Introduction à la géométrie algébrique

Olivier Debarre

Table des matières

Introduction

Ces notes sont celles de deux cours de D.E.A. de 20 heures chacun donnés à l'Université Louis Pasteur en 1999/2000. Je me suis inspiré des ouvrages [**H**], [**Ha**], [**M**], [**P**] et [**S**], mon but étant de donner une idée des résultats et concepts de base de la géométrie des variétés algébriques quasi-projectives sur un corps $\mathbf{k}$ *algébriquement clos.* À part les définitions de base, nous avons admis les résultats suivants d'algèbre commutative :

- **Nullstellenstaz :** soit I un idéal de $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$; on a $I(V(I)) = \sqrt{I}$.
- **Hauptidealsatz :** soient A une $\mathbf{k}$-algèbre intègre de type fini, f un élément non nul de A et $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal contenant f. On a
$$\text{deg.tr.}_{\mathbf{k}} K(A/\mathfrak{p}) = \text{deg.tr.}_{\mathbf{k}} K(A) - 1.$$
- **Factorialité des anneaux réguliers :** toute $\mathbf{k}$-algèbre locale de type fini A dont l'idéal maximal peut être engendré par $\dim A$ éléments est un anneau factoriel.

CHAPITRE 1

Variétés affines

On fixe un corps $\mathbf{k}$ et un entier n. On note A l'anneau $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_n]$ des polynômes à n indéterminées à coefficients dans $\mathbf{k}$.

1.1. Sous-variétés affines

Si $F(T_1, \dots, T_n)$ est un élément de A, on dit qu'un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{k}^n$ est un *zéro* de F si $F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

DÉFINITION 1.1. *Soit S une partie de l'anneau de polynômes A. On note $V(S)$ le sous-ensemble de $\mathbf{k}^n$ formé des zéros communs à tous les éléments de S. Les sous-ensembles de $\mathbf{k}^n$ de ce type sont les* sous-variétés affines *de $\mathbf{k}^n$.*

EXEMPLES 1.2. 1) On a $V(1) = \varnothing$ et $V(\varnothing) = V(0) = \mathbf{k}^n$: le vide et l'espace tout entier sont des sous-variétés affines de $\mathbf{k}^n$.

2) Un point de $\mathbf{k}^n$ est une sous-variété affine, puisque $V(T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) = \{(x_1, \dots, x_n)\}$. Plus généralement, tout sous-espace affine de $\mathbf{k}^n$ est une sous-variété affine.

3) Dans $\mathbf{k}^2$, on a $V(T_1^2) = V(T_1)$: c'est l'axe des y. Des parties différentes peuvent donner la même sous-variété affine.

Remarquons que $S' \subset S$ entraîne $V(S) \subset V(S')$ (les inclusions changent de sens). D'autre part, si $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S (c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies $\sum F_i G_i$, avec F_i dans S, et G_i quelconque dans A), on a $V(S) = V(\langle S \rangle)$. L'anneau A étant *noethérien*, l'idéal $\langle S \rangle$ est engendré par un nombre fini de polynômes $F_1, \dots, F_r$, de sorte que

$$V(S) = V(\langle S \rangle) = V(F_1, \dots, F_r).$$

En d'autres termes, toute sous-variété affine de $\mathbf{k}^n$ peut être définie par un nombre fini d'équations.

PROPOSITION 1.3. a) *Toute intersection de sous-variétés affines de $\mathbf{k}^n$ est une sous-variété affine.*

b) *Toute réunion finie de sous-variétés affines de $\mathbf{k}^n$ est une sous-variété affine.*

DÉMONSTRATION. Pour a), il suffit de remarquer que $\bigcap_\alpha V(S_\alpha) = V(\bigcup_\alpha S_\alpha)$. Pour b), il suffit de remarquer que la réunion $V(S_1) \cup V(S_2)$ est égale à $V(S_1 S_2)$, où $S_1 S_2$ désigne l'ensemble des produits d'un élément de S_1 avec un élément de S_2 (si $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$, il existe F_1 dans S_1 et F_2 dans S_2 avec $F_1(x)$ et $F_2(x)$ non nuls, de sorte que $F_1 F_2(x)$ est non nul, et $x \notin V(S_1 S_2)$). $\square$

En particulier, tout sous-ensemble fini de $\mathbf{k}^n$ est une sous-variété affine.

La proposition permet de définir une *topologie*, dite de Zariski, sur l'ensemble $\mathbf{k}^n$, en prenant comme fermés les sous-variétés affines. C'est une topologie très différente des topologies usuelles ; en particulier, elle n'est pas séparée. Pire : si $\mathbf{k}$ est infini, deux ouverts non vides quelconques se rencontrent (*cf.* cor. 1.9 ; si $\mathbf{k}$ est fini, la topologie de Zariski est la topologie discrète et ne présente aucun intérêt). En gros, les ouverts sont très gros, et les fermés très petits. Par exemple, dans $\mathbf{k}$, les fermés sont $\varnothing$, $\mathbf{k}$, et les sous-ensembles finis.

On munit toute sous-variété affine de $\mathbf{k}^n$ de la topologie induite par la topologie de Zariski de $\mathbf{k}^n$.

1.2. Idéal d'une sous-variété affine

On a vu qu'une même sous-variété affine V pouvait être définie par des parties différentes de A (en d'autres termes, par des équations différentes). Il existe cependant un moyen naturel d'associer un idéal de A à V.

DÉFINITION 1.4. *Soit V un sous-ensemble de $\mathbf{k}^n$; on appelle idéal de V, et l'on note $I(V)$, l'ensemble des polynômes nuls sur V.*

On a les propriétés suivantes :

1) $V \subset V(I(V))$, avec égalité si et seulement si V est affine. En fait, $V(I(V))$ est l'adhérence de V (pour la topologie de Zariski).
2) $S \subset I(V(S))$, mais il n'y a en général pas égalité, même lorsque S est un idéal ; par exemple $I(V(\langle T_1^2 \rangle)) = \langle T_1 \rangle$. La relation entre I et $I(V(I))$ est l'objet du Nullstellensatz, que nous verrons plus bas.

1.5. On peut traduire le fait que l'anneau A est *noethérien* de façon géométrique : *toute suite décroissante de sous-variétés affines est stationnaire.* En effet, si (V_i) est une telle suite, la suite d'idéaux $(I(V_i))$ est croissante, donc stationnaire. Il en est de même de la suite (V_i) par la propriété 1) ci-dessus. En particulier, toute sous-variété affine est *quasi-compacte.*

1.3. Irréductibilité

La sous-variété affine de $\mathbf{k}^2$ définie par $T_1T_2 = 0$ se décompose en la réunion des axes de coordonnées, qui sont eux-mêmes affines, mais qu'on ne peut, si $\mathbf{k}$ est infini, décomposer à leur tour en une réunion finie d'affines. C'est cette remarque que l'on veut généraliser.

DÉFINITION 1.6. *On dit qu'un espace topologique E est* irréductible *s'il n'est pas vide et qu'il n'est pas réunion de deux fermés distincts de E.*

On vérifie facilement que si E est non vide, E est irréductible si et seulement si deux ouverts non vides quelconques se rencontrent, c'est-à-dire si et seulement si tout ouvert non vide est dense.

Le théorème suivant fournit une traduction en termes algébriques de l'irréductibilité d'une sous-variété affine.

THÉORÈME 1.7. *Pour qu'une sous-variété affine soit irréductible, il faut et il suffit que son idéal soit premier.*

DÉMONSTRATION. Soit V une sous-variété affine irréductible ; considérons des polynômes F et G tels que $FG \in I(V)$, c'est-à-dire que FG s'annule sur V. On a $V \subset V(FG) = V(F) \cup V(G)$, de sorte que V est la réunion des fermés $V \cap V(F)$ et $V \cap V(G)$. Comme V est irréductible, l'un d'eux est égal à V, de sorte que soit F, soit G s'annule sur V : soit F, soit G est dans $I(V)$.

Pour la réciproque, on suppose l'idéal $I(V)$ premier mais V réunion de deux fermés propres V_1 et V_2. Comme $V_i \subsetneq V$, on a $I(V) \subsetneq I(V_i)$ et il existe un polynôme F_i nul sur V_i mais pas sur V, de sorte que $F_i \notin I(V)$, mais $F_1F_2 \in I(V)$, ce qui contredit le fait que $I(V)$ est premier. □

1.8. On peut aussi exprimer la condition du théorème en demandant que l'algèbre quotient $A(V) = A/I(V)$, dite *algèbre de* V, soit *intègre*.

Corollaire 1.9. *Si* $\mathbf{k}$ *est infini,* $\mathbf{k}^n$ *est irréductible.*

Démonstration. Puisque $\mathbf{k}$ est infini, tout polynôme nul sur $\mathbf{k}^n$ est nul, de sorte que $I(\mathbf{k}^n) = (0)$, qui est premier. □

Théorème 1.10. *Toute sous-variété affine non vide se décompose de façon unique (à permutation près) en une réunion finie de sous-variétés affines irréductibles, non contenues l'une dans l'autre.*

Démonstration. Existence : supposons qu'il existe une sous-variété V non vide qui ne se décompose pas en une réunion finie d'irréductibles ; d'après (1.5), l'ensemble de ces sous-variétés admet un élément minimal V, qui est forcément réductible. On écrit $V = V_1 \cup V_2$, avec V_i fermé non vide distinct de V. Par minimalité, V_i est réunion finie d'irréductibles, d'où la contradiction. L'unicité est laissée au lecteur en exercice. □

Les sous-variétés irréductibles $V_1, \ldots, V_r$ apparaissant dans la décomposition du théorème sont appelées les *composantes irréductibles de* la sous-variété affine V. On a $I(V) = \bigcap_i I(V_i)$ et les idéaux $I(V_i)$ sont premiers. C'est un exemple de décomposition primaire d'un idéal de A.

1.4. Le Nullstellensatz

C'est un premier résultat fondamental. Je réfère par exemple à [**H**] pour diverses démonstrations. Si I est un idéal de A, l'idéal

$$\sqrt{I} = \{F \in A \mid \exists m \in \mathbf{N}^* \quad F^m \in I\}$$

est appelé *radical* de I. Les sous-variétés $V(I)$ et $V(\sqrt{I})$ coïncident. On dit qu'un idéal I est radical s'il est égal à $\sqrt{I}$. Un idéal premier est radical. Un idéal I de A est radical si et seulement si le seul élément nilotent de A/I est 0. L'idéal d'une sous-variété affine est radical. En particulier, on a

$$\sqrt{I} \subset I(V(I)).$$

Le Nullstellensatz précise cette relation.

Théorème 1.11 (Nullstellensatz). *On suppose* $\mathbf{k}$ *algébriquement clos. Pour tout idéal* I *de* A*, on a* $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

En particulier, $V(I)$ est vide si et seulement si $I = A$.

Corollaire 1.12. *L'application* $V \mapsto I(V)$ *réalise une bijection décroissante, de réciproque* $I \mapsto V(I)$ *entre*

a) les sous-variétés affines de $\mathbf{k}^n$ *et les idéaux radicaux de* A *;*
b) les sous-variétés affines irréductibles de $\mathbf{k}^n$ *et les idéaux premiers de* A *;*
c) les points de $\mathbf{k}^n$ *et les idéaux maximaux de* A.

Démonstration. Seul le point c) mérite une explication. L'idéal $\mathfrak{m}_x$ d'un point $x \in \mathbf{k}^n$ est maximal car c'est le noyau du morphisme $A \to \mathbf{k}$, $P \mapsto P(x)$. Inversement, si $\mathfrak{m} \subset A$ est un idéal maximal, on a $\mathfrak{m} \neq A$, donc $V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$; si $x \in V(\mathfrak{m})$, on a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_x$ et il y a égalité par maximalité de $\mathfrak{m}$. □

Un cas particulier important est le suivant.

Définition 1.13. *On appelle hypersurface de $\mathbf{k}^n$ toute sous-variété affine définie par un polynôme non constant.*

Ce sont donc les sous-variétés du type $V(F)$, avec $F \in A \smallsetminus \mathbf{k}$. Si F est irréductible, l'idéal $\langle F \rangle$ est premier et le Nullstellensatz entraîne que lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, $V(F)$ est irréductible (comparer avec l'exercice 1.6.8)b)). Comme A est factoriel, on peut décomposer F de façon unique en un produit $F = \prod_i F_i^{n_i}$, avec F_i irréductible. En particulier, les $V(F_i)$ sont les composantes irréductibles de $V(F)$.

