Examen Algèbre 1

Responsable : Mr O. DEBARRE

Important : vous pouvez consulter le polycopié et utiliser sans démonstration ses résultats (sauf ceux des exercices ou des TD). Si vous voulez utiliser des résultats hors du cours, il faut les démontrer (sauf mention explicite du contraire).

Exercice 1. Soit n un entier ≥ 2. Déterminer (si possible sans calculs) la signature de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$f(x_1,\dots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n)^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

Exercice 2. a) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 5 dans le groupe de permutations $\mathfrak{S}_5$?

b) Soit X l'ensemble des 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$. Quel est le cardinal de X ?

c) Donner un générateur de chacun des éléments de X sous la forme $(12abc)$.

d) On fait agir $\mathfrak{S}_5$ sur X par conjugaison : si $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ et $H \in X$, on pose $\sigma \cdot H = \sigma H \sigma^{-1}$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $u : \mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$ et déterminer les permutations $u((12))$ et $u((123))$ de X.

Si on compose u avec la représentation de permutation $\alpha : \mathfrak{S}_6 \to \mathrm{GL}_6(\mathbf{C})$, on obtient une représentation $\beta : \mathfrak{S}_5 \to \mathrm{GL}_6(\mathbf{C})$ qui se décompose en la somme de la représentation triviale et d'une représentation γ de dimension 5.

e) Calculer $\chi_\beta((12))$ et $\chi_\beta((123))$.

f) Combien vaut χ_β sur les 5-cycles ?

On pourra dans la suite de l'exercice utiliser la table des caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$:

$\mathfrak{S}_5$	1 Id	10 (12)	20 (123)	30 (1234)	24 (12345)	15 (12)(34)	20 (12)(345)
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_{V_0}	4	2	1	0	-1	0	-1
$\chi_{V_0}\chi_{\mathrm{sign}}$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\chi_{\bigwedge^2 V_0}$	6	0	0	0	1	-2	0
χ_V	5	1	-1	-1	0	1	1
$\chi_V\chi_{\mathrm{sign}}$	5	-1	-1	1	0	1	-1

g) En déduire que γ est irréductible et l'identifier parmi les représentations irréductibles de la table.

h) Décomposer la représentation $\gamma\otimes\gamma$ en somme de représentations irréductibles. Est-elle isomorphe, avec les notations de la table ci-dessus, à $V \otimes V$?

Exercice 3. Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et soient f et f' des formes quadratiques sur V. On pose

$$X := \{x \in V \mid f(x) = f'(x) = 0\}.$$

a) Montrer que X est un cône : pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\lambda x \in X$.

b) Montrer que la dimension maximale d'un sous-espace W de V totalement isotrope pour f (c'est-à-dire tel que la restriction $f|_W$ soit nulle) est $\lfloor n - \frac{r}{2} \rfloor$, où r est le rang de f (*Indication :* on pourra commencer par le cas $r = n$).

c) On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$ pas tous les deux nuls et un sous-espace de dimension 2 de V totalement isotrope pour la forme quadratique $\lambda f + \lambda' f'$. En déduire que X contient une droite (vectorielle).

d) On suppose $n \geq 3$. Montrer que X contient un sous-espace vectoriel de V de dimension $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

e) On suppose f non dégénérée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que la forme quadratique $\lambda f - f'$ soit dégénérée a n éléments ;

(ii) il existe une base $\mathscr{B}$ de V et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ deux à deux distincts tels que, pour tout $x \in V$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on ait

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{et} \quad f'(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 .$$

(*Indication :* on pourra prendre une base de V orthogonale pour f, montrer que la matrice de f' dans cette base est diagonalisable, et considérer une base de vecteurs propres).

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose ces conditions réalisées.

f) Donner une action non triviale du groupe $G_n = \mu_2^n$ sur X (où $\mu_2 = \{1, -1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est le groupe des racines carrées de 1 dans $\mathbf{K}$).

g) On suppose $n = 3$. Montrer que X est réunion de 4 droites vectorielles permutées par l'action de G_3.

h) Soit $x \in X$ non nul. On note $x^\perp$ l'hyperplan de V orthogonal de x pour f. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que la restriction de la forme quadratique $\lambda f - f'$ à $x^\perp$ soit non dégénérée.

i) Montrer que tout sous-espace vectoriel de V contenu dans X est de dimension au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. On rappelle qu'on a défini en cours un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & \mathrm{GL}\left(\bigwedge^2 V\right) \\ f & \longmapsto & \bigwedge^2 f. \end{array}$$

a) Déterminer le noyau de φ_{GL} (*Indication :* on pourra distinguer le cas $n = 2$).

