Examen Algèbre 1

Responsable : O. DEBARRE

Durée : 3 heures

Important : vous avez droit de consulter le polycopié et d'utiliser sans démonstration ses résultats (sauf ceux des exercices ou des TD). Si vous voulez utiliser des résultats hors du cours, il faut les démontrer (sauf mention explicite du contraire).

Exercice 1. Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et soit f une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel V de dimension finie non nulle. Soit $a \in \mathbf{K}$. On dit que f *représente* a s'il existe $v \in V$ non nul tel que $f(v) = a$.

a) La forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_4^2$ représente-t-elle 0 sur $\mathbf{Q}^4$?

b) Si f représente 0, montrer que f représente tout élément de $\mathbf{K}$.

c) Soit g une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel W de dimension finie non nulle. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $a \in \mathbf{K}^*$ qui est représenté à la fois par f et par g ;

(ii) la forme quadratique $h(v,w) = f(v) - g(w)$ sur l'espace vectoriel $V \oplus W$ représente 0.

Exercice 2. On fixe un entier $n \geq 4$. Pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varphi(g)$ le nombre de points fixes de la permutation g et on pose, pour tout entier $m \geq 0$,

$$\varpi(m) := \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \varphi(g)^m.$$

a) Calculer $\varpi(1)$, $\varpi(2)$, $\varpi(3)$ et $\varpi(4)$.

b) On rappelle que le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère sur l'espace vectoriel $V = \mathbf{C}^n$ par permutation des coordonnées :

$$\forall g \in G \ \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in V \qquad g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)})$$

et que cette représentation est somme de la représentation triviale et d'une représentation irréductible de dimension $n-1$ qu'on note V_0. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère aussi sur $V \otimes V$ par

$$\forall g \in G \ \ \forall v, w \in V \qquad g \cdot (v \otimes w) = g(v) \otimes g(w).$$

Décomposer cette représentation $V \otimes V$ de $\mathfrak{S}_n$ en somme de représentations irréductibles.

Exercice 3. Soit V l'espace vectoriel réel des matrices 4×4 antisymétriques réelles.

a) Montrer que le pfaffien définit une forme quadratique f sur V dont on déterminera la signature.

b) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(4, \mathbf{R})$ sur V définie par

$$\forall P \in \mathrm{GL}(4, \mathbf{R}) \ \ \forall M \in V \qquad P \cdot M = P\, M\, {}^t\!P$$

induit un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{SL}(4, \mathbf{R}) \to \mathrm{O}(V, f)$.

c) Déterminer le noyau de φ.

d) Que pouvez-vous dire de l'image de φ ?

On pose $J := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et on note* $H \subset V$ *l'hyperplan orthogonal à* J *pour la forme quadratique* f.

e) Quelle est la signature de la restriction de la forme quadratique f à H ?

f) Que pouvez-vous dire du groupe $\varphi(\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R}))$?

T.S.V.P.

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et soit d un entier positif.

a) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Donner une base naturelle $\mathscr{B}_d$ de l'espace vectoriel $S^d V$.

b) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, si P et Q sont des monômes (unitaires) de degré d en n variables, alors $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si et seulement si $P = Q$.

c) Montrer que $\mathrm{GL}(V)$ agit naturellement sur l'espace vectoriel $S^d V$. On en déduit une représentation ρ_d de $\mathrm{GL}(V)$ dans $S^d V$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel non nul de $S^d V$ stable par l'action de $\mathrm{GL}(V)$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de la base $\mathscr{B}_d$ qui engendre W (*Indication :* on pourra, avec les notations de b), considérer l'automorphisme de V qui envoie e_i sur $\lambda_i e_i$).

e) En déduire que la représentation ρ_d est irréductible.

Exercice 5. Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe fini dont le cardinal est une puissance de p. Montrer que toute représentation irréductible de G dans un espace vectoriel sur un corps de caractéristique p est de dimension 1.

Corrigé de l'examen Algèbre 1

Responsable : O. DEBARRE

Exercice 1. *Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et soit f une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel V de dimension finie non nulle. Soit $a \in \mathbf{K}$. On dit que f* représente *a s'il existe $v \in V$ non nul tel que $f(v) = a$.*

a) La forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_4^2$ représente-t-elle 0 sur $\mathbf{Q}^4$?