On peut étendre la correspondance du corollaire aux sous-variétés d'une sous-variété affine quelconque. Pour cela, considérons des sous-variétés affines W et V avec $W \subset V$. On a $I(V) \subset I(W)$, de sorte que $I(W)$ est l'image inverse par la surjection $\pi\colon A \to A(V)$ d'un idéal de $A(V)$, que l'on note $I_V(W)$.

Théorème 1.14. *On suppose $\mathbf{k}$ algébriquement clos. Soit V une variété affine. L'application $W \mapsto I_V(W)$ réalise une bijection décroissante, de réciproque $I \mapsto V(\pi^{-1}(I))$ entre*

a) les sous-variétés affines de V et les idéaux radicaux de $A(V)$;

b) les sous-variétés affines irréductibles de V et les idéaux premiers de $A(V)$;

c) les points de V et les idéaux maximaux de $A(V)$.

Démonstration. Soit x un point de V ; l'idéal $I_V(x)$ (souvent noté $\mathfrak{m}_x$) des polynômes nuls en x est maximal dans $A(V)$: c'est le noyau du morphisme $A(V) \to \mathbf{k}$ qui à $[F]$ associe $F(x)$. Cela démontre une partie de c). Pour le reste, il suffit de remarquer qu'un idéal I de $A(V)$ est radical (resp. premier) (resp. maximal) si et seulement si $\pi^{-1}(I)$ l'est, puisque ces propriétés se lisent sur le quotient $A(V)/I$, qui est isomorphe à $A/\pi^{-1}(I)$. □

1.15. En particulier, les composantes irréductibles de V correspondent aux idéaux premiers minimaux de $A(V)$ et celles de W aux idéaux premiers minimaux de $A(V)$ contenant $I_V(W)$.

Mentionnons un exemple important d'application du Nullstellensatz. C'est l'analogue des partitions de l'unité en analyse.

Proposition 1.16. *On suppose $\mathbf{k}$ algébriquement clos. Soit V une sous-variété affine et soient $f_1, \dots, f_r$ des éléments de $A(V)$ sans zéro commun. Il existe des éléments $g_1, \dots, g_r$ de $A(V)$ tels que $\sum f_i g_i = 1$ (dans $A(V)$).*

Démonstration. En d'autres termes, des éléments de $A(V)$ sans zéro commun engendrent $A(V)$. Soient $F_{r+1}, \dots, F_s$ des générateurs de $I(V)$. Les polynômes $F_1, \dots, F_r, F_{r+1}, \dots, F_s$ (où $F_j \in A$ est un polynôme de classe $f_j \in A(V)$ pour $1 \leq j \leq r$) n'ont pas de zéro commun dans $\mathbf{k}^n$; le Nullstellensatz entraîne que le radical de l'idéal qu'ils engendrent est A, donc contient 1. Il existe donc des polynômes $G_1, \dots, G_s$ tels que $\sum_{i=1}^{s} F_i G_i = 1$. Il suffit de considérer cette égalité modulo $I(V)$ pour conclure. □

1.5. Applications régulières

Comme nous avons défini une *topologie* sur les sous-variétés affines, celle de Zariski, on pourrait croire que les applications *continues* pour cette topologie jouent un rôle important. Il n'en est rien. Considérons une “courbe” plane irréductible C, c'est-à-dire le lieu des zéros d'un polynôme irréductible à deux variables. Il ressort de l'exercice 1.6.8) que les fermés de C sont C, $\varnothing$, et les sous-ensembles finis de C. Cette topologie ne reflète pas la géométrie de C : deux telles courbes sont toujours homéomorphes, puisque toute bijection est continue.

Les applications qui nous intéressent sont les suivantes.

Définition 1.17. *Soient $V \subset \mathbf{k}^n$ et $W \subset \mathbf{k}^m$ des sous-variétés affines. Une application $V \to W$ est dite* régulière *si c'est la restriction à V d'une application $\mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$ dont les composantes sont des fonctions polynomiales.*

On en déduit immédiatement que l'algèbre $A(V)$, définie en (1.8), s'identifie à l'ensemble des fonctions régulières de V dans $\mathbf{k}$. Si $u \colon V \to W$ est une application régulière, on lui associe un morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $u^* \colon A(W) \to A(V)$ par la règle $f \mapsto f \circ u$.

Exemples 1.18. 1) Toute application affine est régulière.

2) Toute application régulière est continue pour la topologie de Zariski.

3) Supposons $\mathbf{k}$ infini. Soit C l'hypersurface plane d'équation $Y = X^2$; on vérifie que le polynôme $X^2 - Y$ est irréductible, ce qui entraîne $I(C) = \langle X^2 - Y \rangle$ (utiliser l'exercice 1.6.8)b), ou le Nullstellensatz lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos). L'application $f \colon C \to \mathbf{k}$ définie par $f(x, y) = x$ est régulière et bijective. Son inverse $x \mapsto (x, x^2)$ est aussi régulière : on dit que f est un *isomorphisme*. Le morphisme $f^* \colon \mathbf{k}[T] \to \mathbf{k}[X, Y]/(X^2 - Y)$ est défini par $f^*(T) = \overline{X}$.

4) Supposons toujours $\mathbf{k}$ infini. Soit C l'hypersurface plane d'équation $X^2 = Y^3$ (c'est une cubique à point de rebroussement) ; l'application $u \colon \mathbf{k} \to C$ définie par $u(t) = (t^3, t^2)$ est régulière bijective, mais on verra plus loin que ce n'est pas un isomorphisme. On vérifie que l'idéal de C est $\langle X^2 - Y^3 \rangle$ (exerc. 1.6.7)a) ; le morphisme $u^* \colon \mathbf{k}[X, Y]/(X^2 - Y^3) \to \mathbf{k}[T]$ est défini par $u^*(\overline{X}) = T^3$ et $u^*(\overline{Y}) = T^2$.

5) On suppose $\mathbf{k}$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. L'application $u \colon \mathbf{k} \to \mathbf{k}$ définie par $u(x) = x^p$ (dite « de Frobenius ») est régulière bijective, mais n'est pas un isomorphisme, comme on le verra plus loin. Le morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $u^* \colon \mathbf{k}[T] \to \mathbf{k}[T]$ est défini par $u^*(T) = T^p$.

Proposition 1.19. *Soient V et W des sous-variétés affines. L'application $u \mapsto u^*$ réalise une bijection entre l'ensemble des applications régulières de V dans W et l'ensemble des morphismes de $\mathbf{k}$-algèbres de $A(W)$ dans $A(V)$. En particulier, pour que V et W soient isomorphes, il faut et il suffit que les $\mathbf{k}$-algèbres $A(V)$ et $A(W)$ le soient.*

Démonstration. Supposons $V \subset \mathbf{k}^n$ et $W \subset \mathbf{k}^m$. On peut reconstruire u à partir de u^* de la façon suivante : si $y_1, \ldots, y_m$ sont les fonctions coordonnées sur $\mathbf{k}^m$, on a $u = (u^*(y_1), \ldots, u^*(y_m))$. Cela montre que l'application $u \mapsto u^*$ est injective.

On peut faire cette construction en partant de n'importe quel morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\varphi \colon A(W) \to A(V)$. On obtient ainsi une application régulière $u \colon V \to \mathbf{k}^m$, dont on vérifie qu'elle est à valeurs dans W : pour tout polynôme F nul sur W, on a

$$F(u(x)) = F(\varphi(y_1)(x), \ldots, \varphi(y_m)(x)) = \varphi(F(y_1, \ldots, y_m))(x) = 0,$$

puisque F est nul dans $A(W)$. Cela montre que l'application $u \mapsto u^*$ est surjective. □

Dans l'exemple 1.18.3), f^* est bien un isomorphisme, d'inverse donné par $\overline{X} \mapsto T$ et $\overline{Y} \mapsto T^2$. En revanche, dans les exemples 4) et 5), u^* n'est pas surjectif, puisque T n'est pas atteint, et u n'est pas un isomorphisme.

On a vu dans le théorème 1.14 qu'il existe une bijection entre les idéaux maximaux de $A(V)$ et les points de V ; la donnée de la $\mathbf{k}$-algèbre $A(V)$ permet donc de reconstruire l'ensemble V, mais il manque encore sa topologie.

Pour terminer, on peut lire certaines des propriétés de l'application u sur le morphisme u^*.

Définition 1.20. *Une application régulière entre sous-variétés affines est dite* dominante *si son image est dense.*

Proposition 1.21. *Soient V et W des sous-variétés affines.*

a) *Pour qu'une application régulière $u\colon V \to W$ soit* dominante*, il faut et il suffit que u^* soit injectif.*

b) *Si u^* est surjectif, u est injective.*

Démonstration. Supposons u dominante. Si f dans le noyau de u^*, la fonction régulière $f \circ u$ est nulle, de sorte que f s'annule sur $u(V)$, donc sur son adhérence W. Réciproquement, si u n'est pas dominante, le fermé $\overline{u(V)}$ est distinct de W ; il existe donc une fonction régulière $f\colon W \to \mathbf{k}$ nulle sur $u(V)$ mais pas sur W. Elle est donc dans le noyau de u^*, ce qui prouve a).

Soient x et y des points distincts de V. Il existe une fonction régulière $f\colon V \to \mathbf{k}$ nulle en x mais pas en y (prendre par exemple une fonction coordonnée). Si u^* est surjective, il existe une fonction régulière $g\colon W \to \mathbf{k}$ telle que $f = u^*(g) = g \circ u$; elle ne prend pas les mêmes valeurs en $u(x)$ et $u(y)$, qui sont donc distincts. □

Il s'ensuit que si $u\colon V \to W$ est une application régulière dominante et que V est irréductible, W est irréductible, puisque $A(W)$ s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre intègre $A(V)$ donc est intègre (cela peut aussi se voir directement ; *cf.* exerc. 1.6.3)b)).

Remarques 1.22. Dans a), u n'est pas nécessairement surjective (considérer par exemple la projection de l'hyperbole $XY = 1$ sur l'axe des x).

Dans b), la réciproque est fausse (considérer l'exemple 1.18.4). En fait, on peut montrer que u^* est surjective si et seulement si $u(V)$ est une sous-variété fermée de W et u induit un isomorphisme de V sur $u(V)$.

1.6. Exercices

1) Montrer que le sous-ensemble $\{(t, e^t) \mid t \in \mathbf{C}\}$ de $\mathbf{C}^2$ n'est pas affine.

2) Calculer l'idéal de $\{(0,0), (0,1)\}$ dans $\mathbf{k}^2$.

3) a) Soit E un espace topologique et soit V une partie de E. Montrer que V (munie de la topologie induite) est irréductible si et seulement si $\overline{V}$ l'est.

b) Soient E et F des espaces topologiques et soit $u\colon E \to F$ une application continue dominante. Si E est irréductible, montrer que F l'est aussi.

4) Soit E un espace topologique ; on suppose que E est recouvert par un nombre fini d'ouverts irréductibles qui se rencontrent deux à deux. Montrer que E est irréductible.

5) Soit $\mathbf{k}$ un corps *infini*. Montrer que la sous-variété affine de $\mathbf{k}^3$ définie par les équations $X^2 = YZ$ et $XZ = X$ a 3 composantes irréductibles.

6) Soit $\mathbf{k}$ un corps *infini* ; montrer que tout ensemble fini dans $\mathbf{k}^2$ peut être défini par deux équations.

7) Soit $\mathbf{k}$ un corps *infini* et soit C la courbe plane d'équation $X^2 = Y^3$.

a) Montrer que C est irréductible et déterminer l'idéal de C.

b) Montrer que C n'est pas isomorphe à $\mathbf{k}$ (*Indication :* il suffit de montrer que l'anneau $A(C)$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{k}[T]$; remarquer par exemple qu'il n'est pas principal).

8) Soient F et G des éléments de $\mathbf{k}[X, Y]$ sans facteur commun.

a) Montrer que $V(F) \cap V(G)$ est fini (*Indication :* utiliser le théorème de Bézout dans l'anneau principal $\mathbf{k}(X)[Y]$ pour montrer l'existence de polynômes $A(X, Y)$, $B(X, Y)$ et $D(X)$, avec D non nul, tels que $D = AF + BG$).

b) En déduire que si F est irréductible et $V(F)$ *infini*, on a $I(V(F)) = \langle F \rangle$ et $V(F)$ est irréductible. Montrer par un exemple que $V(F)$ peut être réductible, même si F est irréductible.