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Soit $a \in \mathbf{K}$ et soit u l'endomorphisme de V défini par $u(e_i) = e_i + a\delta_{1i}e_2$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $\mathrm{dét}\left(\bigwedge^2 u\right)$.

c) En déduire que φ_{GL} induit un morphisme de groupes $\varphi_{\mathrm{SL}} : \mathrm{SL}(V) \to \mathrm{SL}\left(\bigwedge^2 V\right)$ et exprimer en général $\mathrm{dét}(\bigwedge^2 f)$ en fonction de $\mathrm{dét}(f)$.

On suppose à partir de maintenant $n = 4$.

d) L'espace vectoriel $\bigwedge^4 V$ est de dimension 1. On en choisit une base, c'est-à-dire un isomorphisme $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}$. Montrer que le produit

$$b : \bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \to \bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}$$

provenant de la structure d'algèbre extérieure est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\bigwedge^2 V$.

e) Montrer que l'image de φ_{SL} est contenue dans le groupe orthogonal $\mathrm{SO}\left(\bigwedge^2 V, b\right)$, groupe dont on montrera qu'il ne dépend pas du choix de la base de $\bigwedge^4 V$ fait en d). En déduire une injection de groupes

$$\psi : \mathrm{SL}(V)/\{\pm \mathrm{Id}_V\} \hookrightarrow \mathrm{SO}\left(\bigwedge^2 V, b\right).$$

f) **(À ne faire qu'après terminé tout le reste de l'examen !)** Le morphisme ψ est-il surjectif ?

Corrigé de l'examen Algèbre 1

Responsable : Mr O. DEBARRE

Exercice 1. *Soit n un entier ≥ 2. Déterminer (si possible sans calculs) la signature de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie par*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

Cette forme quadratique est définie négative sur l'hyperplan $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Comme $f(e_1 + e_2) = 2$, elle n'est pas négative. Donc sa signature est $(1, n-1)$.

Exercice 2. *a) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 5 dans le groupe de permutations $\mathfrak{S}_5$?*

Comme l'ordre d'une permutation est le ppcm des ordres des cycles de supports disjoints en le produit desquels elle se décompose, les éléments d'ordre 5 sont les 5-cycles, qu'on peut écrire $(1abcd)$. On a 4 choix pour a, 3 pour b et 2 pour c, donc il y a 24 éléments d'ordre 5.

b) Soit X l'ensemble des 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$. Quel est le cardinal de X ?

Chaque 5-Sylow contient 4 5-cycles, et chaque 5-cycle appartient à un seul 5-Sylow. Donc X a $24/4 = 6$ éléments.

c) Donner un générateur de chacun des éléments de X sous la forme $(12abc)$.

Chaque élément de X contient une unique permutation de ce type, car une unique puissance d'un 5-cycle envoie 1 sur 2. Comme le cardinal de X, on les obtient tous :

$$X = \{\langle(12345)\rangle, \langle(12354)\rangle, \langle(12435)\rangle, \langle(12453)\rangle, \langle(12534)\rangle, \langle(12543)\rangle\}.$$

d) On fait agir $\mathfrak{S}_5$ sur X par conjugaison : si $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ et $H \in X$, on pose $\sigma \cdot H = \sigma H \sigma^{-1}$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $u : \mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$ et déterminer les permutations $u((12))$ et $u((123))$ de X.

Comme X a 6 éléments, on a bien un morphisme u (une fois numérotés les éléments de X, par exemple dans l'ordre où ils apparaissent ci-dessus). On calcule

$$(12)(12abc)(12)^{-1} = (21abc) = (12cba)^{-1}.$$

Avec la numérotation ci-dessus des éléments de X, on a donc $u((12)) = (16)(24)(35)$. On calcule ensuite

$$(123)(123bc)(123)^{-1} = (231bc) = (12b3c)^2 \qquad (123)(12435)(123)^{-1} = (23415) = (12453)^3$$

donc $u(1) = 3$, $u(2) = 5$ et $u(3) = 4$. Comme $u((123))$ est d'ordre 3, c'est nécessairement $(134)(256)$.

