QUESTIONS AGRÉGATION
O. Debarre – Y. Laszlo

Avertissement : ces «exercices» ont été compilés au cours des quelques années où nous avons fait partie du jury de l'agrégation. Tous n'ont pas été testés, et il n'est pas garanti qu'ils soient tous justes. Leur niveau est très variable : certains dépassent largement le niveau des questions que le jury peut poser à l'oral, mais peuvent (parfois) faire l'objet de développements ; d'autres sont élémentaires. Notre but est simplement de fournir une source de questions qui, nous l'espérons, pourra être utile aux candidats qui prépare le concours. Nous ne faisons plus partie du jury du concours, et cette entreprise en est évidemment totalement indépendante.

1. Dénombrement, groupes

Le groupe symétrique d'un ensemble à n éléments est noté $\mathfrak{S}_n$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$. Le corps à q éléments est noté $\mathbf{F}_q$.

(1.1) Trouver le nombre de chemins de longueur exactement k sur les arêtes d'un cube joignant deux sommets opposés.

(1.2) Trouver tous les sous-groupes d'ordre 15, 20 ou 30 de $\mathfrak{A}_5$.

(1.3) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il isomorphe à $\mathfrak{A}_n \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

(1.4) Quand a-t-on $\mathfrak{S}_n \simeq D_{2m}$?

(1.5) Quel est le nombre de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$?

(1.6) Soient σ une permutation d'un ensemble fini E et τ une permutation d'un ensemble fini F. Quelle est la signature de la permutation (σ, τ) de $E \times F$? Quelle est celle de la permutation $f \mapsto \tau \circ f \circ \sigma$ de F^E ?

(1.7) Quel est le groupe des automorphismes de corps de $\mathbf{F}_q$?

(1.8) Quelle est la signature de l'automorphisme de Frobenius $F : x \mapsto x^p$ de $\mathbf{F}_q$?

(1.9) Soit $M \in GL(n, \mathbf{F}_q)$; quelle est la signature de la bijection correspondante de $\mathbf{F}_q^n$?

(1.10) Montrer que le groupe $GL(n, \mathbf{F}_q)$ contient un élément d'ordre $q^n - 1$.

(1.11) Soient q une puissance d'un nombre premier p et d un élément de $\mathbf{F}_q$. Quel est le déterminant de l'endomorphisme «multiplication par d» du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathbf{F}_q$?

(1.12) Trouver tous les morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbf{C}^*$.

(1.13) Trouver tous les sous-groupes d'ordre 15, 20 ou 30 de $\mathfrak{A}_5$.

(1.14) Soit G un groupe fini, plongé dans l'ensemble $\mathfrak{S}_G$ de ses permutations. À quelle condition l'image est-elle contenue dans le groupe $\mathfrak{A}_G$ des permutations alternées ?

(1.15) Montrer qu'un groupe d'ordre $2n$ avec n impair contient un sous-groupe d'ordre n (donc distingué).

(1.16) Quels sont les 2-Sylows de $\mathfrak{S}_4$? Les interpréter géométriquement en considérant $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe des isométries du cube.

(1.17) Quel est le groupe $SO(2, \mathbf{F}_q)$?

(1.18) Donner un exemple de groupe d'ordre p^3 non abélien.

(1.19) Soit d un entier qui divise l'ordre d'un groupe cyclique G. Combien G a-t-il de sous-groupes d'ordre d ?

(1.20) Existe-t-il une injection de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathfrak{A}_4$?

(1.21) Montrer que $GL(2, \mathbf{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. Quel est son groupe dérivé ?

(1.22) Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

(1.23) Trouver tous les sous-groupes de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec p premier.

(1.24) Quel est le groupe $(\mathbf{F}_q, +)$?

(1.25) Montrer que les groupes $PGL(2, \mathbf{F}_3)$ et $\mathfrak{S}_4$ sont isomorphes. Quel est l'image de $PSL(2, \mathbf{F}_3)$ par cet isomorphisme ? Qu'en déduit-on sur le groupe dérivé de $SL(2, \mathbf{F}_3)$?

(1.26) Existe-t-il une surjection $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n-1}$?

(1.27) Le sous-groupe $G = \{1, (1, 2)\}$ est-il distingué dans $\mathfrak{S}_n$? Quel est son normalisateur ?

(1.28) Quand a-t-on $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$?

(1.29) Identifier le groupe $PGL(2, \mathbf{F}_4)$.

(1.30) Quel est le nombre minimum de transpositions qui engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$?