CHAPITRE 2

Variétés projectives

On garde notre corps $\mathbf{k}$ et l'entier n. On note R l'anneau $\mathbf{k}[T_0, \ldots, T_n]$. On notera maintenant $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, ou simplement $\mathbf{A}^n$, l'espace affine de dimension n sur $\mathbf{k}$.

2.1. L'espace projectif

Considérons la relation d'équivalence suivante sur $\mathbf{k}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$: des vecteurs non nuls x et y sont équivalents s'ils sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ avec $y = \lambda x$.

Définition 2.1. *On appelle espace projectif de dimension n l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. On le note $\mathbf{P}^n_k$, ou simplement $\mathbf{P}^n$.*

En d'autres termes, $\mathbf{P}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Un point x de l'espace projectif correspond à un vecteur non nul $(x_0, \ldots, x_n)$; on appelle ses coordonnées les *coordonnées homogènes* de x, bien qu'elles ne soient définies qu'à multiplication par un scalaire non nul près. On trouve parfois la notation $(x_0 : \cdots : x_n)$.

Si E est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel non nul, on définit de la même façon l'espace projectif associé $\mathbf{P}E$. Si F est un sous-espace vectoriel non nul de E, l'inclusion $F \smallsetminus \{0\} \subset E \smallsetminus \{0\}$ induit une inclusion $\mathbf{P}F \subset \mathbf{P}E$. On appelle les sous-ensembles de $\mathbf{P}E$ ainsi obtenus les *sous-espaces linéaires* de $\mathbf{P}E$.

2.2. Pour chaque $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit un sous-ensemble U_i de $\mathbf{P}^n$ par « l'équation » $x_i \neq 0$. Chacun de ces sous-ensembles est isomorphe à l'espace affine $\mathbf{A}^n$, en envoyant $(x_0, \ldots, x_n)$ sur $(x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i)$, et ils recouvrent $\mathbf{P}^n$. Le complémentaire de U_i est l'espace linéaire $\mathbf{P}H_i$, où H_i est l'hyperplan d'équation $x_i = 0$ dans $\mathbf{k}^{n+1}$. On peut donc voir l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ comme obtenu à partir de $\mathbf{A}^n$ en adjoignant un « hyperplan à l'infini ». Par exemple, la droite projective $\mathbf{P}^1$ est obtenue en adjoignant à $\mathbf{k}$ un unique « point à l'infini ». Plus généralement, le complémentaire dans $\mathbf{P}^n$ de n'importe quel hyperplan projectif s'identifie naturellement à $\mathbf{A}^n$.

Considérons maintenant un sous-espace affine de $\mathbf{A}^n$, par exemple un hyperplan d'équation $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. L'isomorphisme de $\mathbf{A}^n$ avec U_0 l'identifie à une partie Λ de $\mathbf{P}^n$; on vérifie que le plus petit sous-espace linéaire qui contient Λ est l'hyperplan projectif d'équation homogène $a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. On l'appelle la « clôture projective » de Λ.

Proposition 2.3. *Fixons un hyperplan (« à l'infini ») H dans $\mathbf{P}^n$. On obtient une correspondance bijective entre les sous-espaces affines de $\mathbf{A}^n$ et les sous-espaces linéaires de $\mathbf{P}^n$ non contenus dans H en associant à Λ sa clôture projective $\overline{\Lambda}$. Cette correspondance respecte les dimensions. Son inverse est donné par $\overline{\Lambda} \mapsto \overline{\Lambda} \smallsetminus H$.*

La notation $\overline{\Lambda}$ n'est pas innocente : c'est l'adhérence de Λ pour la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n$ (que l'on définira plus bas).

2.4. On dit que des points de $\mathbf{P}^n$ sont *linéairement indépendants* si les droites de $\mathbf{k}^{n+1}$ qu'ils représentent sont en somme directe. En général, d points de $\mathbf{P}^n$ sont contenus dans un sous-espace linéaire de dimension au plus $d-1$; pour qu'ils soient linéairement indépendants, il faut et il suffit qu'ils ne soient pas contenus dans un sous-espace linéaire de dimension $d-2$. On dit que des points de $\mathbf{P}^n$ sont *en position générale* si, pour tout $m \leq n+1$, m quelconques d'entre eux sont linéairement indépendants.

Lorsque $\mathbf{k}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on peut munir $\mathbf{P}^n$ de la topologie quotient de celle de $\mathbf{k}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ (c'est-à-dire qu'un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n$ est fermé, ou ouvert, si et seulement si son image inverse par la projection $\mathbf{k}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ l'est). On vérifie alors que $\mathbf{P}^n$ est *compact*.

La proposition suivante illustre une des propriétés fondamentales de l'espace projectif : il n'y a plus de sous-espaces parallèles, ils se rencontrent maintenant toujours, peut-être « à l'infini ».

Proposition 2.5. *Soient Λ et Λ' des sous-espaces linéaires de $\mathbf{P}^n$, de dimension r et r' vérifiant $r + r' \geq n$. L'intersection $\Lambda \cap \Lambda'$ est un sous-espace linéaire de dimension $\geq r + r' - n$; elle est en particulier non vide.*

Démonstration. Écrivons $\Lambda = \mathbf{P}F$, $\Lambda' = \mathbf{P}F'$ et $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}E$, avec $\dim F = r+1$, $\dim F' = r'+1$ et $\dim E = n+1$. Comme $\dim F + \dim F' > \dim E$, l'intersection $F \cap F'$ est de dimension $\geq r + r' + 1 - n > 0$; elle est donc non nulle, et $\Lambda \cap \Lambda' = \mathbf{P}(F \cap F')$. □

Exemple 2.6. Considérons dans $\mathbf{A}^2$ les droites affines parallèles $x = 1$ et $x = 2$. Plongeons $\mathbf{A}^2$ dans $\mathbf{P}^2$ comme en 2.2. Les droites projectives associées sont d'équations $x = z$ et $x = 2z$ (on note (x, y, z) les coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}^2$) ; elles se coupent en le point « à l'infini » $(0, 1, 0)$.

2.2. Variétés projectives

On veut une définition analogue à celle des variétés affines. Le problème est que les coordonnées (homogènes) $(x_1, \ldots, x_0)$ d'un point n'étant pas uniquement définies, on ne peut parler de la valeur d'un polynôme en un point. En fait, seuls les *zéros* des polynômes nous intéressent. Ceux-ci seront définis pour une certaine catégorie de polynômes.

Définition 2.7. *Un élément F de R est dit* homogène de degré *d si, pour tout élément $\lambda \in \mathbf{k}$, on a*

$$F(\lambda T_0, \ldots, \lambda T_n) = \lambda^d F(T_0, \ldots, T_n).$$

On reconnaît facilement un polynôme homogène de degré d : tous ses monômes non nuls sont de même degré d. Il est clair que tout polynôme se décompose de façon unique en somme de polynômes homogènes.

Une conséquence immédiate de la définition est que, si F est homogène, on a, pour λ non nul,

$$F(x_1, \ldots, x_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0.$$

On peut donc définir le lieu des zéros dans $\mathbf{P}^n$ d'un polynôme homogène.

Définition 2.8. *Soit S une partie de R formée de polynômes homogènes. On note $V(S)$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}^n$ formé des zéros communs à tous les éléments de S. Les sous-ensembles de $\mathbf{P}^n$ de ce type sont les* sous-variétés projectives.

Exemples 2.9. 1) Le lieu des zéros d'un seul polynôme homogène F en $n+1$ variables est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^n$ que l'on appelle une *hypersurface*. Son degré est celui de F. Une hypersurface de degré 2 est une *quadrique* ; une hypersurface de degré 3 une *cubique* ; une hypersurface de degré 4 une *quartique*, etc. Toute sous-variété projective est par définition intersection d'hypersurfaces.

2) L'image de l'application $u \colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$ définie par

$$u(x_0, x_1) = (x_0^3, x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_1^3)$$

est intersection des 3 quadriques d'équations $T_0T_3 = T_1T_2$, $T_1^2 = T_0T_2$ et $T_2^2 = T_1T_3$ (*cf.* exerc. 2.10.13)). On l'appelle une *cubique gauche.*

Si l'on veut étendre au cadre projectif la correspondance algèbre/géométrie du cas affine, le premier problème que l'on rencontre est qu'un idéal non nul de R contient toujours des polynômes inhomogènes. En fait, on n'étend la construction qu'à un certain type d'idéaux.

Définition 2.10. *On dit qu'un idéal I de R est* homogène *s'il est engendré par des polynômes homogènes. On définit alors $V(I)$ comme le sous-ensemble de $\mathbf{P}^n$ formé des zéros communs à tous les éléments* homogènes *de I.*

Pour qu'un idéal I de R soit homogène, il faut et il suffit que pour toute décomposition $P = \sum P_i$ d'un élément P de I en somme de polynômes homogènes, on ait $P_i \in I$ pour tout i.

On retrouve beaucoup de résultats du chapitre I (mais pas tous !) : l'application $S \mapsto V(S)$ est décroissante pour l'inclusion ; si S est formé de polynômes homogènes, l'idéal engendré $\langle S \rangle$ est homogène, et $V(S) = V(\langle S \rangle)$. L'anneau R étant noethérien, on vérifie que l'idéal $\langle S \rangle$ est engendré par un nombre fini de polynômes *homogènes* $F_1, \dots, F_r$, de sorte que $V(S) = V(\langle S \rangle) = V(F_1, \dots, F_r)$. En d'autres termes, toute variété projective dans $\mathbf{P}^n$ peut être définie par un nombre fini d'équations.

Proposition 2.11. a) *Toute intersection de sous-variétés projectives de $\mathbf{P}^n$ est une sous-variété projective.*

b) *Toute réunion finie de sous-variétés projectives de $\mathbf{P}^n$ est une sous-variété projective.*

La proposition permet de définir la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n$, en prenant comme fermés les variétés projectives.

2.3. Idéal d'une variété projective

Définition 2.12. *Soit V un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n$. On appelle idéal de V, et l'on note $I(V)$, l'idéal (homogène) engendré par les polynômes* homogènes *nuls sur V.*

De nouveau, $V(I(V))$ est l'adhérence de V. On en déduit que toute suite décroissante de variétés projectives est stationnaire. En particulier, toute variété projective est quasi-compacte (toute suite décroissante de fermés est stationnaire, ou encore, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini). De plus, tous les résultats sur la décomposition d'une variété affine en composantes irréductibles se transportent tels quels au cadre projectif.

On montre aussi (exerc. 2.10.10)) que, pour tout choix d'un hyperplan ≪ à l'infini ≫ H dans $\mathbf{P}^n$, qui permet d'identifier l'espace affine $\mathbf{A}^n$ à l'ouvert de Zarisiki $U = \mathbf{P}^n \smallsetminus H$, la topologie induite sur U par la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n$ s'identifie à la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^n$ définie au chapitre précédent.

Exemple 2.13. La sous-variété affine C de $\mathbf{A}^2$ définie par l'équation $XY = 1$ est la trace sur l'ouvert U_2 de la sous-variété projective $\overline{C}$ de $\mathbf{P}^2$ d'équation $XY = Z^2$ (on a ≪ homogénéisé ≫ l'équation). On obtient $\overline{C}$ à partir de C en ajoutant les points ≪ à l'infini ≫ $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.

2.4. Le Nullstellensatz projectif

La différence fondamentale avec le cas affine est que si I est un idéal de R, la variété $V(I)$ peut être vide, sans que I soit égal à R, même si $\mathbf{k}$ est algébriquement clos : notons R^+ l'idéal (maximal) $(T_0, \dots, T_n)$ de R. Il est clair que $V(R^+)$ est vide ; en particulier, si I est un idéal contenant une puissance de R^+, l'ensemble $V(I)$ est aussi vide. Le Nullstellensatz est une réciproque.