Si on compose u avec la représentation de permutation $\alpha : \mathfrak{S}_6 \to \mathrm{GL}_6(\mathbf{C})$, on obtient une représentation $\beta : \mathfrak{S}_5 \to \mathrm{GL}_6(\mathbf{C})$ qui se décompose en la somme de la représentation triviale et d'une représentation γ de dimension 5.

e) Calculer $\chi_\beta((12))$ et $\chi_\beta((123))$.

On sait que $\chi_\alpha(\sigma)$ est le nombre de points fixes de $\sigma \in \mathfrak{S}_6$. On a donc

$$\chi_\beta((12)) = \chi_\alpha(u(12)) = \chi_\alpha((16)(24)(35)) = 0$$

et

$$\chi_\beta((123)) = \chi_\alpha(u(123)) = \chi_\alpha((134)(256)) = 0.$$

f) Combien vaut χ_β sur les 5-cycles ?

L'image par u d'un 5-cycle est d'ordre 1 ou 5. On vérifie

$$u((12345))\langle(12354)\rangle = \langle(23415)\rangle = \langle(12453)\rangle \neq \langle(12354)\rangle,$$

donc $u((12345)) \neq \mathrm{Id}$. C'est donc un 5-cycle, qui a 1 point fixe, et χ_β vaut 1 sur les 5-cycles.

g) En déduire que γ est irréductible et l'identifier parmi les représentations irréductibles de la table.

D'après la table, le caractère des représentations irréductibles de dimension ≤ 4 de $\mathfrak{S}_5$ est ≥ 0 sur la classe des 3-cycles. Comme $\chi_\gamma = \chi_\beta - 1$ vaut -1 sur les 3-cycles par e), γ est irréductible.

Par e), χ_γ vaut aussi -1 sur les transpositions, donc γ est la représentation notée $V \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}}$ dans la table.

h) Décomposer la représentation $\gamma \otimes \gamma$ en somme de représentations irréductibles. Est-elle isomorphe, avec les notations de la table ci-dessus, à $V \otimes V$?

Cette représentation est de dimension 25. Comme les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$ sont de dimension ≤ 6, elle est somme d'au moins 5 représentations irréductibles.

Avec les notations du cours, les valeurs de son caractère χ sont 25, 1, 1, 1, 0, 1, 1, d'où

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{120}(625 \times 1 + 1 \times 10 + 1 \times 20 + 1 \times 30 + 1 \times 15 + 1 \times 20) = 6.$$

C'est donc la somme de 6 représentations irréductibles distinctes. Comme sa dimension est 25, c'est la somme de toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$, sauf une de dimension 1. Comme le caractère vaut 1 sur les transpositions, on obtient

$$\gamma \otimes \gamma = (V \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}}) \otimes (V \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}}) \simeq \mathbf{C}_{\text{triv}} \oplus V_0 \oplus (V_0 \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}}) \oplus \bigwedge^2 V_0 \oplus V \oplus (V \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}})$$

(on peut aussi calculer $\langle \chi, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{120}(25 \times 1 + 1 \times 10 + 1 \times 20 + 1 \times 30 + 1 \times 15 + 1 \times 20) = 1$). Elle est isomorphe à $V \otimes V$ puisque $\mathbf{C}_{\text{sign}} \otimes \mathbf{C}_{\text{sign}}$ est triviale.

Exercice 3. *Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et soient f et f' des formes quadratiques sur V. On pose $X := \{x \in V \mid f(x) = f'(x) = 0\}$.*
a) Montrer que X est un cône.

Cela provient du fait que $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ et $f'(\lambda x) = \lambda^2 f'(x)$.

