H^1(S, T_S) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H^{2,0}(S), H^{1,1}(S)) \subset \mathrm{Hom}(H^{2,0}(S), H^2(S, \mathbf{C})/H^{2,0}(S)),$$

où KS *est l'application de Kodaira–Spencer. L'application linéaire α est induite, via les égalités $H^{2,0}(S) = H^0(S, \Omega^2_S)$ et $H^{1,1}(S) = H^1(S, \Omega_S)$ par le produit intérieur $\Omega^2_S \otimes T_S \to \Omega_S$, défini par $\omega \otimes t \mapsto \omega(\cdot, t)$.*

Supposons maintenant que $S = \mathscr{S}_0$ est une surface K3. Son premier nombre de Betti est nul, donc aussi ceux des autres fibres $\mathscr{S}_b$. Les nombres $H^{2,0}(\mathscr{S}_b)$ restent aussi constants.

Lemme 6.5. *Toute déformation lisse d'une surface K3 est encore une surface K3.*

Démonstration. On garde les notations précédentes. Pour tout $b \in B$, la surface compacte connexe lisse $\mathscr{S}_b$ est de premier nombre de Betti nul. On a donc $H^1(\mathscr{S}_b, \mathscr{O}_{\mathscr{S}_b}) = 0$ (*cf.* § 1.6.2). Pour montrer que $\mathscr{S}_b$ est une surface K3, il reste à montrer que le faisceau dualisant $\omega_{\mathscr{S}_b}$ est trivial. Comme l'entier $\omega^2_{\mathscr{S}_b}$ dépend continûment de b, il est partout nul. La formule de Noether (th. 1.34) donne alors $\chi(\mathscr{S}_b, \mathscr{O}_{\mathscr{S}_b}) = 2$ pour tout b, donc $1 = h^2(\mathscr{S}_b, \mathscr{O}_{\mathscr{S}_b}) = h^0(\mathscr{S}_b, \omega_{\mathscr{S}_b})$. La trivialité de $\omega_{\mathscr{S}_b}$ est alors équivalente à l'inégalité $h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) \geqslant 1$. Nous allons montrer que cette propriété est à la fois ouverte et fermée dans B.

Par [**H**, Theorem III.12.8], les fonctions $b \mapsto h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{\otimes r}_{\mathscr{S}_b})$ sont semi-continues supérieurement sur B, c'est-à-dire que les ensembles

$$\{b \in B \mid h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{\otimes r}_{\mathscr{S}_b}) \geqslant m\}$$

sont fermés dans B, pour tous entiers r et m. La trivialité de $\omega_{\mathscr{S}_b}$ est donc une propriété fermée.

Comme $\omega^2_{\mathscr{S}_b} = 0$, le théorème de Riemann–Roch (th. 1.33) donne aussi

$$2 = \chi(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) \leqslant h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) + h^2(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) = h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) + h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{\otimes 2}_{\mathscr{S}_b}). \tag{26}$$

Si $\omega_{\mathscr{S}_{b_0}}$ est trivial, on a $h^0(\mathscr{S}_{b_0}, \omega^{\otimes 2}_{\mathscr{S}_{b_0}}) = 1 \leqslant 1$ et cette inégalité reste vraie pour b dans un voisinage de b_0 par semi-continuité. Par (26), elle entraîne $h^0(\mathscr{S}_b, \omega^{-1}_{\mathscr{S}_b}) \geqslant 1$ dans ce voisinage, c'est-à-dire que $\omega_{\mathscr{S}_b}$ est trivial. $\square$

L'application des périodes (locale) associée, comme dans (25), à une déformation locale $f\colon \mathscr{S} \to (B,0)$ d'une surface K3, où B est lisse, est une application holomorphe

$$\wp_B\colon B \longrightarrow \mathbf{P}(H^2(S,\mathbf{C})).$$

Si ω_b est une forme symplectique sur $\mathscr{S}_b$, les relations

$$[\omega_b]\cdot[\omega_b] = \int_{\mathscr{S}_b} \omega_b \wedge \omega_b = 0 \quad \text{et} \quad [\omega_b]\cdot[\bar\omega_b] = \int_{\mathscr{S}_b} \omega_b \wedge \bar\omega_b > 0$$

entraînent que l'image de l'application $\wp_B$ est contenue dans la variété complexe

$$\mathscr{D}_S := \{x \in \mathbf{P}(H^2(S,\mathbf{C})) \mid x\cdot x = 0,\ x\cdot\bar x > 0\},$$

de dimension 20.

Tout ceci s'applique à la déformation locale universelle d'une surface K3 dont l'existence découle du cor. 6.2.

Théorème 6.6 (Théorème de Torelli local). *Soit* $\mathscr{S}_{\mathrm{univ}} \to (B_{\mathrm{univ}},0)$ *la déformation locale universelle d'une surface K3* S*. L'application des périodes locale*

$$\wp_{\mathrm{univ}}\colon B_{\mathrm{univ}} \longrightarrow \mathscr{D}_S \subset \mathbf{P}(H^2(S,\mathbf{C}))$$

est un isomorphisme local en 0*.*

Démonstration. On a vu que B_{univ} est lisse (cor. 6.2). L'application tangente de $\wp_{\mathrm{univ}}$ est donnée par le th. 6.4. L'application de Kodaira–Spencer est un isomorphisme (th. 6.1), ainsi que l'application α : si on choisit une forme symplectique ω sur S, elle induit des isomorphismes $T_S \simeq \Omega_S$, d'où $H^1(S,T_S) \simeq H^1(S,\Omega_S)$, ainsi que

$$\mathrm{Hom}(H^{2,0}(S), H^{1,1}(S)) = \mathrm{Hom}(\mathbf{C}\omega, H^1(S,\Omega_S)) \simeq H^1(S,\Omega_S),$$

et α est alors l'identité.

L'application tangente de $\wp_{\mathrm{univ}}$ est donc injective. Comme $\mathscr{D}_S$ a même dimension que B_{univ} (cor. 6.2), elle est bijective. □

Supposerons qu'on ait choisi un *marquage* de S, c'est-à-dire une isométrie $H^2(S,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$. On voit alors, toujours sous l'hypothèse que B est lisse simplement connexe, l'application des périodes comme une application holomorphe

$$B \longrightarrow \mathscr{D} \subset \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}),$$

où

$$\mathscr{D} := \{x \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}) \mid x\cdot x = 0,\ x\cdot\bar x > 0\},$$

une variété complexe de dimension 20.