Théorème 2.14. *On suppose* $\mathbf{k}$ *algébriquement clos. Soit* I *un idéal homogène de* R.

a) Pour que $V(I)$ *soit vide, il faut et il suffit que* I *contienne une puissance de* R^+.

b) Si $V(I)$ *n'est pas vide, on a* $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Démonstration. Pour tout idéal homogène I de R, nous noterons provisoirement $\mathscr{V}(I)$ la sous-variété affine de $\mathbf{A}^{n+1}$ définie par I et $\mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$ l'idéal de cette variété dans R. La remarque essentielle est que $\mathscr{V}(I)$ coïncide avec le cône sur $V(I)$ en dehors de l'origine O. Si $V(I)$ est vide, cela signifie que $\mathscr{V}(I)$ est contenu dans $\{O\}$. Le Nullstellensatz affine entraîne que le radical de I contient R^+. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe donc un entier m_i tel que $T_i^{m_i} \in I$; on en déduit que $(R^+)^{m_0+\cdots+m_n}$ est contenu dans I. Ceci montre a).

Si $V(I)$ n'est pas vide, $\mathscr{V}(I)$ est le cône sur $V(I)$, et un polynôme homogène est nul sur $V(I)$ si et seulement s'il est nul sur $\mathscr{V}(I)$, de sorte que $I(V(I)) \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$; le point b) résulte alors du Nullstellensatz affine. □

Corollaire 2.15. *L'application* $V \mapsto I(V)$ *réalise une bijection décroissante, de réciproque* $I \mapsto V(I)$, *entre les sous-variétés projectives de* $\mathbf{P}^n$ *et les idéaux radicaux homogènes de* R distincts de R^+.

Démonstration. Cela découle du Nullstellensatz projectif : il suffit de remarquer que si un idéal radical contient une puissance de R^+, il contient R^+. □

Comme dans le cas affine, on peut définir une $\mathbf{k}$-algèbre $S(V) := R/I(V)$; c'est une $\mathbf{k}$-algèbre *homogène graduée.*

Exemple 2.16. Soit F un polynôme homogène définissant l'hypersurface $V(F)$ dans $\mathbf{P}^n$. Comme dans le cas affine, le Nullstellensatz entraîne que lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, $V(F)$ est irréductible si et seulement si F l'est (comparer avec l'exercice 1.6.8)). Si l'on décompose F en un produit $F = \prod_i F_i^{n_i}$, avec F_i irréductible, les F_i sont homogènes, les $V(F_i)$ sont les composantes irréductibles de $V(F)$, et $I(V(F)) = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$.

2.5. Applications régulières

Il est impossible de copier la définition des fonctions régulières donnée dans le cadre affine, parce qu'un polynôme ne définit pas une fonction $\mathbf{P}^n \to \mathbf{k}$. L'idée est de se ramener au cas affine en remarquant que toute variété projective est réunion de variétés affines : si U_i est l'ouvert de Zariski de $\mathbf{P}^n$ défini par $T_i \neq 0$, les ouverts $U_0, \ldots, U_n$ recouvrent $\mathbf{P}^n$. Si X est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^n$, elle est recouverte par les $X \cap U_i$, qui par l'exercice 2.10.10) sont des variétés affines. On pourrait définir une fonction régulière sur X en demandant que sa restriction à chaque $X \cap U_i$ soit régulière. Le problème est que cette notion dépend *a priori* du recouvrement choisi de $\mathbf{P}^n$ par des ouverts affines : on résoud cette difficulté en adoptant une définition *locale*, par opposition à la définition globale du chapitre I.

DÉFINITION 2.17. *On appelle variété* quasi-projective *tout ouvert (de Zariski) d'une variété projective.*

Toute variété affine est donc quasi-projective (*cf.* exerc. 2.10.10)b). Notons que toute variété quasi-projective est quasi-compacte.

Lorsque nous dirons que X est une *variété*, il sera toujours sous-entendu que X est *quasi-projective*; en revanche, lorsque nous dirons que Y est une *sous-variété* de X, il sera toujours sous-entendu, sauf mention du contraire, que Y est *fermée* dans X.

L'idée de base est que si un polynôme, même homogène, ne définit pas de fonction sur $\mathbf{P}^n$, le quotient G/H de polynômes homogènes de même degré définit une fonction sur l'ouvert où H ne s'annule pas.

DÉFINITION 2.18. *Soit X une sous-variété quasi-projective de $\mathbf{P}^n$ et soit x un point de X. Une fonction $f\colon X \to \mathbf{k}$ est dite* régulière *en x s'il existe des polynômes homogènes G et H* de même degré *avec $H(x) \neq 0$ et $f = G/H$ dans un voisinage de x dans X. On dit que f est régulière sur X si elle est régulière en tout point de X. On note $A(X)$ l'anneau des fonctions régulières sur X.*

Notons qu'une fonction régulière $f\colon X \to \mathbf{k}$ est continue pour la topologie de Zariski : il suffit de vérifier que $f^{-1}(a)$ est fermé pour tout $a \in \mathbf{k}$; si $x \in X$, on peut écrire $f = G/H$ sur un voisinage U de x; sur U, la fibre $f^{-1}(a)$ est égale à $V(G - aH)$, donc est fermée dans U. Comme X est quasi-compacte, on en déduit que $f^{-1}(a)$ est fermée dans X.

Si X est un ouvert d'une variété affine dans $\mathbf{A}^n$ et x un point de X, on vérifie qu'une fonction $f\colon X \to \mathbf{k}$ est régulière en x s'il existe des polynômes G et H avec $H(x) \neq 0$ et $f = G/H$ dans un voisinage de x dans X.

Cette définition n'est pas entièrement satisfaisante : elle semble dépendre de données extrinsèques comme celle du plongement de X dans $\mathbf{P}^n$. Mais, sans la théorie des faisceaux, c'est le mieux que l'on puisse faire.

La première chose à faire est de vérifier que l'on retrouve bien la définition du chapitre I dans le cas où X est une variété affine.

THÉORÈME 2.19. *On suppose* $\mathbf{k}$ *algébriquement clos. Soit X une sous-variété affine de $\mathbf{A}^n$; toute fonction régulière $f\colon X \to \mathbf{k}$ est définie globalement par un polynôme à n variables.*

DÉMONSTRATION. On supposera pour simplifier que X est *irréductible.* Comme X est quasi-compacte, il existe un nombre fini d'ouverts U_i qui recouvrent X, et des polynômes G_i et H_i, tels que H_i ne s'annule pas sur U_i et que $f = G_i/H_i$ sur U_i. Pour tous i et j, cela signife que $G_iH_j - G_jH_i$ est nul sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ dense dans X, donc sur X. Les H_j n'ayant pas de zéro commun dans X, il existe des fonctions polynomiales a_j sur X telles que $\sum a_jH_j = 1$ (prop. 1.16). Notons s la fonction polynomiale $\sum_j a_jG_j$ sur X ; on a

$$H_i s = H_i(\sum_j a_jG_j) = \sum_j a_jG_iH_j = G_i \ ,$$

de sorte que s coïncide avec f sur chaque U_i. Elle est donc égale à f. □

Le théorème n'est plus vrai sur un corps quelconque (comme le montre l'exemple de la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à t associe $1/(1+t^2)$). Dans toute la suite, on suppose

$$\mathbf{k} \text{ algébriquement clos.}$$

Passons maintenant à la définition des applications régulières générales. Il y a de nombreuses façons équivalentes de la formuler. Nous donnerons la plus courte.

Définition 2.20. *Soient X et Y des variétés quasi-projectives ; on dit qu'une application $u\colon X \to Y$ est régulière si elle est* continue *et si, pour tout ouvert U de Y et toute fonction régulière $f\colon U \to \mathbf{k}$, la composée $f \circ u$ est régulière sur $u^{-1}(U)$.*

Cette définition a l'avantage d'entraîner sans effort le fait que la composée d'applications régulières est encore une application régulière. On a aussi une notion d'isomorphisme de variétés quasi-projectives. Attention cependant : une application régulière $X \to Y$ n'induit pas de morphisme entre $S(Y)$ et $S(X)$, de sorte que les algèbres homogènes de variétés isomorphes ne sont en général pas isomorphes.

On dira maintenant qu'une variété est affine si elle est isomorphe à une sous-variété affine d'un $\mathbf{A}^n$. Il peut très bien arriver qu'une variété affine soit contenue dans $\mathbf{A}^n$ comme sous-variété quasi-projective non fermée, c'est-à-dire pas comme sous-variété affine (*cf.* exerc. 2.10.2)). On remarquera aussi qu'il découle de *loc.cit.* que *tout point d'une variété quasi-projective a un voisinage affine.* Enfin, il existe des variétés qui ne sont ni affines, ni projectives (*cf.* exerc. 2.10.4)).

Exemples 2.21. 1) L'application $u\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$ définie dans l'exemple 2.9.2) est régulière. Plus généralement, si on se donne des polynômes homogènes $F_0, \dots, F_m$ de même degré en $n+1$ variables, l'égalité $u(x) = (F_0(x), \dots, F_m(x))$ définit une application régulière u de $\mathbf{P}^n \smallsetminus V(F_0, \dots, F_m)$ dans $\mathbf{P}^m$. En particulier, si $F_0, \dots, F_m$ ne s'annulent simultanément qu'en 0, l'application u est définie sur tout $\mathbf{P}^n$.

C'est sous cette forme plus concrète que l'on rencontre le plus souvent une application régulière.

2) **Applications de Veronese :** soient $M_0, \dots, M_N$ tous les monômes de degré d en $T_0, \dots, T_n$, avec $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Comme ils n'ont pas de zéro commun, ils définissent une application régulière injective $\nu_d\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$. On peut montrer (exerc. 2.10.15)) que $\nu_d(\mathbf{P}^n)$ est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^N$, et que ν_d induit un isomorphisme de $\mathbf{P}^n$ sur $\nu_d(\mathbf{P}^n)$.

3) Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel et soit $E = F \oplus G$ une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels. Les sous-espaces projectifs $\mathbf{P}F$ et $\mathbf{P}G$ de $\mathbf{P}E$ sont disjoints. La projection de E sur G parallèlement à F induit une application régulière $\mathbf{P}E \smallsetminus \mathbf{P}F \to \mathbf{P}G$ encore appelée projection.

Nous montrons maintenant qu'une application régulière est toujours définie *localement* comme dans l'exemple 1) ci-dessus.

PROPOSITION 2.22. *Soit X une variété quasi-projective contenue dans $\mathbf{P}^m$ et soit $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière. Pour tout point x_0 de X, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X et des polynômes homogènes $F_0, \dots, F_n$ de même degré en $m+1$ variables qui ne s'annulent simultanément en aucun point de U, tels que, pour tout x dans U, on ait*

$$u(x) = (F_0(x), \dots, F_n(x)) \tag{1}$$

en coordonnées homogènes.

DÉMONSTRATION. Soit U_i un ouvert standard contenant $u(x_0)$; par définition, on peut écrire, pour tout x dans $u^{-1}(U_i)$, $u(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$, où les f_j sont des fonctions régulières avec $f_i = 1$. Par définition, on peut écrire chaque f_j comme G_j/H_j, où G_j et H_j sont des polynômes homogènes de même degré, ceci sur un voisinage U de x_0 dans $u^{-1}(U_i)$. La proposition s'en déduit facilement. □

Comme on l'a déjà expliqué, la formule (1) définit une application régulière là où les F_i ne s'annulent pas simultanément. La subtilité est que cette formule peut très bien définir une application régulière sur tout X, sans que celle-ci ait une expression globale de ce type. Il est parfois impossible de s'en rendre compte à première vue.

EXEMPLE 2.23. Soit C la courbe définie dans $\mathbf{P}^2$ par l'équation $XZ = Y^2$. L'application $u\colon C \to \mathbf{P}^1$ définie par $u(X,Y,Z) = (X,Y)$ est régulière hors du point $(0,1,0)$. Elle se prolonge en une application régulière sur tout C en posant $u(X,Y,Z) = (Y,Z)$ hors du point $(1,0,0)$. Il n'existe pas de formule globale pour cette application.

2.6. Applications rationnelles

Etant donnée une variété X, on a rencontré à plusieurs reprises des applications régulières définies sur un ouvert dense de X. Formalisons cette situation.

DÉFINITION 2.24. *Soient X et Y des variétés. On considère les couples (u,U), où U est un ouvert dense de X et $u\colon U \to Y$ une application régulière ; on dit que de tels couples (u,U) et (v,V) sont équivalents si u et v coïncident sur $U \cap V$. On appelle* application rationnelle *de X sur Y une classe d'équivalence pour cette relation.*

On note $u\colon X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle ; malgré son nom, *ce n'est pas une application !* En particulier, il n'est pas toujours possible de composer des applications rationnelles, ou de les restreindre à des sous-variétés. On dit qu'une application rationnelle $u\colon X \dashrightarrow Y$ est définie en un point x de X s'il en existe un représentant régulier défini sur un voisinage dense de x dans X. L'ensemble des points où u est définie est un ouvert dense de X, que l'on appelle parfois son domaine de définition. Une application rationnelle définie en tous les points de X est régulière.