(1.31) Quel est le nombre minimal de générateurs du groupe $\mathfrak{S}_n$?

(1.32) Montrer que $PGL(2, \mathbf{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.

2. Congruences, nombres entiers

(2.1) Dénombrer les applications $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, p\}$ strictement croissantes, puis les applications croissantes.

(2.2) Soit n un entier premier à 10. Montrer que $1/n$ a un développement décimal périodique de période un diviseur de $\phi(n)$.

(2.3) À quelle condition nécessaire sur n l'entier $2^n - 1$ est-il premier ? Même question avec $2^n + 1$.

(2.4) On se donne un entier n. Résoudre l'équation $16x + 26y = n$, avec x et y entiers.

(2.5) Montrer qu'il existe un multiple positif de 1997 qui se termine par au moins autant de 9 qu'on veut dans son écriture décimale. Même question avec n'importe quelle terminaison.

(2.6) Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{3^9} ?

(2.7) Trouver les 3 derniers chiffres de 777^{401}.

(2.8) Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. Trouver une racine carrée explicite de -1 dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

(2.9) Trouver tous les entiers n tels que $8n \equiv 1 \pmod{13}$.

(2.10) Résoudre le système $x \equiv a \pmod{m}$ et $x \equiv b \pmod{n}$ a-t-il une solution ?

(2.11) Trouver les racines complexes de $2X^3 - X^2 + 5X + 3$.

(2.12) Soient a et b des entiers positifs premiers entre eux. Montrer que tout entier $n \geq ab$ s'écrit $n = au + bv$ avec u et v entiers positifs.

(2.13) Résoudre le système $x \equiv a \pmod{m}$ et $x \equiv b \pmod{n}$.

3. Polyômes, anneaux, corps

(3.1) Trouver les éléments nilpotents de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

(3.2) L'anneau des nombres décimaux (c'est-à-dire les réels dont le développement décimal est fini) est-il principal ? Quels sont les irréductibles ? Calculer le pgcd de 21 et $1,4$.

(3.3) Factoriser le polynôme $X^4 - 2X^2 + 9$ sur $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{F}_p[X]$.

(3.4) Soit $\mathbf{k}$ un corps. Étudier l'irréductibilité du polynôme $X^2+Y^2+Z^2$ dans $\mathbf{k}[X, Y, Z]$. Faire de même avec $X^m + Y^n + Z^2$.

(3.5) Déterminer le corps $\mathbf{F}_3(\alpha)$, où α est une racine 7 $^{\text{ième}}$ de 1.

(3.6) Quand -1 est-il un carré dans $\mathbf{F}_q$?

(3.7) Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbf{F}_q$? En déduire que toute quadrique projective dans $\mathbf{F}_q$ (avec q impair) en au moins 3 variables est non vide.

(3.8) Soit $\mathbf{k}$ un corps. Peut-il y a voir un nombre fini d'irréductibles dans $\mathbf{k}[X]$?

(3.9) Soient n un entier naturel et p et q des réels. Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ a au plus 3 racines réelles.

(3.10) Reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

(3.11) Soit $\mathbf{k}$ un corps. Montrer que $\mathbf{k}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ est intègre en montrant que c'est un sous-anneau de $\mathbf{k}[T]$. Montrer que $\overline{X}$ est irréductible mais non premier, et que $\overline{X}^2$ et $\overline{XY}$ n'ont pas de pgcd.

(3.12) Trouver toutes les racines complexes de $2X^3 - X^2 + 5X + 3$.

(3.13) Soient a et b deux éléments d'un anneau factoriel. Résoudre le système $x \wedge y = a$ et $x \vee y = b$.

(3.14) Soient a et b deux éléments entiers sur un anneau intègre A. Montrer à l'aide des résultants que $a + b$ est entier sur A.

(3.15) Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 21 \\ 1/x & + & 1/y & + & 1/z & = & 1 \end{array}\right.$$

(3.16) Si $F \in \mathbf{k}(X_1, \ldots, X_n)$ est symétrique, montrer qu'il existe des polynômes symétriques P et Q tels que $F = P/Q$.

(3.17) Soit $\mathbf{k}$ un corps infini. Déterminer tous les morphismes de groupes rationnels de $(\mathbf{k}, +)$ dans lui-même, puis de $(\mathbf{k}^*, +)$ dans $(\mathbf{k}, \times)$.

(3.18) Soient $\mathbf{k}$ un corps et F un élément de $\mathbf{k}(X)-\mathbf{k}$. Montrer que F est transcendant sur $\mathbf{k}$. Quel est le degré $[\mathbf{k}(X):\mathbf{k}(F)]$?