Remarque 6.7. Si $x \in \mathscr{D}$, notons que x et $\bar x$ sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendants. Sur le 2-plan réel de $\Lambda\otimes\mathbf{R}$ engendré par la partie réelle et la partie imaginaire de x, la forme quadratique est définie positive. Réciproquement, si $P \subset \Lambda \otimes \mathbf{R}$ est un sous-espace vectoriel réel orienté de dimension 2 sur lequel la forme quadratique est définie positive et que (x_1, x_2) est une base orthonormée directe de P, alors $x_1 + ix_2$ est un élément de $\mathscr{D}$. On peut donc voir $\mathscr{D}$ comme le sous-espace de la grassmanniennne réelle orientée $\mathrm{Gr}^{\mathrm{or}}_{\mathbf{R}}(2, \Lambda\otimes\mathbf{R})$ paramétrant les sous-espaces sur lesquels la forme quadratique est définie positive.

Le groupe $\mathrm{O}(\Lambda \otimes \mathbf{R}) \simeq \mathrm{O}(3,19)$ opère transitivement sur $\mathscr{D}$ et le stabilisateur du plan engendré par les deux premiers vecteurs de base est le sous-groupe $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(1,19)$. On a donc un difféomorphisme

$$\mathscr{D} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(3,19)/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(1,19)). \tag{27}$$

6.4. Espace de modules des surfaces K3 marquées

Un espace des modules est, grosso modo, un espace analytique dont les points paramètrent (les classes d'isomorphisme de) certains objets (comme par exemple les surfaces K3). Pour les surfaces K3, aucun espace de modules raisonnable n'existe (*cf.* rem. 6.11) et il faut « rigidifier » la situation en ajoutant une structure supplémentaire, celle de marquage, qu'on a déjà rencontrée pour une surface individuelle.

On appelle *famille de surfaces K3 marquées* un morphisme propre et lisse $f\colon \mathscr{S} \to B$ entre espaces analytiques, dont toutes les fibres sont des surfaces K3, avec la donnée d'un marquage $\varphi\colon R^2 f_* \underline{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} B \times \Lambda_{\mathrm{K3}}$, qui est donc une trivialisation du système local $R^2 f_* \underline{\mathbf{Z}}$.

Pour toute famille (f, φ) de surfaces K3 marquées comme ci-dessus, on peut définir une application des périodes holomorphe

$$\wp_B\colon B \longrightarrow \mathscr{D} \subset \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C})$$

définie sur les points de la façon suivante : étant donné un point $b \in B$, on a un isomorphisme $\varphi_b\colon H^2(\mathscr{S}_b, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ et $\wp_B(b)$ est le point de $\mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C})$ correspondant à la droite $\varphi_{b,\mathbf{C}}(H^{2,0}(\mathscr{S}_b)) \subset \Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}$.

THÉORÈME 6.8. *Il existe un espace de modules fin pour les surfaces K3 marquées, c'est-à-dire une famille « universelle »*

$$f_{\mathrm{K3}}\colon \mathscr{S}_{\mathrm{K3}} \to \mathscr{N}_{\mathrm{K3}}, \quad \textit{avec} \quad \varphi_{\mathrm{K3}}\colon R^2 f_{\mathrm{K3}*} \underline{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{N}_{\mathrm{K3}} \times \Lambda_{\mathrm{K3}},$$

de surfaces K3 marquées telle que toute famille $\mathscr{S} \to B$ de surfaces K3 marquées est obtenue par image réciproque de (f, φ) par un morphisme $B \to \mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ uniquement déterminé.

L'espace $\mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ est un espace analytique lisse de dimension 20 mais il n'est pas séparé.

En prenant pour B un point, on voit que les classes d'isomorphisme de surfaces K3 marquées sont en bijection avec les points de $\mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$. L'espace tangent de Zariski en un point $[(S, \varphi)]$ de $\mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ correspondant à une surface K3 marquée (S, φ) est l'ensemble des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ d'image $[(S, \varphi)]$. Ceux-ci correspondent, par la propriété universelle, aux déformations au premier ordre de (S, φ). On montre que ce sont les mêmes que les déformations au premier ordre de S (le marquage φ de S s'étend uniquement en un marquage de la déformation au premier ordre) ; elles sont donc paramétrées par $H^1(S, T_S)$ et on a

$$T_{\mathscr{N}_{\mathrm{K3}},[(S,\varphi)]} \simeq H^1(S, T_S).$$

Au voisinage du point $[(S, \varphi)]$, le morphisme $f_{\mathrm{K3}}\colon \mathscr{S}_{\mathrm{K3}} \to \mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ est isomorphe à la déformation locale universelle $f_{\mathrm{univ}}\colon \mathscr{S}_{\mathrm{univ}} \to B_{\mathrm{univ}}$ de S du cor. 6.2.

L'espace $\mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ a deux composantes connexes et si (f, φ) est dans l'une, $(f, -\varphi)$ est dans l'autre ([**K3**, Exposé XIII, cor. de la prop. 2]). Avec le théorème d'Ehresmann déjà mentionné, cela entraîne que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes.

Pour la preuve du théorème, je renvoie à celle de [**K3**, Exposé VIII, prop. 1], qui est bien expliquée (un ingrédient essentiel en est le th. 5.2). Je me limiterai à expliquer pourquoi cet espace n'est pas séparé par l'exemple suivant, dit du *flop d'Atiyah.*

EXEMPLE 6.9 (Non séparation de l'espace des modules des surfaces K3 marquées). Soit $\Delta \subset \mathbf{C}$ le disque unité et soit $\mathscr{S} \to \Delta$ une famille dont toutes les fibres sont des surfaces K3 lisses, sauf la fibre centrale $\mathscr{S}_0$, qui a un point double ordinaire. On peut utiliser par exemple la famille suivante de surfaces quartiques dans $\mathbf{P}^3$ d'équations affines

$$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)+z^2(z^2-1)=t^2.$$

Pour $t \in \Delta$ petit mais non nul, la surface $\mathscr{S}_t$ est lisse. Pour $t=0$, elle a un point double ordinaire à l'origine, qui est aussi un point double ordinaire sur l'espace total $\mathscr{S}$.