*b) Montrer que la dimension maximale d'un sous-espace W de V totalement isotrope pour f (c'est-à-dire tel que la restriction $f|_W$ soit nulle) est $\lfloor n - \frac{r}{2} \rfloor$, où r est le rang de f (*Indication : *on pourra commencer par le cas $r = n$).*

On a $W \subset W^\perp$, donc, si f est non dégénérée,

$$\dim(W) \leq \dim(W^\perp) = n - \dim(W),$$

c'est-à-dire $\dim(W) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Inversement, il existe une base de V dans laquelle $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ et le sous-espace $W \subset V$ défini par $x_{2j+1} = ix_{2j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (et $x_n = 0$ si n est impair) est totalement isotrope et de dimension $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans le cas général, on choisit un supplémentaire V' (de dimension r) du noyau K de f. Le sous-espace $W' := W \cap V'$ de V' est alors totalement isotrope pour la forme quadratique non dégénérée $f|_{V'}$, donc $\dim(W') \leq \frac{r}{2}$ par le cas déjà traité. On a donc

$$\dim(W) = \dim(W') + \dim(W + V') - \dim(V') \leq \frac{r}{2} + n - r = n - \frac{r}{2}.$$

Inversement, par le cas déjà traité, il existe dans V' un sous-espace totalement isotrope W' de dimension $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$, et $W := K \oplus W'$ est totalement isotrope pour f, de dimension $n - r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \lfloor n - \frac{r}{2} \rfloor$. La dimension maximale d'un sous-espace de V totalement isotrope pour f est donc $\lfloor n - \frac{r}{2} \rfloor$.

On peut aussi raisonner directement (et dans le cas général) avec des matrices pour montrer la borne $d := \dim(W) \leq n - \frac{r}{2}$: dans une base de V contenant une base de W, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} O_d & A \\ {}^tA & B \end{pmatrix}$, où O_d est la matrice nulle carrée d'ordre d et A est de taille $d \times (n-d)$; on a donc

$$r = \operatorname{rang}(f) \leq \operatorname{rang}(A) + n - d \leq 2(n-d),$$

d'où $d \leq n - \frac{r}{2}$. Il reste bien sûr encore à trouver (comme plus haut) un sous-espace W totalement isotrope de dimension $\lfloor n - \frac{r}{2} \rfloor$.

c) On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$ pas tous les deux nuls et un sous-espace de dimension 2 de V totalement isotrope pour la forme quadratique $\lambda f + \lambda' f'$. En déduire que X contient une droite (vectorielle).

Le polynôme $\operatorname{dét}(\lambda f + \lambda' f')$ est homogène de degré 3. Comme $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, il existe λ et λ' pas tous les deux nuls tels que $\operatorname{dét}(\lambda f + \lambda' f') = 0$, c'est-à-dire tel que $\lambda f + \lambda' f'$ soit dégénérée. Quitte à échanger les rôles de f et f', on peut supposer $\lambda' \neq 0$ et on pose $f'' = \lambda f + \lambda' f'$, de sorte que $X := \{x \in V \mid f(x) = f''(x) = 0\}$. Par la question a) (avec $r < 3$ et $n = 3$), il existe un sous-espace $W \subset V$ de dimension 2 totalement isotrope pour f''. La forme quadratique $f|_W$ est alors $f(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$ dans une base convenable de W. Il y a donc un vecteur de W non nul isotrope pour f et la droite qu'il engendre est contenue dans X (on peut aussi de nouveau utiliser a), avec $n = 2$).

*d) On suppose $n \geq 3$. Montrer que X contient un sous-espace vectoriel de V de dimension $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (*Indication : *on pourra procéder par récurrence sur n, en choisissant $x \in X$ non nul et en se restreignant à l'intersection des orthogonaux de x pour f et pour f').*

Le cas $n = 3$ est la question c). Contrairement à ce que je pensais, le cas général ne peut pas se faire avec la méthode suggérée dans l'indication. Le résultat est vrai, mais semble difficile à montrer avec des méthodes élémentaires. On peut faire des calculs (longs et rébarbatifs) dans le cas « général » où les hypothèses de la question e) sont vérifiées : on trouve que X contient, lorsque n est impair, exactement 2^{n-1} sous-espaces vectoriels de V de dimension $\frac{n-1}{2}$ et qu'ils forment une unique orbite sous l'action du groupe G_n de la question f) (cela généralise donc la question g)).

e) On suppose f non dégénérée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que la forme quadratique $\lambda f - f'$ soit dégénérée a n éléments ;

(ii) il existe une base $\mathscr{B}$ de V et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ deux à deux distincts tels que, pour tout $x \in V$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on ait $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ et $f'(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