Si X est une variété quasi-projective irréductible contenue dans $\mathbf{P}^m$, toute application rationnelle $u\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ est définie selon la formule (1) par la donnée de polynômes homogènes $F_0, \dots, F_n$ de même degré en $m+1$ variables non tous identiquement nuls sur X. Elle est définie au moins sur l'ouvert $X \smallsetminus V(F_0, \dots, F_n)$, mais son domaine de définition peut être plus grand.

On appelle *fonction rationnelle* sur X une application rationnelle de X à valeurs dans $\mathbf{k}$.

PROPOSITION 2.25. *Soit X une variété.*
a) Les fonctions rationnelles sur X forment une $\mathbf{k}$-algèbre notée $K(X)$.
b) Pour tout ouvert dense U de X, les algèbres $K(X)$ et $K(U)$ sont isomorphes.
c) Si X est irréductible, $K(X)$ est un corps.
d) Si X est affine irréductible, $K(X)$ est le corps de fractions de $A(X)$.

DÉMONSTRATION. Seul le point d) mérite une démonstration. Si f/g est un élément de $K(X)$, on lui associe la fonction rationnelle représentée par la fonction régulière $f/g\colon X \smallsetminus V(g) \to \mathbf{k}$. Inversement, si $f\colon U \to \mathbf{k}$ est une fonction régulière, il existe une fonction régulière h nulle sur $X \smallsetminus U$. L'ouvert V des points où h ne s'annule pas est affine d'algèbre $A(X)_h$ (exerc. 2.10.2)), de sorte qu'il existe un entier naturel N et un élément g de $A(X)$ tels que $f = g/h^N$; on associe à f l'élément g/h^N de $K(X)$. On vérifie que ces deux applications sont des morphismes de $\mathbf{k}$-algèbres inverses l'un de l'autre. □

Si $X_1, \dots, X_N$ sont les composantes irréductibles de X, l'algèbre $K(X)$ est isomorphe au produit de corps $K(X_1) \times \cdots \times K(X_N)$.

2.26. On dit qu'une application rationnelle $u\colon X \dashrightarrow Y$ est *dominante* si elle a une représentant régulier dominant. Si c'est le cas, et si $v\colon Y \dashrightarrow Z$ est une application rationnelle, on peut définir la composée $v \circ u\colon X \dashrightarrow Z$. En particulier, on peut définir $f \circ u$ pour toute fonction rationnelle f sur Y, d'où une inclusion $u^*\colon K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

PROPOSITION 2.27. *Soient X et Y des variétés irréductibles.*
a) L'application $u \mapsto u^*$ réalise une bijection entre l'ensemble des applications rationnelles dominantes *$u\colon X \dashrightarrow Y$ et l'ensemble des $\mathbf{k}$-extensions de corps $K(Y) \subset K(X)$.*
b) Pour que u^* soit un isomorphisme, il faut et il suffit que u induise un isomorphisme d'un ouvert non vide de X sur un ouvert non vide de Y. On dit que u est une application birationnelle.

DÉMONSTRATION. Soit $\iota\colon K(Y) \subset K(X)$ une $\mathbf{k}$-extension de corps ; on peut supposer $X \subset \mathbf{A}^m$ et $Y \subset \mathbf{A}^n$ affines. On écrit alors $\iota(y_j) = a_j/b_j$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, avec a_j, b_j dans $A(X)$. On a donc une inclusion de $\mathbf{k}$-algèbres $A(Y) \hookrightarrow A(X)_{b_1 \cdots b_n}$, à laquelle correspond par la proposition 1.19 et l'exercice 2.10.2) une application régulière dominante $u\colon X \smallsetminus V(b_1 \cdots b_n) \to Y$. On vérifie facilement que $u^* = \iota$, ce qui montre a). Si ι est un isomorphisme, on écrit $x_i = \iota(c_i/d_i)$ et $b_j = \iota(c'_j/d'_j)$, d'où un isomorphisme $A(Y)_{d_1 \cdots d_m d'_1 \cdots d'_m} \simeq A(X)_{b_1 \cdots b_n \iota(d_1) \cdots \iota(d_m)}$, ce qui montre b). □

2.28. La terminologie est un peu compliquée à ce point : une application birationnelle est une application rationnelle $X \dashrightarrow Y$ qui est un isomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de Y (à ce propos, on dira dans cette situation que X et Y sont *birationnellement isomorphes*). Comment appeler une application régulière qui a cette propriété ? Nous dirons « morphisme birationnel ».

2.29. On dit qu'une variété irréductible X est *rationnelle* s'il existe une application birationnelle d'un espace projectif (ou d'un espace affine) sur X. De façon équivalente, on demande que $K(X)$ soit une extension transcendante pure de $\mathbf{k}$. On dit que X est *unirationnelle* s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif sur X. De façon équivalente, on demande que $K(X)$ soit contenu dans une extension transcendante pure de $\mathbf{k}$. Il est clair que toute variété rationnelle est unirationnelle ; on ne sait que depuis une vingtaine d'années qu'il existe des variétés unirationnelles qui ne sont pas rationnelles, c'est-à-dire des extensions de $\mathbf{k}$ contenues dans une extension transcendante pure qui ne sont pas transcendantes pures.

2.7. Produits de variétés

Notre but est maintenant de mettre une structure de variété projective sur le produit de deux variétés projectives. Commençons par le cas de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$. Il existe une application injective $u\colon \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{(m+1)(n+1)-1}$, dite *application de Segre*, définie par

$$u((x_0, \ldots, x_m), (y_0, \ldots, y_n)) = (\ldots, x_i y_j, \ldots).$$

On montre (exerc. 2.10.6) que l'image $\Sigma_{m,n}$ de u est la variété projective définie par les équations $Z_{i,j} Z_{k,l} = Z_{i,l} Z_{j,k}$ (c'est l'ensemble des matrices $(m+1) \times (n+1)$ de rang 1). Cela fait de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ une variété projective, dont les sous-variétés sont par définition les images inverses par u des sous-variétés de $\mathbf{P}^{(m+1)(n+1)-1}$. Remarquons par exemple que la restriction de u à la diagonale Δ de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ n'est autre que l'application ν_2 définie ci-dessus, dont on a vu que l'image est une sous-variété de $\mathbf{P}^{\binom{n+2}{2}-1} \subset \mathbf{P}^{(n+1)^2-1}$. Il s'ensuit que Δ est une sous-variété de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$.

On dit par ailleurs qu'un polynôme $F(X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n)$ est *bihomogène de bidegré* (d, e) s'il vérifie, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$,

$$F(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_m, \mu Y_0, \ldots, \mu Y_n) = \lambda^d \mu^e F(X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n).$$

Il est clair qu'un tel polynôme définit un sous-ensemble de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$.

PROPOSITION 2.30. *Les sous-variétés de* $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ *sont exactement les lieux des zéros communs de polynômes bihomogènes.*

DÉMONSTRATION. Les sous-variétés de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ sont définies par les images inverses de polynômes homogènes sur $\mathbf{P}^{(m+1)(n+1)-1}$, qui sont exactement les polynômes bihomogènes de bidegré (d, d). Il suffit de remarquer que le lieu des zéros d'un polynôme bihomogène F de bidegré (d, e) est aussi le lieu des zéros communs aux polynômes $X_i^e Y_j^d F(X, Y)$, qui sont de bidegré $(d + e, d + e)$. □

EXEMPLE 2.31. La variété $\Sigma_{1,1}$ est la quadrique d'équation $T_0 T_3 - T_1 T_2$ dans $\mathbf{P}^3$. Elle contient donc la cubique gauche C, qui est son intersection avec les quadriques $T_1^2 = T_0 T_2$ et $T_2^2 = T_1 T_3$ (*cf.* exerc. 2.10.13)). Ces équations se remontent en $(X_0 Y_1)^2 = (X_0 Y_0)(X_1 Y_0)$ et $(X_1 Y_0)^2 = (X_0 Y_1)(X_1 Y_1)$; la cubique peut donc être définie dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ par l'unique équation $X_1 Y_0^2 = X_0 Y_1^2$, bihomogène de bidegré $(1, 2)$.

Prenons maintenant des variétés projectives $X \subset \mathbf{P}^m$ et $Y \subset \mathbf{P}^n$. Il est clair que $X \times \mathbf{P}^n$ et $\mathbf{P}^m \times Y$ sont définies par des polynômes bihomogènes ; leur intersection $X \times Y$ est donc une sous-variété de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$. De façon similaire, le produit de variétés quasi-projectives est encore une variété quasi-projective.

On montre que *les projections* $X \times Y \to X$ *et* $X \times Y \to Y$ *sont des applications régulières ; pour qu'une application* $Z \to X \times Y$ *soit régulière, il faut et il suffit que chacune de ses composantes* $Z \to X$ *et* $Z \to Y$ *le soit.*

Exemples 2.32. 1) Si X est une sous-variété de $\mathbf{P}^m$ et $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière, son graphe Γ_u est une sous-variété de $X \times \mathbf{P}^n$. En effet, u induit par ce qui précède une application régulière (donc continue) $(u,1)\colon X \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$, et Γ_f est l'image inverse de la diagonale, donc est fermé.

2) On vérifie que la structure de variété sur $\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n$ coïncide avec celle obtenue par l'isomorphisme $\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n \simeq \mathbf{A}^{m+n}$.

Attention cependant : *la topologie sur* $X \times Y$ *n'est pas la topologie produit.*

2.8. Eclatements

Soit O un point de $\mathbf{P}^n$ et soit H un hyperplan dans $\mathbf{P}^n$ ne contenant pas O. La projection $\pi\colon \mathbf{P}^n \dashrightarrow H$ depuis O est une application rationnelle définie sur $\mathbf{P}^n \smallsetminus \{O\}$.

Prenons des coordonnées de façon que $O = (0, \dots, 0, 1)$ et $H = V(x_n)$, de sorte que $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{n-1})$. Le graphe de π dans $\mathbf{P}^n \times H$ est l'ensemble des (x,y) avec $x \neq O$ et $x_i = y_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On vérifie que son adhérence $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ est définie par les équations bihomogènes $x_i y_j = x_j y_i$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$.

La première projection $\varepsilon\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^n$ s'appelle l'*éclatement de O dans* $\mathbf{P}^n$, ou encore l'*éclatement de* $\mathbf{P}^n$ *en* O. Au-dessus d'un point x autre que O, la fibre $\varepsilon^{-1}(x)$ est le point $\pi(x)$; au-dessus de O, c'est H. L'application ε induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{P}}^n \smallsetminus H$ sur $\mathbf{P}^n \smallsetminus \{O\}$; c'est donc un morphisme birationnel (*cf.* 2.25). On a en quelque sorte retiré O de $\mathbf{P}^n$ pour le remplacer par un $\mathbf{P}^{n-1}$.

Les fibres de la seconde projection $q\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to H$ sont toutes isomorphes à $\mathbf{P}^1$, mais $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ n'est pas isomorphe au produit $\mathbf{P}^1 \times H$. On vérifie qu'il l'est au-dessus de chaque ouvert standard U_i de H (on dit que c'est un *fibré projectif*) : il suffit d'envoyer le point (x,y) de $\widetilde{\mathbf{P}}^n \cap (\mathbf{P}^n \times U_i) = q^{-1}(U_i)$ sur le point $((x_i, x_n), y)$ de $\mathbf{P}^1 \times U_i$.

Il faut penser à H comme à l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^n$ passant par O. De façon plus géométrique, on a alors

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n = \{(x, \ell) \in \mathbf{P}^n \times H \mid x \in \ell\} ,$$

ce qui permet de bien comprendre les fibres des applications $\varepsilon\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^n$ et $q\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to H$.

Lorsque X est une variété contenue dans $\mathbf{P}^n$ et O un point de X, on définit l'éclatement de X en O comme l'adhérence $\widetilde{X}$ de $\varepsilon^{-1}(X \smallsetminus \{O\})$ dans $\varepsilon^{-1}(X)$. On montre que le morphisme birationnel obtenu $\varepsilon\colon \widetilde{X} \to X$ est indépendant du choix du plongement $X \subset \mathbf{P}^n$, ainsi que de celui de H ; c'est une construction que l'on peut rendre intrinsèque.