(3.19) Soit $\mathbf{k}$ un corps ; déterminer tous les polynômes P et Q dans $\mathbf{k}[X]$ tels que

$$(X^2-6X+8)P(X)+(X-3)Q(X)=X+5\ .$$

(3.20) Soit P un polynôme à coefficients complexes. Déterminer le pgcd de P et P' en fonction des racines de P.

(3.21) Soient $a_1,\ldots,a_n$ des entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe une matrice dans $SL(n,\mathbf{Z})$ de première ligne $a_1,\ldots,a_n$.

(3.22) Un polynôme $P\in\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ nul sur un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ est nul.

(3.23) Soit $\mathbf{k}$ un corps. Déterminer tous les $P\in\mathbf{k}[X,Y]$; tels que $P(X,X)=0$. En déduire tous les éléments antisymétriques de $\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$.

(3.24) Trouver les polynômes $P\in\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$ invariants par le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

(3.25) Montrer que $\det(X_{ij})$ est irréductible dans $\mathbf{k}[X_{ij}]_{1\le i,j\le n}$.

(3.26) Trouver un polynôme unitaire dont les racines sont les carrés de celles de X^3+aX^2+bX+c.

(3.27) Soient p et q des complexes et λ_1, λ_2 et λ_3 les racines du polynôme X^3+pX+q. Trouver un polynôme unitaire dont les racines sont $\lambda_1^2+\lambda_2^2$, $\lambda_2^2+\lambda_3^2$, et $\lambda_3^2+\lambda_1^2$.

(3.28) Soit P un polynôme unitaire de degré n dans $\mathbf{C}[X]$. Pour que P ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que $|P(z)|\ge|\mathrm{Im}z|^n$.

(3.29) Soit $a_nX^n+\cdots+a_{k+1}X^{k+1}+a_{k-1}X^{k-1}+\cdots+a_0$ un polynôme à coefficients réels avec $k>0$ et $a_{k+1}a_{k-1}>0$; montrer que ses racines ne sont pas toutes réelles.

(3.30) Trouver tous les polynômes $P\in\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$ invariants par le groupe $\mathfrak{A}_n$.

(3.31) Donner les tables de multiplication et d'addition de $\mathbf{F}_4$, puis de $\mathbf{F}_8$.

(3.32) Déterminer le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{F}_3$ une racine 7ème de l'unité.

(3.33) Soient A un anneau intègre et K son corps de fractions.

a) Soient L une extension de K et x un élément de L entier sur A. Les coefficients du polynôme minimal de x sur K sont entiers sur A.

b) Supposons A est intégralement clos. Tout polynôme unitaire $P \in A[X]$ qui est irréductible sur $A[X]$ est irréductible dans $K[X]$ (cela généralise un résultat bien connu lorsque A est factoriel).

(3.34) Connaissez-vous des corps algébriquement clos contenus dans $\mathbf{C}$?

(3.35) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout x. Montrer qu'il existe des polynômes Q et R dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

(3.36) Soit P un polynôme avec que des racines simples α_j. Calculer $\sum_j \frac{1}{P'(\alpha_j)}$.

(3.37) Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X, Y]$ partout positif admet-il un minimum sur $\mathbf{R}^2$?

(3.38) Soit E l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de degré au plus n. Étudier les points de continuité de l'application $pgcd : E \times E \to E$.

(3.39) Soit E l'espace affine des polynômes unitaires de $\mathbf{R}[X]$ de degré n. L'ensemble $\{(P, Q) \in E \times E \mid P \text{ et } Q \text{ premiers entre eux}\}$ est-il ouvert ? dense ?

(3.40) Trouver l'ensemble des $F \in \mathbf{C}(X)$ qui ont une primitive dans $\mathbf{C}(X)$.

(3.41) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ stable par toute translation. Montrer que E est contenu dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et que les éléments de E sont les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

4. Algèbre linéaire

(4.1) Diagonaliser la matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(4.2) Déterminer le nombre des classes de conjugaison de matrices $n \times n$ nilpotentes à coefficients dans un corps.

(4.3) Comparer le rang d'une matrice à coefficients entiers sur $\mathbf{Q}$, sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Que dire de l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels les rangs sont différents ?

(4.4) Montrer que deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ont un supplémentaire commun.

(4.5) Soient A un anneau principal et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A premiers entre eux. Montrer qu'il existe une matrice dans $SL(n, A)$ de première ligne $a_1, \ldots, a_n$.