En chassant les dénominateurs, cela revient à voir s'il existe des entiers non tous nuls x_1, x_2, x_3, x_4 premiers entre eux dans leur ensemble tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_4^2 = 0$. On réduit modulo 8 pour obtenir $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \pmod 8$. Les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4, donc cette équation n'a pas de solution autre que $(0, 0, 0, 0)$, $(4, 4, 0, 0)$, $(4, 4, 4, 4)$ et leurs permutations. On en déduit que x_1, x_2, x_3 et x_4 sont tous pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Cette forme quadratique ne représente donc pas 0 [1].

b) Si f représente 0, montrer que f représente tout élément de $\mathbf{K}$.

Par définition, f représente 0 si et seulement si f a un vecteur isotrope x (non nul). Par le lemme II.4.7, c'est équivalent à dire que (V, f) contient un plan hyperbolique, c'est-à-dire $y \in V$ isotrope avec $B(x, y) = 1$. Pour tout $a \in \mathbf{K}$, on a alors $f(x + \frac{a}{2}y) = a$.

c) Soit g une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel W de dimension finie non nulle. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $a \in \mathbf{K}^*$ qui est représenté à la fois par f et par g ;

(ii) la forme quadratique $h(v, w) = f(v) - g(w)$ sur l'espace vectoriel $V \oplus W$ représente 0.

Il est clair que (i) implique (ii) puisque si $a = f(v) = g(w)$, avec v et w non nuls, alors $h(v, w) = 0$.

Inversement, si $(v, w) \neq 0$ et $a := f(v) = g(w)$, alors,
- ou bien $a \neq 0$, auquel cas v et w sont non nuls et on a (i) ;
- soit $a = 0$. Supposons par exemple $v \neq 0$. Par b), f représente tout élément de $\mathbf{K}$. Comme g est non dégénérée et que $W \neq 0$, il existe $w' \in W - \{0\}$ avec $g(w') \neq 0$. Alors $g(w')$ est représenté par f et par g et on a encore (i).

Exercice 2. *On fixe un entier $n \geq 4$. Pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varphi(g)$ le nombre de points fixes de la permutation g et on pose, pour tout entier $m \geq 0$,*

$$\varpi(m) := \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \varphi(g)^m.$$

a) Calculer $\varpi(1)$, $\varpi(2)$, $\varpi(3)$ et $\varpi(4)$.

Comme dans la preuve de la prop. IV.2.16 du cours, pour tout $a \in \{1, \dots, n\}$, on pose $g_a = 0$ si $g(a) \neq a$, et $g_a = 1$ si $g(a) = a$. On a

$$\sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \varphi(g) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \sum_{a=1}^{n} g_a = \sum_{1 \leq a \leq n} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g_a = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Pour $\varpi(2)$, ça a été vu en cours : c'est $2n!$.

Pour $\varpi(3)$, on a de nouveau

$$\begin{aligned}
\varpi(3) &= \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \Big(\sum_{a=1}^{n} g_a \Big)^3 \\
&= \sum_{1 \leq a,b,c \leq n} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g_a g_b g_c \\
&= \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c\}=1} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g_a g_b g_c + \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c\}=2} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g_a g_b g_c + \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c\}=3} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g_a g_b g_c \\
&= n \cdot (n-1)! + 6\binom{n}{2} \cdot (n-2)! + 6\binom{n}{3} \cdot (n-3)! = 5n!.
\end{aligned}$$

1. On peut montrer que toute forme quadratique sur $\mathbf{Q}$ en au moins 5 variables et qui n'est pas définie (positive ou négative) représente 0.