Si on éclate ce point dans $\mathscr{S}$, on obtient une variété lisse $\widetilde{\mathscr{S}}$ de dimension 3, contenant le diviseur exceptionnel $E \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Le transformé strict de $\mathscr{S}_0$ dans $\widetilde{\mathscr{S}}$ est une surface K3 (lisse) $\widetilde{\mathscr{S}_0}$ qui est l'éclaté de $\mathscr{S}_0$ en son point singulier. Elle rencontre E en une courbe rationnelle lisse C de bidegré $(1,1)$ qui est le diviseur exceptionnel de $\widetilde{\mathscr{S}_0} \to \mathscr{S}_0$.

On peut contracter E sur $\mathbf{P}^1$ dans $\widetilde{\mathscr{S}}$ de deux façons (selon les deux projections $E \to \mathbf{P}^1$, qui donnent des contractions $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}_1$ et $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}_2$) et obtenir ainsi deux familles lisses $f_1\colon \mathscr{S}_1 \to \Delta$ et $f_2\colon \mathscr{S}_2 \to \Delta$ de surfaces K3 qui sont identiques hors de 0. Les fibres centrales sont toutes deux isomorphes à $\widetilde{\mathscr{S}_0}$. Choisissons un marquage de f_1 ; il induit un marquage de f_2 sur $\Delta \smallsetminus \{0\}$ qui se prolonge en un marquage sur Δ tout entier. Les applications

$$g_1\colon \Delta \longrightarrow \mathscr{N}_{\mathrm{K3}} \qquad \text{et} \qquad g_2\colon \Delta \longrightarrow \mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$$

fournies par la propriété universelle coïncident alors sur $\Delta \smallsetminus \{0\}$ mais les deux marquages induits sur $\widetilde{\mathscr{S}_0}$ diffèrent par la réflexion s_C, donc $g_1(0) \neq g_2(0)$ (les familles f_1 et f_2 ont les mêmes fibres mais ne sont pas isomorphes) : l'espace $\mathscr{N}_{\mathrm{K3}}$ n'est donc pas séparé.

REMARQUE 6.10. Pour toute famille $f\colon \mathscr{S} \to B$ de surfaces K3, il existe un revêtement (analytique) étale $\widetilde{B} \to B$ tel que la famille tirée en arrière $\widetilde{f}\colon \widetilde{\mathscr{S}} := \mathscr{S} \times_B \widetilde{B} \to \widetilde{B}$ admette un marquage, qui en fait alors une famille de surfaces K3 marquées. On peut prendre par exemple pour $\widetilde{B} \to B$ le revêtement universel de B, ou encore le revêtement étale $\widetilde{B} \to B$ avec $\widetilde{B} = \mathrm{Isom}(R^2 f_*\underline{\mathbf{Z}}, \Lambda_{\mathrm{K3}})$ dont la fibre en b est l'ensemble des isométries $H^2(\mathscr{S}_b, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$.

Dans le second cas, on a $B = \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}})\backslash \widetilde{B}$ et l'application des périodes induite

$$\wp_{\widetilde{B}}\colon \widetilde{B} \longrightarrow \mathscr{D} \subset \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C})$$

est alors équivariante pour les actions de $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}})$ sur la source et le but. Cependant, le quotient $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}})\backslash \mathscr{D}$ n'est pas un espace séparé.

REMARQUE 6.11 (Espaces de modules fins et surfaces K3). Soit S une surface K3 admettant un automorphisme σ agissant non trivialement sur $H^1(S, T_S)$ (on a vu dans la prop. 5.18 et les ex. 5.12 et 5.13 qu'il en existe). Soit $f_{\mathrm{univ}}\colon \mathscr{S}_{\mathrm{univ}} \to B_{\mathrm{univ}}$ sa déformation locale universelle.

On a vu dans la rem. 6.3 qu'il existe un automorphisme γ du germe $(B_{\mathrm{univ}}, 0)$ et un automorphisme Σ du « germe » $(\mathscr{S}_{\mathrm{univ}}, S)$ tels que $\gamma \circ f_{\mathrm{univ}} = f_{\mathrm{univ}} \circ \Sigma$ et $\Sigma|_S = \sigma$. La paire (γ, Σ) est uniquement déterminée et l'application tangente en 0 à γ est, via l'isomorphisme $T_{B_{\mathrm{univ}},0} \xrightarrow{\sim} H^1(S, T_S)$ donné par l'application de Kodaira–Spencer, l'application σ^* induite par σ sur $H^1(S, T_S)$ (celle qu'on a supposée non triviale).

S'il existe un espace de modules fin pour les surfaces K3, la famille f_{univ} est obtenue à partir d'une famille universelle globale $\mathscr{S}_{\mathrm{K3}} \to \mathscr{M}_{\mathrm{K3}}$ par image inverse par une application holomorphe

$g\colon B_{\text{univ}} \to \mathscr{M}_{\text{K3}}$. Comme, pour tout $b \in B_{\text{univ}}$, les fibres $\mathscr{X}_b$ et $\mathscr{X}_{\gamma(b)}$ sont isomorphes (via Σ), les points b et $\gamma(b)$ doivent être identifiés par g. Cela signifie que g se factorise par le quotient $B_{\text{univ}} \to B_{\text{univ}}/\langle\gamma\rangle$ et que la famille f_{univ} provient par image inverse d'une famille sur $B_{\text{univ}}/\langle\gamma\rangle$. En particulier, γ induit un automorphisme Γ de $\mathscr{S}_{\text{univ}}$ qui vérifie $\gamma \circ f_{\text{univ}} = f_{\text{univ}} \circ \Gamma$. La restriction $\sigma' := \Gamma|_S$ est un automorphisme de S qui agit sur $H^1(S, T_S)$ comme l'application tangente en 0 à γ, c'est-à-dire comme σ ; en particulier, il agit non trivialement. Mais la fibre en 0 de la famille $\mathscr{S}_{\text{univ}}/\langle\Gamma\rangle \to B_{\text{univ}}/\langle\gamma\rangle$ est alors $S/\langle\sigma'\rangle$: ce n'est en général pas une surface K3, donc cela contredit le fait que cette famille provient par image inverse de la famille universelle $\mathscr{S}_{\text{K3}} \to \mathscr{M}_{\text{K3}}$.