On éclate en général pour deux raisons : soit pour désingulariser une variété singulière (voir le chapitre 4 pour la signification de ces termes), soit pour rendre une application rationnelle définie partout.

Exemples 2.33. 1) Considérons la cubique plane C d'équation

$$X_1^2 X_2 = X_0^2 (X_2 - X_0)$$

dans $\mathbf{P}^2$; éclatons O. En un point $((x_0,x_1,x_2),(y_0,y_1))$ de $\varepsilon^{-1}(C \smallsetminus \{O\})$ avec $y_0 = 1$, on a $x_1 = x_0y_1$ d'où (comme $x_0 \neq 0$)

$$x_2y_1^2 = x_2 - x_0$$

en un point avec $y_1 = 1$, on a $x_0 = x_1y_0$ d'où (comme $x_1 \neq 0$)

$$x_2 = y_0^2(x_2 - x_1y_0).$$

Ces deux équations définissent $\widetilde{C}$ dans $\widetilde{\mathbf{P}}^2$; l'une dans l'ouvert $\mathbf{P}^2 \times U_0$, l'autre dans l'ouvert $\mathbf{P}^2 \times U_1$. On remarque que l'image inverse de O consiste en les deux points $((0,0,1),(1,1))$ et $((0,0,1),(1,-1))$ (qui sont chacun dans les deux ouverts). On a désingularisé la courbe singulière C (*cf.* 4.5).

2) Considérons l'application rationnelle $u\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ définie par $u(x_0,x_1,x_2) = (x_1x_2, x_2x_0, x_0x_1)$, régulière sauf en O, $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Soit $\varepsilon\colon \widetilde{\mathbf{P}}^2 \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de O ; sur l'ouvert $y_0 = x_2 = 1$, on a $x_1 = x_0y_1$ d'où

$$u \circ \varepsilon((x_0,x_1,1),(1,y_1)) = (x_0y_1, x_0, x_0^2y_1) \ ,$$

que l'on peut prolonger en une application régulière au-dessus de O en posant

$$\tilde{u}((x_0,x_1,1),(1,y_1)) = (y_1, 1, x_0y_1).$$

De même, sur l'ouvert $y_1 = x_2 = 1$, on a $x_0 = x_1y_0$ d'où

$$u \circ \varepsilon((x_0,x_1,1),(y_0,1)) = (x_1, x_1y_0, x_1^2y_0) \ ,$$

que l'on prolonge par $\tilde{u}((x_0,x_1,1),(y_0,1)) = (1, y_0, x_1y_0)$. En procédant de façon analogue, on voit que si $\alpha\colon X \to \mathbf{P}^2$ est l'éclatement des points O, $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$, il existe une *application régulière* $\widetilde{u}\colon X \to \mathbf{P}^2$ telle que $\widetilde{u} = u \circ \alpha$.

2.9. Image d'une application régulière

Dans l'exercice 2.10.15), l'image par une application régulière de toute sous-variété est une sous-variété. Ce n'est certainement pas toujours le cas : l'image de l'application régulière $u\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ définie par $u(x,y) = (x,xy)$ est la réunion de l'ouvert $\{(z,w) \mid z \neq 0\}$ et de l'origine, qui n'est pas localement fermée ; la différence est que la variété de départ n'est pas projective. Le théorème essentiel que nous allons démontrer est qu'une application régulière dont l'espace de départ est une variété projective est une application fermée (c'est-à-dire que l'image d'un fermé est un fermé). Plus généralement, nous montrerons le résultat suivant (qui est à rapprocher du fait élémentaire que si Y est quasi-compact, et que $X \times Y$ *est muni de la topologie produit*, toute projection $X \times Y \to X$ est fermée).

Théorème 2.34. *Si Y est une variété projective et X une variété, la projection $p\colon X \times Y \to X$ est fermée.*

Commençons par un rappel.

2.35. Elimination : pour que des polynômes F et G à une variable à coefficients dans $\mathbf{k}$, de degré respectifs d et e, aient un facteur commun de degré > 0, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme de degré $d+e-1$ divisible par F et G, c'est-à-dire que l'espace des polynômes de ce degré divisible par F (qui est engendré par $F, XF, X^2F, \ldots, X^{e-1}F$) rencontre celui des polynômes de ce degré divisible par G (qui est engendré par $G, XG, X^2G, \ldots, X^{d-1}G$). En d'autres termes, il faut et il suffit que ces $d+e$ vecteurs soient liés. Puisque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, on en déduit que pour que F et G ait une racine commune, il faut et il suffit que le *résultant* de F et G, un déterminant de taille $d+e$ en les coefficients de F et G, s'annule. Notons que ce déterminant est un polynôme « universel » en les coefficients de F et G qui a encore un sens lorsque ceux-ci sont dans un anneau commutatif ; nous l'appelerons encore le résultant de F et G.

Démonstration du théorème. Elle procède en plusieurs étapes.

Cas $X = \mathbf{P}^m$ et $Y = \mathbf{P}^1$: soient Z une sous-variété de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^1$ et $I(Z)$ l'ensemble des polynômes bihomogènes $F(X_0, \dots, X_m, Y_0, Y_1)$ nuls sur Z ; pour un tel polynôme, on note $F_\flat$ le polynôme $F(X_0, \dots, X_m, 1, Y)$, vu comme polynôme en une variable Y à coefficients homogènes de même degré dans $\mathbf{k}[X_0, \dots, X_m]$. Pour tous F et G dans $I(Z)$, le résultant de $F_\flat$ et de $G_\flat$ est un polynôme homogène de $\mathbf{k}[X_0, \dots, X_m]$. Ces résultants s'annulent sur $p(Z)$: en effet, si $x \in p(Z)$, il existe $(y_0, y_1) \in \mathbf{P}^1$ tel que $F(x_0, \dots, x_m, y_0, y_1)$ soit nul pour tout F dans $I(Z)$. Si y_0 n'est pas nul, y_1/y_0 est un zéro commun à tous les $F_\flat(x)$. Si y_0 est nul, cela signifie que x est un zéro commun aux coefficients dominants des $F_\flat$, donc annule les résultants, comme on le voit sur les déterminants qui les définissent.

Réciproquement, supposons que tous ces résultants s'annulent en x, avec par exemple $x_0 \neq 0$. Si x est un zéro commun à tous les coefficients dominants des $F_\flat$, le point $(x, (0,1))$ est dans Z et x est dans $p(Z)$. Sinon, il existe un polynôme F dans $I(Z)$ tel que le coefficient dominant de $F_\flat$ n'est pas nul en x ; le polynôme $F_\flat(x)$ ne s'annule alors qu'en un nombre fini (peut-être nul) de points $y_1, \dots, y_N$. *Si aucun des points* $(x, (1, y_1)), \dots, (x, (1, y_N))$ *n'est dans* Z, il existe G_i dans $I(Z)$ tel que $G_i(x, (1, y_i)) \neq 0$. Quitte à multiplier ces polynômes par des puissances de X_0 et de Y_0, on peut les supposer bihomogènes de même bidegré. Pour chaque $(a_1, \dots, a_N)$ dans $\mathbf{k}^N$, le polynôme $\sum a_i G_i(x, (1, \cdot))$ a par hypothèse un zéro commun avec $F_\flat(x)$, donc s'annule en l'un des y_j. En d'autres termes, l'image de l'application linéaire $(a_1, \dots, a_N) \mapsto \big(\sum_i a_i G_i(x, (1, y_1)), \dots, \sum_i a_i G_i(x, (1, y_N))\big)$ est contenue dans la réunion des hyperplans de coordonnées. Comme $\mathbf{k}$ est infini, elle est contenue dans l'un de ces hyperplans, ce qui signifie que tous les G_i s'annulent en le même $(x, (1, y_j))$, contradiction. Un des points $(x, (1, y_1)), \dots, (x, (1, y_N))$ est donc dans Z, ce qui entraîne $x \in p(Z)$.

Cas $X \subset \mathbf{P}^m$ et $Y = \mathbf{P}^1$: si Z est fermé dans $X \times \mathbf{P}^1$, c'est l'intersection d'un fermé Z' de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^1$ avec $X \times \mathbf{P}^1$. Le premier cas entraîne que $p(Z')$ est fermé dans $\mathbf{P}^m$, de sorte que $p(Z) = p(Z') \cap X$ l'est aussi dans X.

Pour terminer la démonstration, il suffit de traiter le cas $Y = \mathbf{P}^n$ (puisque si Y est fermé dans $\mathbf{P}^n$, tout fermé de $X \times Y$ l'est aussi dans $X \times \mathbf{P}^n$).

Lemme 2.36. *Pour que Z soit fermé dans $X \times \mathbf{P}^n$, il faut et il suffit que $Z \cap (X \times U_i)$ le soit dans $X \times U_i$, pour chaque i.*

Démonstration. Si $Z \cap (X \times U_i)$ est fermé dans chaque $X \times U_i$, c'est le lieu des zéros dans $X \times U_i$ d'une famille de polynômes bihomogènes $F_{i,1}, \dots, F_{i,N}$. Il s'ensuit que Z est contenu dans le lieu des zéros des $F_{i,j} Y_i$ dans $X \times \mathbf{P}^n$, et que ces polynômes définissent Z dans $X \times \mathbf{P}^n$. □

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
X \times U_i \times \mathbf{P}^1 & \subset & X \times \widetilde{\mathbf{P}}^n & \xrightarrow{\varepsilon} & X \times \mathbf{P}^n \\
\downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
X \times U_i & \subset & X \times H & \xrightarrow{p'} & X
\end{array}$$

Si Z est fermé dans $X \times \mathbf{P}^n$, alors $\varepsilon^{-1}(Z)$ l'est dans $X \times \widetilde{\mathbf{P}}^n$, donc aussi son intersection avec $q^{-1}(X \times U_i)$, qui est isomorphe à $X \times U_i \times \mathbf{P}^1$. Le cas $Y = \mathbf{P}^1$ entraîne que

$$q'(\varepsilon^{-1}(Z) \cap q^{-1}(X \times U_i)) = q(\varepsilon^{-1}(Z)) \cap (X \times U_i)$$

est fermé dans $X \times U_i$. Par le lemme, $q(\varepsilon^{-1}(Z))$ est fermé ; on en déduit avec une hypothèse de récurrence que $p'(q(\varepsilon^{-1}(Z))) = p(Z)$ l'est aussi. $\square$

Ce théorème est notre premier résultat « sérieux ». Il est d'usage constant et a de nombreuses conséquences.

COROLLAIRE 2.37. *Soit X une variété* projective *; toute application régulière $X \to \mathbf{P}^n$ est fermée.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que son image est fermée ; pour cela, on applique le théorème à son graphe et à la seconde projection $X \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$. $\square$

En particulier, toute « réalisation » d'une variété projective dans un espace projectif est toujours fermée, contrairement à ce qui se passe pour les variétés affines.

COROLLAIRE 2.38. *Toute fonction régulière sur une variété projective connexe est constante.*

DÉMONSTRATION. En effet, son image est une sous-variété de $\mathbf{P}^1$ contenue dans $\mathbf{A}^1$, donc finie. Comme elle est connexe, elle est réduite à un point. $\square$

En particulier, les seules sous-variétés projectives d'une variété affine sont ses sous-ensembles finis.

COROLLAIRE 2.39. *Soit X une sous-variété connexe de $\mathbf{P}^n$ non réduite à un point. Elle rencontre toute hypersurface de $\mathbf{P}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit F l'équation d'une hypersurface de $\mathbf{P}^n$ qui ne rencontre pas X. On peut invoquer l'exercice 2.10.15)d), qui montre que le complémentaire de cette hypersurface est affine, ou procéder directement : par le corollaire 2.38, pour tout polynôme homogène G de même degré que F, la fonction G/F est constante sur X ; il s'ensuit que l'image de X par le l'application injective ν_d définie dans l'exemple 2.21.2) est un point, donc aussi X. $\square$

2.10. Exercices

1) Déterminer l'idéal de la réunion de deux droites disjointes dans $\mathbf{P}^3$.