Pour $\varpi(4)$, on a

$$\begin{aligned}
\varpi(4) &= \sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\Big(\sum_{a=1}^n g_a\Big)^4 \\
&= \sum_{1\le a,b,c,d\le n}\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} g_ag_bg_cg_d \\
&= \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c,d\}=1}\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} g_ag_bg_cg_d + \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c,d\}=2}\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} g_ag_bg_cg_d + \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c,d\}=3}\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} g_ag_bg_cg_d \\
&\qquad + \sum_{\mathrm{Card}\{a,b,c,d\}=4}\ \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} g_ag_bg_cg_d \\
&= n! + \Big(8+\binom{4}{2}\Big)\binom{n}{2}\cdot(n-2)! + 3\cdot 12\binom{n}{3}\cdot(n-3)! + 4!\binom{n}{4}\cdot(n-4)! = 15n!.
\end{aligned}$$

Pour être sûr de ne pas se tromper, on peut aussi remarquer que ce nombre s'écrit visiblement $c\cdot n!$, avec c indépendant de $n\ge 4$, et calculer c en faisant $n=4$ en utilisant les cardinaux des classes de conjugaison donnés dans le §IV.2.1 :

$$\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\varphi(g)^4 = 1\cdot 4^4 + 6\cdot 2^4 + 8\cdot 1^4 = 256+96+8 = 360 = 15\cdot 4!.$$

b) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère sur l'espace vectoriel $V=\mathbf{C}^n$ par permutation des coordonnées. Il opère aussi sur $V\otimes V$ par

$$\forall g\in G\ \ \forall v,w\in V \qquad g\cdot(v\otimes w) = g(v)\otimes g(w).$$

Décomposer cette représentation $V\otimes V$ de $\mathfrak{S}_n$ en somme de représentations irréductibles.

On a

$$V\otimes V = (V_0\oplus\mathbf{C}_{\mathrm{triv}})\otimes(V_0\oplus\mathbf{C}_{\mathrm{triv}}) = (V_0\otimes V_0)\oplus V_0\oplus V_0\oplus\mathbf{C}_{\mathrm{triv}}$$

et on a vu en cours que les représentations V_0 et $\mathbf{C}_{\mathrm{triv}}$ sont irréductibles (prop. IV.2.16). On peut calculer la multiplicité de $\mathbf{C}_{\mathrm{triv}}$ dans $V\otimes V$ par

$$\langle\chi_{V\otimes V},\chi_{\mathrm{triv}}\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{tr}(\rho_{V\otimes V}(g^{-1})) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{tr}(\rho_V(g^{-1}))^2 = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\varphi(g)^2 = 2$$

par a). De même, on calcule la multiplicité de V_0 dans $V\otimes V$ par

$$\langle\chi_{V\otimes V},\chi_{V_0}\rangle = \langle\chi_{V\otimes V},\chi_V-\chi_{\mathrm{triv}}\rangle = -2+\frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{tr}(\rho_{V\otimes V}(g^{-1}))\,\mathrm{tr}(\rho_V(g)) = -2+\frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\varphi(g)^3 = 3$$

par a). On peut donc écrire

$$V\otimes V = V_1^{n_1}\oplus\cdots\oplus V_r^{n_r}\oplus V_0^3\oplus\mathbf{C}_{\mathrm{triv}}^2$$

où $V_1,\dots,V_r$ sont d'autres représentations irréductibles. On calcule alors

$$\langle\chi_{V\otimes V},\chi_{V\otimes V}\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathfrak{S}_n}\varphi(g)^4 = 15$$

par a), avec $\langle\chi_{V\otimes V},\chi_{V\otimes V}\rangle = n_1^2+\cdots+n_r^2+3^2+2^2$. On en déduit $r=2$ et $n_1=n_2=1$. On a finalement

$$V\otimes V = \mathbf{C}_{\mathrm{triv}}^2\oplus V_0^3\oplus V_1\oplus V_2.$$

Complément : on a $V_0\otimes V_0 = S^2V_0\oplus\bigwedge^2 V_0$ et on peut montrer que la représentation $\bigwedge^2 V_0$ est irréductible (exerc. IV.2.22). C'est donc (par exemple) V_1 (de dimension $n(n-1)/2$), d'où $S^2V_0 = \mathbf{C}_{\mathrm{triv}}\oplus V_0\oplus V_2$, avec $\dim(V_2) = n^2-2-3(n-1)-(n-1)(n-2)/2 = n(n-3)/2$ (lorsque $n=4$ ou 5, c'est la représentation notée V dans le cours).

Exercice 3. *Soit V l'espace vectoriel réel des matrices 4×4 antisymétriques réelles.*
a) Montrer que le pfaffien définit une forme quadratique f sur V dont on déterminera la signature.