Cet argument un peu long explique donc que la présence d'automorphismes empêche (souvent) l'existence d'un espace de modules fin.

6.5. Application des périodes globale

Comme on l'a remarqué plus haut, la famille universelle $\mathscr{S}_{\text{K3}} \to \mathscr{N}_{\text{K3}}$ de surfaces K3 marquées permet de définir une application des périodes $\wp_{\text{K3}}\colon \mathscr{N}_{\text{K3}} \longrightarrow \mathscr{D} \subset \mathbf{P}(\Lambda_{\text{K3}} \otimes \mathbf{C})$. Le résultat essentiel de la théorie est que cette application est surjective.

Théorème 6.12 (Surjectivité de l'application des périodes). *Soit $\mathscr{N}_{\text{K3}}$ l'espace de modules des surfaces K3 marquées. L'application des périodes*

$$\wp_{\text{K3}}\colon \mathscr{N}_{\text{K3}} \longrightarrow \mathscr{D}$$

est étale et surjective.

Dire que $\wp_{\text{K3}}$ est étale signifie que sa différentielle est un isomorphisme ; il découle de l'identification, au voisinage d'un point $[(S,\varphi)]$ de $\mathscr{N}_{\text{K3}}$, des morphismes $f_{\text{K3}}\colon \mathscr{S}_{\text{K3}} \to \mathscr{N}_{\text{K3}}$ et $f_{\text{univ}}\colon \mathscr{S}_{\text{univ}} \to B_{\text{univ}}$, et du théorème de Torelli local (th. 6.6).

Pour la preuve de la surjectivité, je renvoie au chapitre 7 de [**Hu1**]. En termes « concrets », elle signifie qu'étant donnée une droite $\mathbf{C}\omega \subset \Lambda_{\text{K3}} \otimes \mathbf{C}$ correspondant à un point de $\mathscr{D}$ (c'est-à-dire telle que $\omega \cdot \omega = 0$ et $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$), il existe une surface K3 S et un marquage $\varphi\colon H^2(S,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\text{K3}}$ tels que $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S)) = \mathbf{C}\omega$. C'est un théorème difficile.

Insistons sur un point évident : l'application $\wp_{\text{K3}}$ ne peut être injective, même restreinte à une composante connexe de $\mathscr{N}_{\text{K3}}$, puisque celles-ci ne sont pas séparées, alors que $\mathscr{D}$ l'est. Elle est cependant *génériquement injective* sur chaque composante connexe de $\mathscr{N}_{\text{K3}}$, c'est-à-dire injective en dehors d'une réunion dénombrable de sous-espaces analytiques fermés propres ([**Hu1**, Corollaire 7.5.1]). Les fibres de $\wp_{\text{K3}}$ sont décrites dans [**K3**, Exposé XIII, prop. 2] : si des éléments (S,φ) et (S',φ') de $\mathscr{N}_{\text{K3}}$ sont dans la même fibre de $\wp_{\text{K3}}$, les surfaces S et S' sont isomorphes (cela résulte du th. 5.1) et le défaut d'injectivité est dû à des phénomèmes de non séparation comme celui décrit dans l'ex. 6.9.

Corollaire 6.13. *La surface K3 correspondant à un point très général de $\mathscr{N}_{\text{K3}}$ a un groupe de Picard nul. Elle n'est en particulier pas algébrique.*

Démonstration. Soit (S,φ) une surface K3 marquée. Par le théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1,1)$ (§ 1.7), son groupe de Picard est isomorphe à $H^2(S,\mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(S)$. Par la théorie de Hodge, on a donc

$$\operatorname{Pic}(S) \simeq H^2(S,\mathbf{Z}) \cap H^{2,0}(S)^{\perp} \simeq \Lambda_{\text{K3}} \cap \varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S))^{\perp} = \Lambda_{\text{K3}} \cap (\wp_{\text{K3}}(S,\varphi))^{\perp}. \tag{28}$$

Ce groupe est donc non nul si et seulement s'il existe $x \in \Lambda_{\mathrm{K3}}$ non nul tel que $\wp_{\mathrm{K3}}(S,\varphi) \in x^\perp$. Si $\wp_{\mathrm{K3}}(S,\varphi)$ est un point de $\mathscr{D}$ hors de la réunion dénombrable d'hyperplans $\bigcup_{x\in\Lambda_{\mathrm{K3}}\smallsetminus\{0\}} x^\perp$ (l'équation $y\cdot y = 0$ définissant $\mathscr{D}$ reste non triviale sur $x^\perp$), on a donc $\mathrm{Pic}(S) = 0$. □

Plus généralement, ce théorème important permet la construction de surfaces K3 de réseau de Picard donné, déjà utilisée dans le chapitre précédent. Elle est basée sur des résultats de Nikulin sur l'existence et l'unicité de plongements d'un réseau dans un autre.

Soit Λ un réseau. On étend la forme quadratique entière sur Λ à une forme quadratique rationnelle sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\Lambda\otimes\mathbf{Q}$. Le groupe abélien

$$\Lambda^\vee := \{x \in \Lambda\otimes\mathbf{Q} \mid \forall y\in\Lambda \quad x\cdot y \in \mathbf{Z}\}, \tag{29}$$

contient Λ et est libre de même rang que Λ. On l'appelle le *réseau dual* de Λ. Le quotient $\Lambda^\vee/\Lambda$ est un groupe abélien fini (appelé le *groupe discriminant* de Λ ; il est trivial si et seulement si Λ est unimodulaire). La *longueur* $\ell(\Lambda)$ de Λ est le nombre minimal de générateurs de ce groupe fini ; par le théorème de la base adaptée, on a $\ell(\Lambda) \leqslant \mathrm{rang}(\Lambda)$. Le théorème suivant est dû à Nikulin. Je l'énonce dans le cas du réseau K3, mais une version générale est vraie ([**Hu1**, Theorem 14.1.12]).