(4.6) Soient $\mathbf{k}$ un corps, u un endomorphisme d'un $\mathbf{k}$-espace vectoriel et P et Q des éléments de $\mathbf{k}[X]$. Déterminer le noyau et l'image de $pgcd(P, Q)(u)$ et de $ppcm(P, Q)(u)$.

(4.7) Montrer qu'une matrice N est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Tr}(N^k) = 0$ pour tout entier $k > 0$.

(4.8) Quel est le coefficient de X^{n-2} dans le polynôme caractéristique ?

(4.9) Trouver le nombre de matrices nilpotentes carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{F}_q$.

(4.10) Trouver les orbites pour l'action canonique de $GL(n, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^n$.

(4.11) Quel est le rang de la comatrice ?

(4.12) Quelle est la comatrice de $P^{-1}AP$ en fonction de celle de A ?

(4.13) Soient E un espace vectoriel complexe et u et v des endomorphismes de E qui commutent. Montrer qu'ils ont un vecteur propre commun.

(4.14) Montrer que $(\mathbf{k}^n, +)$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL(n+1, \mathbf{k})$.

(4.15) Quel est l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes ? Par les matrices inversibles ?

(4.16) Montrer que les groupes $PGL(2, \mathbf{F}_3)$ et S_4 sont isomorphes. Quel est l'image de $PSL(2, \mathbf{F}_3)$ par cet isomorphisme ? Qu'en déduit-on sur le groupe dérivé de $SL(2, \mathbf{F}_3)$?

(4.17) Dans la décomposition de Dunford $A = D + N$, à quelle condition A est-elle semblable à D ? Si A est réelle, montrer que D et N le sont, et que si A est inversible, D l'est aussi.

(4.18) Soient A une matrice inversible complexe et k un entier strictement positif tel que A^k soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable. Qu'en est-il pour les matrices non inversibles ? Réelles ?

(4.19) Soit N une matrice nilpotente. Montrer que $I+N$ est inversible. Si A est inversible et commute avec N, montrer que $A + N$ est inversible.

(4.20) Soit G un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{C})$ tel que $G^2 = I_n$. Quel est le maximum du cardinal de G ? En déduire que $GL(m, \mathbf{C})$ et $GL(n, \mathbf{C})$ ne sont isomorphes que si $m = n$.

(4.21) Interpréter la formule de Taylor pour les polynômes en termes de dualité.

(4.22) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que le dual de E/F est isomorphe à un sous-espace vectoriel du dual de E que l'on déterminera.

(4.23) Un espace vectoriel sur un corps infini n'est pas réunion finie de sous-espaces propres.

(4.24) Le sous-groupe D de $GL(n, \mathbf{k})$ formé des matrices diagonales est-il distingué dans $GL(n, \mathbf{k})$? Soit N son normalisateur ; déterminer N/D.

(4.25) Soit A une matrice complexe carrée d'ordre n ; soit $C_A = \{P^{-1}AP \mid P \in GL(n, \mathbf{C})\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que C_A est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

(4.26) Identifier le groupe $PGL(2, \mathbf{F}_4)$.

(4.27) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a) Montrer que u est simple (c'est-à-dire que les seuls sous-espaces stables sont E et $\{0\}$) si et seulement si son polynôme caractéristique P_u est irréductible.

b) Montrer que u est semi-simple (c'est-à-dire que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable) si et seulement si son polynôme minimal p_u est sans facteur carré.

(4.28) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$ infini. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables ;

(ii) $P_u = p_u$;

(iii) il existe x dans E tel que $x, u(x), \ldots$ engendrent E.

(4.29) Donner une cns pour que deux réflexions commutent.

(4.30) L'ensemble des formes quadratiques de signature donnée est-il ouvert ? Fermé ?

(4.31) Soient A une matrice inversible complexe et n un entier strictement positif. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(A)^n = A$.

(4.32) Soit A une matrice complexe. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $e^A = P(A)$.

(4.33) Soit A une matrice inversible complexe. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $e^{P(A)} = A$. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$?

(4.34) Soit A une matrice réelle inversible.

a) Montrer qu'il existe une matrice réelle M telle que $A = e^M$ si et seulement si il existe une matrice réelle B telle que $A = B^2$.

b) Supposons qu'il existe une matrice réelle B telle que $A = B^2$. Pour tout entier $k \neq 0$, il existe une matrice réelle C telle que $A = C^k$.