La formule donnée dans l'ex. III.4.2 des notes de cours pour le pfaffien d'une matrice 4×4 montre que c'est une forme quadratique qui fait de V une somme de 3 plans hyperboliques. La signature est donc $(3, 3)$.

b) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(4, \mathbf{R})$ *sur* E *définie par* $P \cdot M = P\,M\,{}^tP$ *induit un morphisme de groupes* $\varphi : \mathrm{SL}(4, \mathbf{R}) \to \mathrm{O}(V, f)$.

Le lemme III.4.5 dit que $\mathrm{Pf}(P \cdot M) = \mathrm{dét}(P)\,\mathrm{Pf}(M)$. L'automorphisme $\varphi(P)$ est donc bien une isométrie si $\mathrm{dét}(P) = 1$.

c) Déterminer le noyau de φ.

Si $P \in \ker(\varphi)$, on a $P\,M\,{}^tP = M$ pour toute matrice M 4×4 antisymétrique. Prenons $M = A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$. Comme

$$PE_{ij} = \sum_k p_{ki} E_{kj}, \tag{1}$$

on obtient, pour $k \leq l$, $p_{ki}p_{lj} - p_{kj}p_{li} = 0$ sauf si $k = i$ et $l = j$, auquel cas cette quantité vaut $p_{ii}p_{jj} - p_{ij}p_{ji} = 1$.

Prenons $k = i$ et $l = a \notin \{i, j\}$. On obtient $p_{ii}p_{aj} - p_{ij}p_{ai} = 0$. Prenons $l = j$ et $k = a$. On obtient $p_{ai}p_{jj} - p_{aj}p_{ji} = 0$. Comme $p_{ii}p_{jj} - p_{ij}p_{ji} = 1 \neq 0$, on obtient $p_{ai} = p_{aj} = 0$ (la matrice P est diagonale) puis $p_{ii}p_{jj} = 1$: la matrice P est $\pm I_4$. On a donc $\ker(\varphi) = \{I_4, -I_4\}$.

d) Que peut-on de l'image de φ *?*

On peut dire que φ n'est pas surjectif car $\mathrm{SL}(4, \mathbf{R})$ est connexe (exerc. II.2.3) tandis que $\mathrm{O}(V, f) = \mathrm{O}(3, 3)$ ne l'est pas. Son image est donc au moins contenue dans $\mathrm{SO}(3, 3)$, et même mieux, dans la composante connexe de Id, qui a été notée $\mathrm{SO}'(3, 3)$ dans le cours (ex. II.8.10.2°). On peut montrer que l'image de φ est exactement $\mathrm{SO}'(3, 3)$, mais je ne connais pas de démonstration élémentaire. Cela entraîne que $\mathrm{SL}(4, \mathbf{R})$ est le groupe $\mathrm{Spin}'(3, 3)$ mentionné dans la rem. II.6.11 des notes de cours.

On pose $J := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et on note* $H \subset V$ *l'hyperplan orthogonal à* J *pour la forme quadratique* f.

e) Quelle est la signature de la restriction de la forme quadratique f *à* H *?*

Comme $f(J) = \mathrm{Pf}(J) = -1 > 0$, la signature sur l'orthogonal H est $(3, 2)$.

f) Que pouvez-vous dire du groupe $\varphi(\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R}))$ *?*

Si $P \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$, on a $\varphi(P)(J) = J$, donc $\varphi(P)$ laisse aussi stable H. Le groupe $\varphi(\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R}))$ est donc contenu dans $\mathrm{O}(H, f|_H) \simeq \mathrm{O}(3, 2)$. De nouveau, il n'y a pas égalité puisque $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$ est connexe (exerc. II.7.5) mais pas $\mathrm{O}(3, 2)$. On a $\varphi(\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})) \subset \mathrm{SO}'(3, 2)$ et on peut montrer qu'il y a égalité. Cela entraîne que $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$ est le groupe $\mathrm{Spin}'(3, 2)$ mentionné dans la rem. II.6.11 des notes de cours.

Exercice 4. *Soit* V *un espace vectoriel réel de dimension finie* $n > 0$ *et soit* d *un entier positif.*

a) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* V. *Donner une base naturelle* $\mathscr{B}_d$ *de l'espace vectoriel* S^dV.