Théorème 6.14. *Soit Λ un réseau pair de signature (m^+,m^-). Si $m^+ < 3$, $m^- < 19$ et $\ell(\Lambda)+\mathrm{rang}(\Lambda) \leqslant 20$, il existe un plongement primitif de Λ dans Λ_{K3} et deux tels plongements diffèrent par une isométrie de Λ_{K3}.*

En particulier, deux éléments primitifs de Λ_{K3} de même carré diffèrent par une isométrie et tous les réseaux pairs de signature $(1,\rho-1)$, avec $1\leqslant\rho\leqslant 10$, se plongent, de façon essentiellement unique, dans Λ_{K3}.

Le corollaire suivant permet de construire des surfaces K3 de réseau de Picard donné (on en a déjà utilisé des conséquences simples dans le chap. 5). Il se déduit des th. 6.12 et 6.14.

Corollaire 6.15. *Soit Λ un réseau pair de signature $(1,\rho-1)$, avec $1\leqslant\rho\leqslant 10$. Il existe une surface K3 projective S telle que les réseaux $\mathrm{Pic}(S)$ et Λ sont isomorphes.*

Démonstration. Choisissons un plongement primitif $\Lambda \hookrightarrow \Lambda_{\mathrm{K3}}$ (th. 6.14). La signature de la forme quadratique sur l'espace vectoriel réel $\Lambda^\perp\otimes\mathbf{R} \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}\otimes\mathbf{R}$ est $(2, 20-\rho)$. Il existe donc des sous-espaces vectoriels réels de dimension 2 sur lesquels la forme quadratique est définie positive, ce qui signifie (rem. 6.7) que $\mathscr{D}\cap\mathbf{P}(\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C})$ est non vide. C'est même un ouvert non vide dans une quadrique lisse de dimension $20-\rho$ (la forme quadratique reste non dégénérée sur $\Lambda^\perp\otimes\mathbf{R}$).

Pour toute surface K3 marquée (S,φ) telle que $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S)) \in \mathscr{D}\cap\mathbf{P}(\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C})$, et il en existe par le th. 6.12, le groupe $\mathrm{Pic}(S) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}}\cap\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S))^\perp$ (*cf.* (28)) contient Λ. Nous allons montrer que pour un choix très général de (S,φ), il lui est en fait égal.

Comme Λ est primitif dans Λ_{K3}, tout réseau Λ' tel que $\Lambda \subsetneq \Lambda' \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}$ est de rang $>\rho$. En particulier, le sous-espace vectoriel $\Lambda'^\perp\otimes\mathbf{C}$ de $\Lambda_{\mathrm{K3}}\otimes\mathbf{C}$ est de dimension strictement inférieure à celle de $\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C}$. Comme $\mathscr{D}\cap\mathbf{P}(\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C})$ est un ouvert d'une quadrique lisse, son intersection avec $\mathbf{P}(\Lambda'^\perp\otimes\mathbf{C})$ en est donc un fermé propre. Comme l'ensemble de ces réseaux Λ' est dénombrable, le sous-ensemble

$$\mathscr{D}\cap\Big(\mathbf{P}(\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C})\smallsetminus\bigcap_{\Lambda\subsetneq\Lambda'\subset\Lambda_{\mathrm{K3}}}\mathbf{P}(\Lambda'^\perp\otimes\mathbf{C})\Big) = \mathscr{D}\cap\Big(\mathbf{P}(\Lambda^\perp\otimes\mathbf{C})\smallsetminus\bigcap_{x\in\Lambda_{\mathrm{K3}}\smallsetminus\Lambda} x^\perp\Big)$$

de $\mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}}\otimes\mathbf{C})$ n'est pas vide. Si la période de la surface K3 marquée (S,φ) est dans ce sous-ensemble, on a $\mathrm{Pic}(S)\xrightarrow{\sim}\Lambda$. Comme Λ contient une classe de carré strictement positif, la surface S est projective (th. 2.7). □

EXERCICE 6.16. (a) Montrer qu'il existe une surface K3 S dont le groupe de Picard est de rang 2, isomorphe au réseau $\left(\mathbf{Z}^2, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Montrer que S est projective.

(c) Décrire le cône positif de S dans $\mathbf{Z}^2$ (on supposera que le cône positif est contenu dans le demi-plan $x > 0$, ce qu'on peut toujours faire quitte à changer l'isométrie $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbf{Z}^2$ en son opposé).

(d) Montrer qu'il existe une isométrie $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbf{Z}^2$ telle que le fibré en droites H sur S correspondant à $(1,0) \in \mathbf{Z}^2$ est ample et décrire alors le cône ample de S dans $\mathbf{Z}^2$ (*Indication :* on pourra admettre que les racines entières de l'équation $x^2 + 3xy - y^2 = -1$ peuvent toutes s'écrire $a(3,-1) + b(0,1)$, avec a et b entiers de même signe).

(e) Montrer que le fibré en droites H définit un morphisme fini $\varphi_H\colon S \to \mathbf{P}^2$ de degré 2. On notera σ l'involution de S qui échange les deux feuillets de φ_H (de sorte que $\varphi_H \circ \sigma = \varphi_H$).

(f) Montrer qu'il existe une unique courbe rationnelle lisse $C \subset S$ de classe $(3,-1)$ dans $\mathrm{Pic}(S)$, une unique courbe rationnelle lisse $C' \subset S$ de classe $(0,1)$ dans $\mathrm{Pic}(S)$, que C et C' sont les seules courbes rationnelles lisses sur S et que $C' = \sigma(C)$.

(g) En déduire que σ opère sur $\mathrm{Pic}(S)$ comme la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par H, c'est-à-dire par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.6. Espaces de modules et applications des périodes pour les surfaces K3 polarisées

Il est assez ennuyeux d'avoir à manipuler, comme dans les sections précédentes, des espaces de modules non séparés. Une façon de remédier à cet inconvénient est de se restreindre à des surfaces K3 projectives, où plus précisément à des surfaces K3 polarisées, c'est-à-dire munies d'un fibré en droites ample dont la classe n'est pas divisible. Comme on va le voir, les surfaces K3 polarisées de degré fixé admettent un espace de modules algébrique quasi-projectif mais on perd la surjectivité de l'application des périodes.