2)a) Soit X une sous-variété affine de $\mathbf{A}^n$ et soit f une fonction régulière sur X. Montrer que l'ouvert $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ est isomorphe à une sous-variété affine de $\mathbf{A}^{n+1}$ (c'est donc une variété affine), et que l'anneau $A(X_f)$ est isomorphe au localisé $A(X)_f$.

b) Soit X une variété quasi-projective et soit x un point de X. Montrer qu'il existe un ouvert affine de X contenant x.

3) Soit X une variété quasi-projective et soit x un point de X. On considère les couples (f, U), où U est un ouvert de X contenant x et f une fonction régulière sur U ; on dit que de tels couples (f, U) et (g, V) sont équivalents si f et g coïncident sur $U \cap V$. On appelle les classes d'équivalence les *germes de fonctions régulières en x*. Ils forment une $\mathbf{k}$-algèbre que l'on note $\mathcal{O}_{X,x}$.

a) Montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local d'idéal maximal l'ensemble $\mathfrak{m}_{X,x}$ des germes de fonctions régulières nulles en x.

b) Soit X une variété affine et soit x un point de X. Montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ s'identifie à l'anneau local $A(X)_{\mathfrak{m}_x}$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $A(X)$ des fonctions nulles en x.

c) On revient au cas général. Montrer que si U est un voisinage ouvert affine de x (*cf.* exerc. 2.10.2)b), $\mathscr{O}_{X,x}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{U,x}$, donc à $A(U)_{\mathfrak{m}_x}$.

4) Décrire l'anneau des applications régulières sur $\mathbf{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$; en déduire que ce n'est pas une variété affine.

5) On suppose $\mathbf{k}$ algébriquement clos. Montrer directement (sans faire appel au corollaire 2.38) que toute fonction régulière sur $\mathbf{P}^n$ est constante.

6) Montrer que l'image de l'application de Segre $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ est définie par les équations $Z_{i,j}Z_{k,l} = Z_{i,l}Z_{j,k}$.

7) Si X et Y sont affines, $X \times Y$ est affine et $A(X \times Y)$ est isomorphe à $A(X) \otimes_{\mathbf{k}} A(Y)$. En déduire que le produit de deux variétés irréductibles est irréductible.

8) Soient X et Y des espaces topologiques irréductibles. Montrer que $X \times Y$, muni de n'importe quelle topologie induisant les topologies données sur chaque $\{x\} \times Y$ et $X \times \{y\}$, est irréductible (on retrouve le résultat de l'exercice précédent).

9) Soit X une variété quasi-projective et soit V une variété *affine.* On associe à toute application régulière $u \colon X \to V$, le morphisme $A(V) \to A(X)$ qui envoie f sur $f \circ u$. Montrer que l'on définit ainsi une bijection entre les applications régulières de X dans V et les morphismes de $\mathbf{k}$-algèbres de $A(V)$ dans $A(X)$.

10) **Correspondance affine/projectif :** fixons l'hyperplan ≪ à l'infini ≫ H_0 d'équation $x_0 = 0$ dans $\mathbf{P}^n$, ce qui permet d'identifier l'espace affine $\mathbf{A}^n$ à l'ouvert de Zariski $U_0 = \mathbf{P}^n \smallsetminus H_0$. On va faire le lien entre les sous-variétés affines de $\mathbf{A}^n$ et les sous-variétés projectives de $\mathbf{P}^n$. Pour cela, nous introduisons les notions suivantes :

• soit F un élément de A. On appelle *homogénéisé de* F le polynôme homogène $F^\sharp$ défini par

$$F^\sharp(T_0, \dots, T_n) = T_0^{\deg F} F(T_1/T_0, \dots, T_n/T_0).$$

Si I est un idéal de A, on note $I^\sharp$ l'idéal de R engendré par les homogénéisés des éléments de I.

• soit F un élément de R. On appelle *déshomogénéisé de* F le polynôme $F_\flat$ défini par

$$F_\flat(T_1, \dots, T_n) = F(1, T_1, \dots, T_n).$$

Si J est un idéal de R, on note $J_\flat$ l'idéal de A engendré par les déshomogénéisés des éléments de J.

Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n$ induit la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^n$; plus précisément, on a :

a) soit $X = V(J)$ une sous-variété projective de $\mathbf{P}^n$; l'intersection $X \cap U_0$ est une sous-variété affine, égale à $V(J_\flat)$;

b) soit $V = V(I)$ une sous-variété affine de $\mathbf{A}^n$; on a $\overline{V} = V(I^\sharp)$, et $V = \overline{V} \cap U_0$.

11)a) Tout ensemble de d points dans $\mathbf{P}^n$ est intersection d'hypersurfaces de degré d (*Indication :* il suffit de construire, pour chaque point p hors de cet ensemble Γ, un polynôme de degré d, nul sur Γ, et non nul en p). Montrer que d points alignés ne peuvent pas être décrits comme intersection d'hypersurfaces de degré $< d$.

b) Tout ensemble de d points dans $\mathbf{P}^n$, *non tous alignés*, est intersection d'hypersurfaces de degré $d-1$.

c) Montrer que tout ensemble d'au plus $2n$ points en position générale (*cf.* 2.4) dans $\mathbf{P}^n$ est intersection de quadriques.

12) **Les coniques :** on appelle conique toute sous-variété C de $\mathbf{P}^2$ définie par une équation (homogène) de degré 2.

a) Si $\mathbf{k}$ est de caractéristique différente de 2, montrer que l'équation de C peut s'écrire dans une base convenable $a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2 = 0$. Que se passe-t-il en caractéristique 2 ?

b) Si $a_0a_1a_2 \neq 0$, construire un isomorphisme $\mathbf{P}^1 \to C$.

13) **La cubique gauche :** on considère l'application $u \colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$ définie par $u(s,t) = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$.

a) Posons $I = (T_0T_3 - T_1T_2, T_1^2 - T_0T_2, T_2^2 - T_1T_3)$; montrer que l'image C de u est la variété projective $V(I)$.

b) Montrer l'égalité $I(C) = I$.

c) Montrer que tout sous-ensemble fini de C est en position générale.

d) Soient $x_1, \dots, x_7$ des points de C ; montrer que C est l'intersection des quadriques passant par $x_1, \dots, x_7$. En particulier, cet ensemble de 7 points ne peut être défini par des quadriques : la borne de l'exercice 2.10.11)c) est optimale.

14) **La courbe rationnelle normale :** on considère l'application $u\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$ définie par

$$u(s,t) = (s^n, s^{n-1}t, \dots, st^{n-1}, t^n).$$

a) Montrer que l'image C de u est intersection de n quadriques.

b) Montrer que tout sous-ensemble fini de C est en position générale.

c) Montrer que C est l'intersection des quadriques passant par $2n+1$ points fixés de C.

Plus généralement, on appelle *courbe rationnelle normale* l'image de toute application $v\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$ dont les composantes sont données par une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n à deux variables.

d) Montrer que toute courbe rationnelle normale est l'image de C par un automorphisme linéaire de $\mathbf{P}^n$.

e) Montrer que par $n+3$ points en position générale, il passe une unique courbe rationnelle normale.

15) **Les variétés de Veronese :** a) L'image de l'application $\nu_2\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^5$ définie dans l'exemple 2.21.2) s'appelle la *surface de Veronese.* Montrer qu'elle est définie par la condition que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_3 & T_4 \\ T_3 & T_1 & T_5 \\ T_4 & T_5 & T_2 \end{pmatrix}$$

est 1. En particulier, c'est une *variété projective* (dite *déterminantielle*).

b) Montrer que l'image de l'application $\nu_d\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ définie dans l'exemple 2.21.2) est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^N$, et que ν_d induit un isomorphisme de $\mathbf{P}^n$ sur $\nu_d(\mathbf{P}^n)$ (*cf.* [**P**], p. 80).

c) Pour toute sous-variété X de $\mathbf{P}^n$, montrer que $\nu_d(X)$ est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^N$ (*Indication :* montrer que les images inverses des polynômes homogènes de degré m sont tous les polynômes homogènes de degré dm, et que X peut être définie par des polynômes homogènes de degré dm, pour m assez grand).

d) Soit X une hypersurface de $\mathbf{P}^n$ d'équation F de degré d. Montrer que $\nu_d(X)$ est l'intersection d'un hyperplan de $\mathbf{P}^N$ avec $\nu_d(\mathbf{P}^n)$. En déduire que $\mathbf{P}^n \smallsetminus X$ est affine, et que $A(\mathbf{P}^n \smallsetminus X)$ est isomorphe aux éléments de degré 0 de l'anneau gradué $S(X)_F$ (localisé de $S(X)$ en F).

16) **Cônes :** a) Soit O un point de $\mathbf{P}^n$ et soit X une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ contenue dans un hyperplan ne contenant pas O. Montrer que le cône sur X de sommet O, c'est-à-dire la réunion des droites Ox, pour x décrivant X, est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^n$.

b) Généraliser la construction précédente à une sous-variété quelconque X de $\mathbf{P}^n$, le sommet O étant n'importe quel point hors de X.

c) Généraliser la construction précédente à un cône sur X dont le sommet est n'importe quel sous-espace projectif disjoint de X.

d) Soient X et Y des sous-variétés disjointes de $\mathbf{P}^n$. Montrer que la réunion $J(X,Y)$ des droites joignant un point de X à un point de Y est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^n$.

17)**Une autre démonstration du théorème de propreté 2.34 :** comme dans la démonstration du cours, on se ramène à montrer que la projection $p\colon \mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^m \to \mathbf{A}^n$ est fermée. Soit Z une sous-variété de $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^m$; c'est le lieu des zéros communs de polynômes $F_i \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$ homogènes en Y de degré d_i, pour $i = 1, \dots, N$.

a) Montrer que $x \notin p(Z)$ si et seulement si il existe d tel que

$$(*) \qquad (Y_0, \dots, Y_m)^d \subset \big(F_1(x,Y), \dots, F_N(x,Y)\big) .$$

b) Soit V_d l'espace vectoriel des polynômes homogènes de $\mathbf{k}[Y_0, \dots, Y_m]$ de degré d (avec $V_d = 0$ pour $d < 0$) ; montrer que la propriété $(*)$ est satisfaite si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi_d(x)\colon & V_{d-d_1} \oplus \cdots \oplus V_{d-d_N} & \longrightarrow & V_d \\ & (G_1, \dots, G_N) & \longmapsto & \sum_i F_i(x,Y) G_i(Y) \end{array}$$

n'est pas surjective. En déduire que le complémentaire de $p(Z)$ est ouvert dans $\mathbf{A}^n$.

18)**Grassmanniennes et plongements de Plücker :** nous voulons munir l'ensemble $G(r, V)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de V (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des sous-espaces linéaires de dimension $r-1$ de $\mathbf{P}V$), d'une structure de variété projective.

a) Construire une injection ι de $G(r, V)$ dans $\mathbf{P}(\wedge^r V)$.

b) Soit ω un élément de $\wedge^r V$. Montrer que $[\omega]$ est dans l'image de ι si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\omega : & V & \longrightarrow & \wedge^{r+1} V \\ & v & \longmapsto & \omega \wedge v \end{array}$$

est de rang $\leq \dim V - r$. En déduire que l'image de ι est fermée.

c) Dans le cas $r = 2$, retrouver le résultat de la question précédente en montrant que l'image de ι est définie par l'équation $\omega \wedge \omega = 0$, donc par des quadriques. En particulier, $G(2, \mathbf{A}^4)$ s'identifie à une quadrique de $\mathbf{P}^5$ de rang 6.

d) Soit L un sous-espace vectoriel de V. Pour tout entier l, montrer que

$$\Sigma_l(L) = \{[\Lambda] \in G(r, V) \mid \dim(\Lambda \cap L) \geq l\}$$

est une sous-variété de $G(r, V)$ (*Indication :* montrer que c'est l'intersection de $\iota(G(r, V))$ avec un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}(\wedge^r V)$). C'est un exemple de *cycle de Schubert.*

e) En particulier, si V est de dimension n et L de dimension $n-r$, montrer que le cycle de Schubert $\Sigma_1(L)$ est l'intersection de $\iota(G(r, V))$ avec un hyperplan de $\mathbf{P}(\wedge^r V)$, que son complémentaire est isomorphe à $\mathbf{A}^{r(n-r)}$, et que $G(r, V)$ est irréductible (*Indication :* utiliser l'exercice 1.6.4)).

f) Montrer que la *variété d'incidence*

$$\{([\Lambda], [x]) \in G(r, V) \times \mathbf{P}V \mid x \in \Lambda\ \}$$

est fermée.

g) En déduire que, pour toute sous-variété Z de $G(r, \mathbf{P}V)$, la réunion $\bigcup_{[\Lambda] \in Z} \Lambda$ est fermée dans $\mathbf{P}V$.