L'implication (ii)⇒(i) est triviale : les n éléments en question sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Supposons (i) vérifiée ; dans une base $\mathscr{B}_0$ de V orthogonale pour f, on note A' la matrice de f'. La matrice $\lambda I - A'$ est singulière pour n valeurs de λ, de sorte que A' a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ donc est diagonalisable. Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de A' et soient $E_1, \dots, E_n$ les matrices de leurs composantes dans la base $\mathscr{B}_0$. On a $A'E_i = \lambda_i E_i$ d'où

$$b'(e_i, e_j) = {}^tE_i A' E_j = \lambda_j {}^tE_i E_j \quad \text{et de même} \quad b'(e_j, e_i) = \lambda_i {}^tE_j E_i = \lambda_i {}^tE_i E_j,$$

où b' est la forme bilinéaire symétrique associée à f'. Comme $b'(e_i, e_j) = b'(e_j, e_i)$, on en déduit ${}^tE_i E_j = 0$, donc $b(e_i, e_j) = b'(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$ et $\mathscr{B}_1$ est orthogonale pour f' et f. On a alors

$$f(x) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 \quad \text{et} \quad f'(x) = \alpha'_1 x_1^2 + \cdots + \alpha'_n x_n^2,$$

avec $\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$ puisque f est non dégénérée. Il suffit de prendre $\mathscr{B} = (e_1/\sqrt{\alpha_1}, \dots, e_n/\sqrt{\alpha_n})$.

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose ces conditions réalisées.

f) Donner une action non triviale du groupe $G_n = \mu_2^n$ sur X (où $\mu_2 = \{1, -1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est le groupe des racines carrées de 1 dans $\mathbf{K}$).

Une opération est donnée par $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n)$. Elle laisse stable X.

g) On suppose $n = 3$. Montrer que X est réunion de 4 droites vectorielles permutées par l'action de G_3.

Il s'agit de résoudre le système

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts. Si $x_1 = 0$, on obtient $x = (0,0,0)$. Si $x_1 \neq 0$, on peut prendre $x_1 = 1$ et on obtient un système de Cramer

$$\begin{cases} x_2^2 + x_3^2 = -1 \\ \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = -\lambda_1, \end{cases}$$

qui a donc une unique solution $x_2^2 = \mu_2$ et $x_3^2 = \mu_3$ avec $\mu_2\mu_3 \neq 0$. Donc X est la réunion des 4 droites engendrées par $(1, \pm\sqrt{\mu_2}, \pm\sqrt{\mu_3})$. Ces droites sont permutées par l'action de G_3, cette permutation étant triviale pour $(-1,-1,-1) \in G_3$.

h) Soit $x \in X$ non nul. On note $x^\perp$ l'hyperplan de V orthogonal de x pour f. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que la restriction de la forme quadratique $\lambda f - f'$ à $x^\perp$ soit non dégénérée.

Notons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et supposons par exemple $x_1 \neq 0$. Nous allons montrer que la restriction de $\lambda_1 f - f'$ à $x^\perp$ est non dégénérée. L'équation de $x^\perp$ est $\sum_{j=1}^n x_j y_j = 0$, de sorte que, pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, le vecteur $(-x_j, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0)$ est dans $x^\perp$. Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in x^\perp$ un élément du noyau de cette restriction. On a

$$\forall j \in \{2, \dots, n\} \qquad 0 = (\lambda_1 b - b')(z, (-x_j, 0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0)) = (\lambda_1 - \lambda_j) z_j x_1,$$

de sorte que $z_2 = \cdots = z_n = 0$. Comme z est dans $x^\perp$, on a aussi $\sum_{j=1}^n x_j z_j = 0$, d'où $z = 0$.

i) Montrer que tout sous-espace vectoriel de V contenu dans X est de dimension au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Soit W un sous-espace vectoriel de V contenu dans X et soit $x \in W$ non nul (si $W = 0$, il n'y a rien à démontrer). Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que la restriction de $\lambda f - f'$ à l'hyperplan $H := x^\perp$ soit non dégénérée (question h)). Comme $x \in W$, on a $W^\perp \subset x^\perp = H$. D'autre part, W est totalement isotrope pour f, donc $W \subset W^\perp \subset H$; il l'est aussi pour f', donc aussi pour $(\lambda f - f')|_H$. La question b) entraîne alors $\dim(W) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

On peut remarquer que dans le cas n impair, cela découle directement de la question b) : les sous-espaces totalement isotropes pour f sont de dimension $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Exercice 4. *Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

On a défini en cours un morphisme de groupes $\varphi_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\bigwedge^2 V)$, $f \mapsto \bigwedge^2 f$.

a) Déterminer le noyau de φ_{GL} *(*Indication : *on pourra distinguer le cas* $n = 2$*).*

Si $n = 2$, l'espace vectoriel $\bigwedge^2 V$ est de dimension 1, et $\bigwedge^2 f$ est la multiplication par le déterminant de f. Le noyau de φ_{GL} est donc $\mathrm{SL}(V)$.