Pour définir un espace de modules, il faut définir les familles d'objets qu'on entend paramétrer (comme nous l'avons fait dans le § 6.4 pour les surfaces K3 marquées). Une famille de surfaces K3 polarisées de degré $2d$ sur un $\mathbf{C}$-schéma B est un morphisme projectif lisse $\mathscr{S} \to B$, avec un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{S}$ tel que, pour tout point complexe $b \in B(\mathbf{C})$, la paire $(\mathscr{S}_b, \mathscr{L}|_{\mathscr{S}_b})$ est une surface K3 polarisée de degré $2d$, c'est-à-dire que $\mathscr{S}_b$ est une surface K3 (complexe) et que $\mathscr{L}|_{\mathscr{S}_b}$ est un fibré en droites ample sur $\mathscr{S}_b$, dont la classe est non divisible et de carré $2d$.

De telles familles $(f\colon \mathscr{S} \to B, \mathscr{L})$ et $(f'\colon \mathscr{S}' \to B, \mathscr{L}')$ sont isomorphes s'il existe un B-isomorphisme $u\colon \mathscr{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}'$ et un fibré en droites L sur B tels que $u^*\mathscr{L}' \simeq \mathscr{L} \otimes f^*L$.

À cause de la présence d'automorphismes non triviaux, il n'existe pas d'espace de modules fin pour les surfaces K3 polarisées de degré $2d$ (*cf.* rem. 6.11), c'est-à-dire de famille universelle comme dans le th. 6.8, mais seulement ce qu'on appelle un *espace de modules grossier.*

THÉORÈME 6.17. *Soit d un entier strictement positif. Il existe un espace de modules grossier pour les surfaces K3 polarisées de degré $2d$. C'est un schéma quasi-projectif $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$, irréductible de dimension 19, muni d'une bijection entre l'ensemble $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}(\mathbf{C})$ de ses points complexes et l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces K3 polarisées de degré $2d$, tel que, pour toute famille $(\mathscr{S} \to B, \mathscr{L})$ de surfaces K3 polarisées de degré $2d$, il existe une application algébrique $B \to \mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$ qui envoie chaque point $b \in B(\mathbf{C})$ sur la classe d'isomorphisme de la fibre $(\mathscr{S}_b, \mathscr{L}|_{\mathscr{S}_b})$ de b, vue comme point de $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}(\mathbf{C})$.*

Il existe maintenant plusieurs façons de construire l'espace $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$; je renvoie à [**Hu1**, Chapter 5] pour une discussion. Un ingrédient essentiel de la construction donnée dans [**Hu1**, Section 5.1] (et basée sur des idées de Viehweg) est que, pour tout fibré en droites ample L sur une surface K3, une puissance tensorielle uniforme de L (en fait $L^{\otimes 3}$; *cf.* cor. 3.10) est très ample donc permet de plonger S dans un espace projectif de dimension fixe (en fait $\mathbf{P}^{9d+1}$).

Le schéma $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$ n'est pas lisse, mais est localement (pour la topologie usuelle) quotient d'une variété analytique lisse par un groupe fini ([**Hu1**, Corollary 3.6]). J'insiste sur le fait qu'il n'y a pas de famille universelle de surfaces K3 polarisées au-dessus de $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$.

Passons maintenant à l'application des périodes. Soit h un élément primitif de Λ_{K3} de carré $2d$; ces éléments sont tous dans la même $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}})$-orbite par le th. 6.14 (ou le lemme 6.23 ci-dessous) donc, étant donnée une surface K3 (S, L) polarisée de degré $2d$, il existe un marquage $\varphi\colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ tel que $\varphi(L) = h$. La période de (S, φ) tombe alors dans la variété complexe

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{2d} &:= \{x \in \mathscr{D} \mid x \cdot h = 0\} \\ &= \{x \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}) \mid x \cdot h = x \cdot x = 0,\ x \cdot \bar{x} > 0\} \\ &= \{x \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d} \otimes \mathbf{C}) \mid x \cdot x = 0,\ x \cdot \bar{x} > 0\}, \end{aligned}$$

de dimension 19, où $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$ est le réseau $h^\perp$ dans Λ_{K3}. On a

$$\Lambda_{\mathrm{K3},2d} = \mathbf{Z}(-2d) \oplus U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \tag{30}$$

(cela peut se voir en prenant $h = u + vd$, où (u, v) est une base canonique d'un plan hyperbolique contenu dans Λ_{K3}). Ce n'est plus un réseau unimodulaire.

En rasionnant comme dans la rem. 6.7, on trouve un difféomorphisme

$$\mathscr{D}_{2d} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(2, 19)/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(19)).$$

En particulier, $\mathscr{D}_{2d}$ a deux composantes connexes $\mathscr{D}_{2d}^+$ et $\mathscr{D}_{2d}^-$ (échangées par la conjugaison complexe) (*cf.* (27) ; ici, $\mathrm{O}(2, 19)$ a 4 composantes connexes et $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(19)$ en a 2). Ces composantes connexes sont ce qu'on appelle des *domaines symétriques bornés* (de type IV).

Le fait que $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(19)$ soit compact entraîne que l'action de $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$ (ou d'un sous-groupe Γ d'indice fini) sur $\mathscr{D}_{2d}$ est proprement discontinue ([**Hu1**, Remark 6.1.10]) : chaque point $x \in \mathscr{D}_{2d}$ a un voisinage $V \subset \mathscr{D}_{2d}$ tel que, pour tout $\varphi \in \Gamma$, on a $\varphi(V) \cap V = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de φ, qui satisfont $\varphi(x) = x$. Cela permet de munir le quotient $\Gamma \backslash \mathscr{D}_{2d}$ d'une structure d'espace analytique (peut-être singulier) et même de *schéma quasi-projectif normal* (c'est un célèbre théorème de Baily–Borel qui s'applique à tous les quotients de domaines symétriques bornés par des actions de groupes arithmétiques ; *cf.* [**Hu1**, Theorem 6.1.13]).