(4.35) On part d'un hexagone et on construit l'hexagone de sommets les milieux de ses côtés. Qu'obtient-on en itérant ?

(4.36) Trouver les sous-groupes finis de $GL(2, \mathbf{R})$.

(4.37) Soit G un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbf{R})$. Montrer $\mathrm{Tr}(g) \leq n$ pour tout élément g de G ; quand a-t-on égalité ? Montrer que $\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g)$ est un multiple entier de $|G|$.

(4.38) Quelle est le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto {}^tM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$?

(4.39) Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$.

(4.40) Deux projections sont semblables si et seulement si elles sont équivalentes.

(4.41) L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$ est-elle injective ? Surjective ?

(4.42) Trouver tous les sous-espaces stables de l'endomorphisme de $\mathbf{k}^4$ de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4.43) Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie ≥ 2 a un plan stable.

(4.44) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps. Montrer que le commutant de A est de dimension au moins n.

(4.45) Décrire tous les sous-groupes cycliques finis distingués de $GL(n, \mathbf{k})$. Le groupe $GL(n, \mathbf{k})$ est-il isomorphe à $SL(n, \mathbf{k}) \times \mathbf{k}^*$?

(4.46) Soient A une $\mathbf{k}$-algèbre de dimension finie et B une sous-algèbre. Montrer que tout élément de B inversible dans A est inversible dans B.

(4.47) Trouver une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

(4.48) Soient A et B des matrices symétriques réelles avec A définie positive.

a) Montrer que AB est diagonalisable.

b) Si B est positive, montrer que les valeurs propres de AB sont positives.

c) Montrer que $-I_n$ n'est pas le produit de 4 matrices symétriques réelles positives.

(4.49) Diagonaliser la matrice $P = (\delta_{i\sigma(j)})$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(4.50) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Les formes linéaires $\phi_x : f \mapsto f(x)$, pour $x \in \mathbf{R}$, engendrent-elles E^* ?

(4.51) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto |x - a_j|$, pour $1 \leq j \leq n$?

(4.52) Montrer que deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un même espace vectoriel ont un supplémentaire commun.

(4.53) Trouver une cns sur des nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ pourqu'il existe des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ avec $a_1 = a_{n+1}$ tels que z_j soit le milieu de $a_j a_{j+1}$.

(4.54) Soient $\phi, \phi_1 \ldots, \phi_n$ des formes linéaires su un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que le noyau de ϕ contient $\bigcap_{j=1}^n \mathrm{Ker}(\phi_j)$ si et seulement si ϕ est combinaison linéaire des ϕ_j.

(4.55) Soit E un espace vectoriel de dimension finie d'applications d'un ensemble X dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ dans X tels que $f \mapsto \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$ induise un isomorphisme de E sur $\mathbf{R}^n$.

5. Géométrie

(5.1) L'ensemble des points constructibles du plan est-il un sous-corps de $\mathbf{C}$?

(5.2) Montrer l'existence d'un tétraèdre régulier dans $\mathbf{R}^3$, dans $\mathbf{R}^n$.

(5.3) Construire le centre de la composée de deux rotations planes affines.

(5.4) Matrices des éléments de $O(2, \mathbf{R})$; nature et éléments.

(5.5) Centre et classes de conjugaison du groupe circulaire.

(5.6) Avec règle et compas, partager un segment en 3, puis en 7 parties égales.

(5.7) a) Tout sous-goupe fini du groupe des isométries d'un espace affine euclidien a un point fixe.

b) Un sous-groupe du groupe des isométries d'un plan affine euclidien qui contient des rotations de centres différents est infini.

(5.8) Un sous-groupe fini du groupe des isométries d'un plan affine est cyclique ou diédral.

(5.9) Dans un sous-groupe fini du groupe des isométries directes d'un réseau d'un plan vectoriel euclidien, tout élément est d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6.

(5.10) Condition polynomiale nécessaire et suffisante sur les affixes de 3 points pour qu'ils forment un triangle équilatéral ?

(5.11) Quand les racines complexes de $X^3 + pX + q$ forment-elles un triangle équilatéral ?

(5.12) À quelle condition sur le complexe z les points z, z^2 et z^3 du plan complexe forment-ils un triangle isocèle ?

(5.13) Soit A une partie convexe d'un espace affine $\mathcal{E}$. Pour que A engendre $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que l'intérieur de A ne soit pas vide. Montrer qu'alors A et son intérieur ont même adhérence.

(5.14) Soit K un compact non vide de $\mathbf{R}^n$. Il existe une unique boule fermée de rayon minimal qui contient K.