Supposons $n \geq 3$. Si f est dans le noyau de φ_{GL}, on a, pour tous $x, y \in V$, l'égalité $f(x) \wedge f(y) = x \wedge y$. Supposons que x et $f(x)$ ne soient pas colinéaires. On complète en une base $(x, f(x), e_3, \ldots, e_n)$ de V et on pose $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$. On a alors $e_2 \wedge f(e_3) = e_1 \wedge e_3$. Du fait que $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\bigwedge^2 V$, on tire une contradiction.

Pour tout x, $f(x)$ est donc colinéaire à x et il est classique que cela entraîne que f est une homothétie. Si λ est son rapport, $\bigwedge^2 f$ est une homothétie de rapport λ^2. On a donc $\lambda = \pm 1$, et $\ker(\varphi_{\mathrm{GL}}) = \{\pm \mathrm{Id}_V\}$.

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* V*. Soit* $a \in \mathbf{K}$ *et soit* u *l'endomorphisme de* V *défini par* $u(e_i) = e_i + a\delta_{1i}e_2$*, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$*. Calculer* $\mathrm{dét}\left(\bigwedge^2 u\right)$*.*

Si $i < j$, on a $(\bigwedge^2 u)(e_i \wedge e_j) = e_i \wedge e_j$ sauf si $i = 1$, auquel cas $(\bigwedge^2 u)(e_1 \wedge e_j) = e_1 \wedge e_j + ae_2 \wedge e_j$. Si on ordonne la base $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ de $\bigwedge^2 V$ dans l'ordre lexicographique, la matrice de $\bigwedge^2 u$ dans cette base est donc triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit $\mathrm{dét}\left(\bigwedge^2 u\right) = 1$.

c) En déduire que φ_{GL} *induit un morphisme de groupes* $\varphi_{\mathrm{SL}} : \mathrm{SL}(V) \to \mathrm{SL}\left(\bigwedge^2\right)$ *et exprimer en général* $\mathrm{dét}(\bigwedge^2 f)$ *en fonction de* $\mathrm{dét}(f)$*.*

Soit f un endomorphisme de V dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est élémentaire. On peut toujours, quitte à renuméroter les vecteurs de $\mathscr{B}$, supposer que f est de matrice $I_n + aE_{21}$. La question a) montre alors $\mathrm{dét}(\bigwedge^2 f) = 1$. Par le cours, la matrice de tout endomorphisme f de déterminant 1 est produit de matrices élémentaires, donc on a encore $\mathrm{dét}(\bigwedge^2 f) = 1$. L'image de $\mathrm{SL}(V)$ par φ_{GL} est donc contenue dans $\mathrm{SL}(\bigwedge^2 V)$.

En général, on choisit t (dans une extension de $\mathbf{K}$) tel que $t^n = 1/\mathrm{dét}(f)$. On a alors $\mathrm{dét}(tf) = 1$, donc

$$1 = \mathrm{dét}\left(\textstyle\bigwedge^2(tf)\right) = \mathrm{dét}\left(t^2 \textstyle\bigwedge^2 f\right) = (t^2)^{\dim(\bigwedge^2 V)}\,\mathrm{dét}\left(\textstyle\bigwedge^2 f\right) = (t^2)^{\binom{n}{2}}\,\mathrm{dét}\left(\textstyle\bigwedge^2 f\right),$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{dét}\left(\textstyle\bigwedge^2 f\right) = t^{-n(n-1)} = \mathrm{dét}(f)^{n-1}.$$

On peut aussi arriver à ce même résultat en utilisant le fait que $\mathrm{GL}(V)$ est engendré par $\mathrm{SL}(V)$ et les automorphismes du type $u : e_i \mapsto e_i + (a-1)\delta_{1i}e_1$, pour $a \in \mathbf{K}^\times$, et en calculant le déterminant de $\bigwedge^2 u$ comme en b).