Soit maintenant $(f\colon \mathscr{S} \to B, \mathscr{L})$ une famille de surfaces K3 polarisées de degré $2d$. Comme dans la rem. 6.10, il existe un revêtement étale $\widetilde{B} \to B$ dont la fibre en b est l'ensemble des isométries $H^2(\mathscr{S}_b, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ envoyant la classe de $\mathscr{L}_b$ sur h, et sur lequel on peut définir une application des périodes holomorphe

$$\wp_{\widetilde{B}}\colon \widetilde{B} \longrightarrow \mathscr{D}_{2d}.$$

Le groupe

$$\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d) := \{\varphi \in \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}) \mid \varphi(h) = h\}$$

agit sur $\widetilde{B}$ (avec quotient B) et sur $\mathscr{D}_{2d}$ et l'application $\wp_{\widetilde{B}}$ est équivariante pour ces actions. La grande différence avec le cas non polarisé est que le quotient $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d) \backslash \mathscr{D}_{2d}$ a ici, comme on vient de l'expliquer, une structure de schéma quasi-projectif.

THÉORÈME 6.18. *Pour toute famille* $(f\colon \mathscr{S}\to B,\mathscr{L})$ *de surfaces K3 polarisées de degré* $2d$*, l'application des périodes*

$$\wp_B\colon B\longrightarrow \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$$

induite de $\wp_{\widetilde{B}}$ *par passage au quotient par les actions de* $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)$ *est une application algébrique.*

Le fait que $\wp_B$ est algébrique résulte d'un théorème général de Borel : toute application holomorphe d'une variété algébrique vers $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$ est algébrique ([**Hu1**, Theorem 6.4.1]). C'est un résultat en fait assez surprenant, car l'application $\wp_{\widetilde{B}}$ n'est, elle, pas du tout algébrique. C'est une situation que vous avez peut-être déjà rencontrée dans le cadre des familles de courbes elliptiques.

EXEMPLE 6.19. Considérons une famille $f\colon \mathscr{E}\to B$ de courbes elliptiques qu'on suppose *marquéee,* c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme symplectique $R^1f_*\underline{\mathbf{Z}}\simeq B\times\mathbf{Z}^2$. On peut alors définir une application holomorphe $\tau\colon B\to\mathscr{H}$, où $\mathscr{H}$ est le demi-plan de Poincaré, telle que, pour tout $b\in B$, la courbe elliptique $\mathscr{E}_b$ soit isomorphe au quotient $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\oplus\tau(b)\mathbf{Z})$. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ opère sur $\mathscr{H}$ et en passant aux quotient, on obtient une application *algébrique*

$$B\longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H}\xrightarrow{\sim}\mathbf{C}$$

qui associe à chaque point $b\in B$ le j*-invariant* de la courbe elliptique $\mathscr{E}_b$ (la droite affine $\mathbf{C}$ est en fait un espace de modules grossier pour les courbes elliptiques mais il n'y a pas d'espace de modules fin).

Même s'il n'existe pas sur $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$ de famille universelle de surfaces K3 polarisées, on peut en construire une sur un revêtement $\mathscr{N}_{\mathrm{K3},2d}$ de $\mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}$ de groupe $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)$ qui paramètre les surfaces K3 polarisées marquées. Cet espace est en fait un espace de modules fin pour les surfaces K3 polarisées marquées de degré $2d$; on le construit comme l'espace des modules des surfaces K3 marquées (§ 6.4). En passant aux quotients comme ci-dessus, on obtient une application des périodes algébrique

$$\wp_{\mathrm{K3},2d}\colon \mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}\longrightarrow \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$$

entre schémas quasi-projectifs.

REMARQUE 6.20. Le morphisme de restriction $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\to\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$ est injectif. Son image $\widetilde{\mathrm{O}}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$ est un sous-groupe d'indice fini et distingué dans $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$ qui s'appelle le *groupe orthogonal stable.* Il est intrinsèquement défini comme le noyau du morphisme $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})\to\mathrm{Aut}(\Lambda^\vee_{\mathrm{K3},2d}/\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$ (*cf.* (29)).

THÉORÈME 6.21. *Soit* d *un entier strictement positif. L'application des périodes*

$$\wp_{\mathrm{K3},2d}\colon \mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d}\longrightarrow \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$$

est un plongement ouvert dont l'image est un ouvert de Zariski de $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}},2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$.

DÉMONSTRATION. Le fait que l'application tangente est injective en tout point peut se vérifier au niveau de l'application holomorphe $\mathscr{N}_{\mathrm{K3},2d}\to\mathscr{D}_{2d}$ et, pour cette application, cela résulte de l'énoncé analogue pour l'application tangente à $\wp_{\mathrm{K3}}\colon \mathscr{M}_{\mathrm{K3}}\to\mathscr{D}$ (donc du théorème de Torelli local th. 6.6), puisque c'en est la restriction.

L'injectivité de l'application $\wp_{\mathrm{K3},2d}$ est une conséquence de la version du théorème de Torelli donnée dans le th. 5.1 (mais que nous n'avons pas démontrée !). $\square$

Il est très facile de voir que l'application $\wp_{\mathrm{K3},2d}$ n'est pas surjective : soit δ une racine du réseau $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$, c'est-à-dire un élément tel que $\delta^2 = -2$ (déf. 4.4). Supposons qu'il existe une surface K3 polarisée (S, L) dont la période est dans $\delta^\perp$. La classe δ étant réelle et orthogonale à $H^{2,0}(S)$, elle est dans $H^{1,1}(S)$; comme elle est entière, elle est dans $\mathrm{Pic}(S)$. Soit δ, soit $-\delta$ est alors dans l'ensemble Δ^+ des racines positives défini en (19), et cela contredit le th. 4.2.

Il en résulte que l'image de l'application $\wp_{\mathrm{K3},2d}$ est contenue dans l'image dans le quotient $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$ du complémentaire de $\delta^\perp$ dans $\mathscr{D}_{2d}$. L'image de $\delta^\perp$ dans $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$ est un diviseur irréductible (algébrique) qu'on appelle un *diviseur de Heegner.*

Théorème 6.22. *L'image de l'application des périodes*

$$\wp_{\mathrm{K3},2d}\colon \mathscr{M}_{\mathrm{K3},2d} \longrightarrow \mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$$

est exactement le complémentaire de l'image dans le quotient $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$ *de*

$$\bigcup_{\delta\in\Lambda_{\mathrm{K3},2d},\,\delta^2=-2} \delta^\perp$$

dans $\mathscr{D}_{2d}$.