(5.15) Soient A, B et C des points non alignés d'un espace affine réel euclidien. Trouver les coordonnées barycentriques du point de concours des médianes, des bissectrices, des hauteurs, des médiatrices du triangle ABC.

(5.16) Dans un quadrilatère (plan ou pas), les segments joignant les milieux des côtés opposés se coupent en leur milieu.

(5.17) Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, soient Π un plan et D une droite rencontrant Π mais non contenue dans Π. Soit a un réel strictement positif ; décrire le lieu des points M tels que $d(M,D)^2 + d(M,\Pi)^2 = a^2$.

(5.18) L'isobarycentre de 4 points cocycliques sur une parabole est sur l'axe de la parabole.

(5.19) Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ affine euclidien, déterminer les isométries envoyant une droite sur une autre (fixées) non coplanaires.

(5.20) On se donne des points P, Q et F et un réel $e > 0$. Trouver le lieu des foyers des coniques d'excentricité e, de foyer F et passant par P et Q.

(5.21) Soient P_1, P_2 et P_3 des plans dans l'espace affine euclidien de dimension 3. Donner une cns pour que $s_{P_1} \circ s_{P_2} \circ s_{P_3}$ soit une réflexion.

(5.22) Quand la composée de deux rotations du plan affine euclidien est-elle une rotation ?

(5.23) Soit F un fermé non vide de $\mathbf{R}^n$. Montrer que F est convexe si et seulement si $d(\cdot, F)$ est différentiable sur $\mathbf{R}^n - F$.

(5.24) Trouver une cns sur les complexes $z_1, \ldots, z_n$ pour qu'il existe des complexes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ avec $a_1 = a_{n+1}$ tels que z_j soit le milieu de $a_j a_{j+1}$.

(5.25) Quelle est l'image d'une droite, d'un cercle, d'une conique par l'application $z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$?

(5.26) Nature de $z \mapsto e^{i\pi/n}\bar{z} + 1$.

6. Formes quadratiques et hermitiennes

(6.1) Étudier la quadrique $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy + 2xz + 7yz - x - 5y + 5z = 0$.

(6.2) Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n. Quelle est la signature de la forme quadratique $P \mapsto \int P^2 - \left(\int P\right)^2$?

(6.3) Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, soient Π un plan et D une droite rencontrant Π mais non contenue dans Π. Soit a un réel strictement positif ; décrire le lieu des points M tels que $d(M,D)^2 + d(M,\Pi)^2 = a^2$.

(6.4) Trouver une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

(6.5) Soient A et B des matrices symétriques réelles avec A définie positive.

a) Montrer que AB est diagonalisable.

b) Si B est positive, montrer que les valeurs propres de AB sont positives.

c) Montrer que $-I_n$ n'est pas le produit de 4 matrices symétriques réelles positives.

(6.6) Montrer que $SO(4)$ n'est pas simple, mais que $SO(3)$ l'est.

(6.7) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel contenu dans une quadrique réelle ? Complexe ?

(6.8) Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\|p\| \leq 1$.

(6.9) a) Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbf{F}_q$?

b) En déduire que toute quadrique projective dans $\mathbf{F}_q$ (avec q impair) en au moins 3 variables est non vide.

(6.10) Montrer que $SU(2)$ est homéomorphe à S^3.

(6.11) Quel est l'espace vectoriel engendré par les matrices orthogonales ?

(6.12) Connaissant la décomposition polaire, montrer que $O(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL(n, \mathbf{R})$. Idem avec $U(n)$ et $GL(n, \mathbf{C})$.

(6.13) Montrer que $GL(n, \mathbf{Q})$ est dense dans $GL(n, \mathbf{R})$ puis que $O(n, \mathbf{Q})$ est dense dans $O(n, \mathbf{R})$.

(6.14) Soit Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^n$. Calculer $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-Q(x)}dx$. Calculer le volume de $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Q(x) \leq 1\}$.

(6.15) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie. Montrer que u est normal si et seulement si $u^* = P(u)$, où $P \in \mathbf{C}[X]$.

(6.16) Rugby : d'où tirer une pénalité (sur une ligne fixée perpendiculaire à la ligne d'essai) pour avoir un angle maximal ?

(6.17) Démontrer Cauchy–Schwarz en hermitien.

(6.18) Trouver tous les sous-groupes distingués d'ordre 2 de $O(n, \mathbf{R})$. Le groupe $O(n, \mathbf{R})$ est-il isomorphe à $SO(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?