On suppose à partir de maintenant $n = 4$*.*

d) L'espace vectoriel $\bigwedge^4 V$ *est de dimension 1. On en choisit une base, c'est-à-dire un isomorphisme* $\bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}$*. Montrer que le produit* $b : \bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \to \bigwedge^4 V \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}$ *provenant de la structure d'algèbre extérieure est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\bigwedge^2 V$*.*

La bilinéarité provient du fait que l'algèbre extérieure est une $\mathbf{K}$-algèbre. La symétrie provient du fait que cette algèbre est anticommutative : les éléments de degré pair commutent entre eux.

Si on choisit une base $(e_1, \ldots, e_4)$ de V, on obtient une base $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq 4}$ de $\bigwedge^2 V$ qu'on ordonne dans l'ordre lexicographique. La matrice de b dans cette base est alors antidiagonale avec des ± 1 sur l'antidiagonale. Elle est donc inversible, et b est non dégénérée.

e) Montrer que l'image de φ_{SL} *est contenue dans le groupe orthogonal* $\mathrm{SO}\left(\bigwedge^2 V, b\right)$*, groupe dont on montrera qu'il ne dépend pas du choix de la base de* $\bigwedge^4 V$ *fait en d). En déduire une injection de groupes* $\psi : \mathrm{SL}(V)/\{\pm \mathrm{Id}_V\} \hookrightarrow \mathrm{SO}\left(\bigwedge^2 V, b\right)$*.*

Pour tout $f \in \mathrm{SL}(V)$, on a, pour tous x, y, x', y' dans V,

$$\begin{aligned} b\big((\textstyle\bigwedge^2 f)(x \wedge y), (\textstyle\bigwedge^2 f)(x' \wedge y')\big) &= b\big(f(x) \wedge f(y), f(x') \wedge f(y')\big) \\ &= f(x) \wedge f(y) \wedge f(x') \wedge f(y') \\ &= \mathrm{dét}(f)\ (x \wedge y \wedge x' \wedge y') \\ &= \mathrm{dét}(f)\ b(x \wedge y, x' \wedge y') \\ &= b(x \wedge y, x' \wedge y'), \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{dét}(f) = 1$. Comme les $x \wedge y$ engendrent $\bigwedge^2 V$, ceci montre que $\bigwedge^2 f$ est bien une isométrie pour b.

f) Le morphisme ψ *est-il surjectif ?*

On vérifie que dans la base $(e_i \wedge e_j)_{1\leq i<j\leq 4}$, la forme quadratique associée à b s'écrit $x_{12}s_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$. L'espace $(\bigwedge^2 V, b)$ est donc somme de 3 plans hyperboliques.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, la signature est $(3,3)$ et ψ devient donc un morphisme $\mathrm{SL}_4(\mathbf{R})/\{\pm \mathrm{Id}_V\} \hookrightarrow \mathrm{SO}_{3,3}(\mathbf{R})$ qui est continu. Comme $\mathrm{SL}_4(\mathbf{R})$ est connexe, l'image de ψ est contenue dans la composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{SO}_{3,3}(\mathbf{R})$, qui en est un sous-groupe d'indice 2 qu'on a noté $\mathrm{SO}'_{3,3}(\mathbf{R})$ dans le polycopié. Donc ψ n'est pas surjectif dans ce cas.

De façon plus générale, on a défini dans le polycopié un morphisme $\theta : SO(\bigwedge^2 V, b) \to \mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times 2}$. Il est surjectif car $(\bigwedge^2 V, b)$ contient des vecteurs isotropes non nuls. Son noyau est noté $SO'(\bigwedge^2 V, b)$. Comme le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(V)$ est encore $\mathrm{SL}(V)$ et que le groupe $\mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times 2}$ est abélien, la composée $\theta \circ \psi$ est triviale, donc l'image de ψ est toujours contenue dans $\ker(\theta) = SO'(\bigwedge^2 V, b)$. Donc ψ ne peut être surjectif dès que $\mathbf{K}^{\times 2} \neq \mathbf{K}^\times$.

On peut montrer que dans tous les cas, l'image de ψ est exactement le sous-groupe $\mathrm{SO}'(\bigwedge^2 V, b)$. Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, ψ est donc un isomorphisme.