C'est le complémentaire d'un diviseur de Heegner si $d \not\equiv 1 \pmod 4$, *et de la réunion de deux diviseurs de Heegner si* $d \equiv 1 \pmod 4$.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que tout élément x de $\mathscr{D}_{2d} \setminus \bigcup_{\delta\in\Lambda_{\mathrm{K3},2d},\,\delta^2=-2} \delta^\perp$ est la période d'une surface K3 polarisée (de degré $2d$). Comme l'application des périodes est surjective (th. 6.12), il existe une surface K3 S et une isométrie de Hodge $\varphi\colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ telle que $\varphi_{\mathbf{C}}([H^{2,0}(S)]) = x$ dans $\mathscr{D}$. La classe entière $\varphi^{-1}(h)$ est de type $(1, 1)$, donc c'est la classe d'un fibré en droites M sur S de carré $2d$. Quitte à changer φ en $-\varphi$, on peut supposer que M est dans le cône $\mathrm{Pos}(S)$, mais il n'a a priori pas de raison d'être ample. Notons cependant qu'il vérifie $M \cdot \delta \neq 0$ pour toute racine δ de $\mathrm{Pic}(S)$.

On applique alors la prop. 4.10(b) : il existe des courbes rationnelles lisses $C_1, \dots, C_r \subset S$ telles que $L := s_{C_1} \circ \cdots \circ s_{C_r}(M) \in \mathrm{Amp}(S)$. La paire (S, L) est alors une surface K3 polarisée de degré $2d$ et, via le marquage $\varphi \circ s_{C_r} \circ \cdots \circ s_{C_1}\colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ (qui envoie L sur h), sa période est x.

Il reste à déterminer combien il y a de diviseurs différents parmi les images des $\delta^\perp$ dans $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)\backslash\mathscr{D}_{2d}$, c'est-à-dire le nombre de $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d) \times \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$-orbites parmi les racines de Λ_{K3} (puisque δ et $-\delta$ définissent le même hyperplan $\delta^\perp$). Pour ce faire, rappelons l'identification de $\mathrm{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}}, 2d)$ avec le groupe orthogonal stable $\widetilde{\mathrm{O}}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$. Le lemme suivant en décrit les orbites.

Si Λ est un réseau, rappelons ((29) et rem. 6.20) que son groupe discriminant est le groupe abélien fini $D(\Lambda) := \Lambda^\vee/\Lambda$. Si x est un élément primitif de Λ, on note $\mathrm{div}(x)$ le générateur positif du sous-groupe $x \cdot \mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$, de sorte que $x/\mathrm{div}(x)$ est un élément de $\Lambda^\vee$. On note x_* son image dans $D(\Lambda)$.

Lemme 6.23 (Eichler). *Soit* Λ *un réseau pair contenant au moins deux facteurs directs égaux au plan hyperbolique* U. *Des éléments primitifs* x *et* y *de* Λ *sont dans la même* $\widetilde{\mathrm{O}}(\Lambda)$*-orbite si et seulement si* $x_* = y_*$ *dans* $D(\Lambda)$.

Pour trouver le nombre de $\widetilde{\mathrm{O}}(\Lambda_{\mathrm{K3},2d})$-orbites parmi les racines de $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$, il suffit donc de regarder le nombre de valeurs possibles de δ_*, pour δ racine. On a $\mathrm{div}(\delta) \mid \delta^2$, donc soit $\mathrm{div}(\delta) = 1$

et $\delta_* = 0$, soit $\operatorname{div}(\delta) = 2$ et $\delta_* = \delta/2$ est d'ordre 2 dans $D(\Lambda) \simeq \mathbf{Z}/2d\mathbf{Z}$, c'est-à-dire $\delta_* = d$. Dans les deux cas, δ et $-\delta$ sont dans la même $\widetilde{\mathrm{O}}(\Lambda)$-orbite.

On a donc au plus deux orbites. Le cas $\operatorname{div}(\delta) = 1$ est toujours présent : si (u, v) est une base canonique d'un plan hyperbolique contenu dans $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$, on peut prendre $\delta = u - v$.

Pour avoir $\operatorname{div}(\delta) = 2$, il faut que δ ait un facteur non nul dans la partie "non unimodulaire" $\mathbf{Z}(-d)$ de $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$ (*cf.* (30)). Soit ℓ un générateur de ce facteur. On a alors $\delta = m\ell + 2w$, où w est primitif et dans la partie unimodulaire de $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$. On a alors

$$-2 = \delta^2 = m^2(-2d) + 4w^2,$$

de sorte que (comme w^2 est pair) $d \equiv 1 \pmod 4$. Si c'est le cas, on écrit $d = 4e + 1$ et on peut prendre $\delta = \ell + 2(u - ev)$, où (u, v) est une base canonique d'un plan hyperbolique contenu dans $\Lambda_{\mathrm{K3},2d}$. On a bien deux orbites dans ce cas. $\square$

Bibliographie

[BHPV] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van de Ven, A., *Compact complex surfaces,* Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[B] Beauville, A., Surfaces algébriques complexes, *Astérisque* **54**, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

[CO] Cantat, S., Oguiso, K., Birational automorphism groups and the movable cone theorem for Calabi-Yau manifolds of Wehler type via universal Coxeter groups, *Amer. J. Math.* **137** (2015), 1013–1044.

[F] Fujiki, A., On automorphism groups of compact Kähler manifolds, *Invent. Math.* **44** (1978), 225–258.

[H] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics **52**, Springer Verlag, 1977.

[Hu1] Huybrechts, D., Lectures on K3 surfaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **158**, Cambridge University Press, 2016.

[Hu2] Huybrechts, D., *Complex geometry. An introduction,* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[K3] Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes (Palaiseau, 1981/1982), *Astérisque* **126**, Société Mathématique de France, Paris, 1985.

[M] Morrison, D., The Geometry of K3 surfaces, Lectures delivered at the Scuola Matematica Interuniversitaria, Cortona, 1988, available at `http://web.math.ucsb.edu/~drm/manuscripts/cortona.pdf`.

[O] Oguiso, K., Bimeromorphic automorphism groups of non-projective hyperkähler manifolds—a note inspired by C. T. McMullen, *J. Differential Geom.* **78** (2008), 163–191.

[SD] Saint-Donat, B., Projective Models of K - 3 Surfaces, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 602–639.

[S] Serre, J.-P., *Cours d'arithmétique,* deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977.