La famille des $P(e_1, \dots, e_n)$, où P décrit l'ensemble des monômes (unitaires) de degré d en n variables, est une base de S^dV (§III.5 des notes de cours).

b) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tels que, si* P *et* Q *sont des monômes (unitaires) de degré* d *en* n *variables, alors* $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *si et seulement si* $P = Q$.

Cela revient à dire que $\mathbf{R}^n$ n'est pas la réunion des sous-ensembles définis par les équations $(P - Q)(x) = 0$, lorsque (P, Q) décrit l'ensemble (fini) des paires de monômes distincts de degré d en n variables. C'est en fait vrai pour tout corps infini, mais pour $\mathbf{R}$, il y a plein de méthodes qui montrent ça. On peut prendre par exemple pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n premiers nombres premiers et utiliser l'unicité de la décomposition en produit de nombres premiers.

c) Montrer que $\mathrm{GL}(V)$ *agit naturellement sur l'espace vectoriel* S^dV. *On en déduit une représentation* ρ_d *de* $\mathrm{GL}(V)$ *dans* S^dV.

On envoie un automorphisme g de V sur l'automorphisme de S^dV noté S^dg dans le cours.

d) Soit W *un sous-espace vectoriel non nul de* S^dV *stable par l'action de* $\mathrm{GL}(V)$. *Montrer qu'il existe un sous-ensemble de la base* $\mathscr{B}_d$ *qui engendre* W *(Indication : on pourra considérer l'automorphisme* g *de* V *qui envoie* e_i *sur* $\lambda_i e_i$*).*

Soit $w \in W - \{0\}$. Si on décompose w dans la base $\mathscr{B}_d$ de S^dV, on voit qu'on obtient $\rho_d(g)^k(w)$ (qui est dans W) en élevant les coordonnées de w à la puissance k. Comme les valeurs propres de $\rho_d(g)$ sont toutes distinctes par b), leur déterminant de Vandermonde est non nul et W contient tous les éléments de $\mathscr{B}_d$ sur lesquels w a une coordonnée non nulle. Il s'ensuit que W est engendré par un sous-ensemble de $\mathscr{B}_d$.

e) En déduire que la représentation ρ_d *est irréductible.*

Le choix de la base $\mathscr{B}$ est arbitraire. On peut la remplacer par $(e_1 + e_1, \dots, e_n + e_1)$. Par d), W contient un $(e_{i_1} + e_1) \cdots (e_{i_d} + e_1)$. Comme ce vecteur a une composante non nulle sur e_1^d et que e_1 est quelconque non nul, on a $v^d \in W$ pour tout $v \in V$. On développant $(e_1 + \cdots + e_n)^d$, on voit qu'aucun des coefficients de ce vecteur dans la base $\mathscr{B}_d$ n'est nul, donc $W = S^dV$.

Exercice 5. *Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe fini dont le cardinal est une puissance de p. Montrer que toute représentation irréductible de G dans un espace vectoriel sur un corps de caractéristique p est de dimension 1.*

Voici une preuve par récurrence sur $|G|$ (le résultat étant trivial si $|G| = 1$). Une autre preuve est proposée dans les notes de cours (exerc. IV.2.10).

Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G sur un corps de caractéristique p. Soit $g \in G$ et soit p^n le cardinal de G. On a $g^{p^n} = e$, donc $\rho(g)^{p^n} = \mathrm{Id}_V$, soit $(\rho(g) - \mathrm{Id}_V)^{p^n} = 0$. L'endomorphisme $\rho(g) - \mathrm{Id}_V$ n'est donc pas injectif (puisque $V \neq 0$).

Si g est dans le centre $Z(G)$ de G, pour tout $h \in G$, le noyau de $\rho(g) - \mathrm{Id}_V$ est stable par $\rho(h)$. Ce noyau est donc une sous-représentation de (V, ρ), qui lui est égale puisque (V, ρ) est irréductible. Mais $\rho(Z(G))$ est alors trivial, donc ρ se factorise en une représentation irréductible du p-groupe $G/Z(G)$. Par la prop. I.2.11. du cours, ce groupe est de cardinal $< |G|$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.