CHAPITRE 3

Dimension

Comment définir la dimension d'une variété algébrique ? L'approche de la géométrie différentielle, basée sur des « cartes », ne convient pas ici : en général, une variété algébrique ne contient pas d'ouvert non vide isomorphe à un ouvert d'un espace affine.

3.1. Définition de la dimension

L'idée de cette définition, qui paraîtra à première vue très abstraite, est qu'intuitivement, la dimension maximale d'une sous-variété fermée d'une variété irréductible X distincte de X devrait être la dimension de X moins 1.

DÉFINITION 3.1. *Soit X un espace topologique ; la dimension de X est le maximum des entiers n pour lesquels il existe des parties irréductibles fermées $X_0, \ldots, X_n$ de X vérifiant $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$.*

La dimension de X est donc un entier positif, ou $+\infty$, ou $-\infty$ si X est vide.

PROPOSITION 3.2. *Soit X un espace topologique et soit Y un sous-ensemble de X.*

a) On a $\dim Y \leq \dim X$.

b) Si X est irréductible et de dimension finie, et si Y est un fermé distinct de X, on a $\dim Y < \dim X$.

c) Si X est réunion de fermés $X_1, \ldots, X_N$, on a $\dim X = \max \dim X_i$.

DÉMONSTRATION. Si $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n$ est une chaîne de parties irréductibles fermées de Y, les adhérences $\overline{Y}_i$ dans X sont encore distinctes puisque, les Y_i étant fermés dans Y, on a $Y_i = Y \cap \overline{Y}_i$. Ceci prouve a). Pour b), il suffit de rajouter X à une chaîne maximale de fermés de Y. Montrons c) ; posons $n = \max \dim X_i$. Le a) montre $n \leq \dim X$; si $n = +\infty$, c'est fini. Sinon, supposons que l'on ait une chaîne $F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n+1}$ de fermés irréductibles de X. Le fermé irréductible F_{n+1} est de dimension $\geq n+1$; c'est la réunion des fermés $X_i \cap F_{n+1}$, donc il est égal à l'un d'eux, et est contenu dans un X_i. Cela contredit a). $\square$

PROPOSITION 3.3. *Pour qu'une variété soit de dimension* 0*, il faut et il suffit qu'elle consiste en un nombre fini non nul de points.*

DÉMONSTRATION. Soit V une variété de dimension 0 ; tout fermé irréductible contenant un point est réduit à ce point, donc les composantes irréductibles de V sont des points. $\square$

3.2. Dimension des variétés algébriques

La proposition 3.2.c) montre que la dimension d'une variété algébrique est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles. On dit qu'une variété est *de dimension pure n*, ou *équidimensionnelle* de dimension n, si chaque composante irréductible est de dimension n.

Si x est un point de X, on appelle dimension de X en x, et on note $\dim_x X$, le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X passant par x.

Vue la correspondance entre sous-variétés irréductibles d'une variété affine V et idéaux premiers de $A(V)$ (th. 1.14), nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 3.4. *La dimension d'une variété affine V est la dimension de Krull de l'anneau $A(V)$.*

Rappelons un résultat fondamental d'algèbre commutative.

THÉORÈME 3.5. *Soit A une $\mathbf{k}$-algèbre intègre de type fini. La dimension de Krull de l'anneau A est le degré de transcendance de son corps des fractions sur $\mathbf{k}$.*

On en déduit que la dimension d'une variété affine V est finie, et vaut, si elle est irréductible, $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbf{k}}\, K(V)$. En particulier, la dimension de $\mathbf{A}^n$ est n.

PROPOSITION 3.6. *Toute variété est de dimension finie et tout ouvert dense est de même dimension.*

DÉMONSTRATION. Le premier point résulte du théorème 3.5 et de la proposition 3.2.c). Soit X une variété, soient $X_1, \dots, X_N$ les composantes irréductibles de X, et soit U un ouvert dense dans X. Le complémentaire de $\bigcup_{j \neq i} X_j$ est ouvert non vide dans X, donc rencontre U. Comme il est contenu dans X_i, il s'ensuit que $U \cap X_i$ est un dense dans X_i.

On est donc ramené, par la proposition 3.2.c), au cas où X est irréductible. Supposons d'abord X affine. Pour tout ouvert dense U, il existe une fonction régulière f sur X nulle sur $X \smallsetminus U$, de sorte que

$$U \supset X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

On a montré (exerc. 2.10.2)) que X_f est affine d'algèbre $A(X)_f$. En particulier, $K(X) = K(X_f)$, et X et X_f ont même dimension (th. 3.5). Comme

$$\dim X_f \leq \dim U \leq \dim X$$

(prop. 3.2.a)), U et X ont même dimension.

Passons au cas général ; si U et V sont des ouverts affines non vides de X, ils sont irréductibles et leur intersection est dense dans U et V, de sorte que

$$\dim(U \cap V) = \dim U = \dim V.$$

Tous les ouverts affines non vides de X ont donc la même dimension finie r. Soit $F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$ une chaîne de fermés irréductibles de X. Soit $x \in F_0$ et soit U un ouvert affine contenant x. Les fermés $U \cap F_i$ de U sont irréductibles (exerc. 1.6.3)a)), distincts car d'adhérence F_i. On a donc $n \leq \dim U = r \leq \dim X$, d'où $\dim X \leq r$. On conclut en remarquant que tout ouvert non vide contient un ouvert affine. $\square$

La proposition nous permet de définir la codimension d'une sous-variété Y d'une variété X comme l'entier $\operatorname{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$ (cette définition n'est en fait correcte que lorsque X est équidimensionnelle).

EXEMPLES 3.7. 1) On en déduit par exemple que la dimension de $\mathbf{P}^n$ est n. La variété $\widetilde{\mathbf{P}^n}$ construite dans le chapitre précédent est aussi de dimension n, puisqu'elle contient un ouvert dense isomorphe à un ouvert dense de $\mathbf{P}^n$. Plus généralement, des variétés birationnellement isomorphes (*cf.* 2.28)) ont même dimension. S'il existe une application rationnelle dominante $X \dashrightarrow Y$, on a $\dim Y \leq \dim X$ par 2.26.

2) Le produit $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ contient un ouvert dense isomorphe à $\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n$, donc à $\mathbf{A}^{m+n}$; il est de dimension $m+n$.

3) La grassmannienne $G(r, \mathbf{A}^n)$ est de dimension $r(n-r)$ (*cf.* exerc. 2.10.18)).

Soit X une variété *irréductible*. On a défini dans la proposition 2.25 le corps $K(X)$; pour tout ouvert affine U dense dans X, il est isomorphe à $K(U)$. Le théorème 3.5 et la proposition 3.6 entraînent

$$\dim X = \text{deg.tr.}_{\mathbf{k}} K(X).$$

3.3. Dimension et nombre d'équations

Le résultat principal de cette section est le suivant.

THÉORÈME 3.8. *Soit X une sous-variété quasi-projective de $\mathbf{P}^N$ et soient $F_1, \ldots, F_r$ des polynômes homogènes en $N+1$ variables.*

a) Si X est de dimension pure n, chaque composante de $X \cap V(F_1, \ldots, F_r)$ est de dimension $\geq n-r$.

b) Si X est projective de dimension n et $r \leq n$, l'intersection $X \cap V(F_1, \ldots, F_r)$ n'est pas vide.

Dans a), $X \cap V(F_1, \ldots, F_r)$ peut très bien être vide. D'autre part, a) a la version affine suivante : si X est une variété affine de dimension pure n, et $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions régulières sur X, chaque composante de $X \cap V(f_1, \ldots, f_r)$ est de dimension $\geq n-r$.

Ce théorème est en fait la version géométrique du Hauptidealsatz de Krull, que nous ne démontrerons pas ici.

THÉORÈME 3.9. *Soit A une $\mathbf{k}$-algèbre intègre de type fini, soit f un élément non nul de A et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal contenant f. On a*

$$\text{deg.tr.}_{\mathbf{k}} K(A/\mathfrak{p}) = \text{deg.tr.}_{\mathbf{k}} K(A) - 1.$$

Il existe toujours un tel idéal $\mathfrak{p}$ car toute suite décroissante d'idéaux *premiers* de A est stationnaire (cela car A est de dimension de Krull finie par le théorème 3.5).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.8. Procédons par récurrence sur r. Soit Z une composante irréductible de $X \cap V(F_1, \ldots, F_r)$; elle est contenue dans une composante irréductible X' de $X \cap V(F_1, \ldots, F_{r-1})$, qui est de dimension $\geq n-r+1$ par hypothèse de récurrence. Si F_r s'annule identiquement sur X', la variété Z est aussi de dimension $\geq n-r+1$.

Supposons que F_r ne s'annule pas identiquement sur X'. Soit x un point de Z, et soit U un voisinage ouvert affine de x dans X', contenu dans un ouvert standard ; on a $\dim Z = \dim(Z \cap U)$ et $\dim X' = \dim U$. Soit f_r la fonction régulière induite par F_r sur U ; elle n'est pas identiquement nulle, et $Z \cap U$ est une composante irréductible de $V(f_r)$; elle est donc de la forme $V(\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de $A(U)$ contenant f_r (*cf.* 1.15) ; le Hauptidealsatz donne $\dim(Z \cap U) = \dim U - 1 \geq n-r$. Ceci montre a).

Pour b), il suffit de traiter le cas $r=1$, pour lequel on peut invoquer le corollaire 2.39 et la proposition 3.3. $\square$

En particulier, la codimension d'une hypersurface est 1. Il est important de remarquer que la « réciproque » du théorème est fausse : il est inexact que toute sous-variété irréductible de codimension r dans $\mathbf{P}^n$ puisse être définie par r équations.

Corollaire 3.10. *Les hypersurfaces de $\mathbf{A}^n$ ou de $\mathbf{P}^n$ sont les sous-variétés de codimension pure* 1.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une sous-variété irréductible X de $\mathbf{P}^n$ de codimension 1 est définie par une équation. Soit F un élément non nul de $I(X)$. Puisque R est factoriel, on peut décomposer F en produits de polynômes irréductibles $F = F_1 \cdots F_N$, et chaque F_i est homogène. Puisque $I(X)$ est premier, un des F_i est dans $I(X)$. Mais $V(F_i)$ est alors un fermé irréductible contenant X, distinct de $\mathbf{P}^n$, donc de dimension $< n$. La proposition 3.2 entraîne $X = V(F_i)$.

Inversement, le théorème 3.8.a) entraîne que toute composante d'une hypersurface est de dimension $\geq n-1$. Il y a égalité par 3.2.a). □

3.4. Applications génériquement finies

Soit X une variété ; on dit qu'*un point général (ou générique) de X a une propriété $\mathscr{P}$* si l'ensemble des points qui vérifient $\mathscr{P}$ contient un ouvert dense dans X. Si un point général de X a la propriété $\mathscr{P}$, et qu'un point général de X a la propriété $\mathscr{Q}$, un point général de X a les propriétés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ (l'intersection de deux ouverts denses est dense).

Par exemple, si $u\colon X \to Y$ est une application régulière, on dit que la fibre générale de u a une propriété $\mathscr{P}$ s'il existe un ouvert U dense dans Y tel que, pour tout y dans U, la fibre $u^{-1}(y)$ ait la propriété $\mathscr{P}$.

3.11. Supposons X et Y irréductibles et u *dominante*. Rappelons tout d'abord que u induit une extension de corps $u^*\colon K(Y) \hookrightarrow K(X)$ (*cf.* 2.26). Ensuite, si V est un ouvert affine non vide de Y, il rencontre $u(X)$, donc $u^{-1}(V)$ contient un ouvert affine non vide U de X. L'application induite $u'\colon U \to V$ est dominante.

Théorème 3.12. *Soient X et Y des variétés irréductibles et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière dominante. Pour que la fibre générale de u soit finie, il faut et il suffit que u^* fasse de $K(X)$ une extension finie de $K(Y)$. Dans ce cas, X et Y ont même dimension, et le nombre de points d'une fibre générale de u est inférieur au degré $[K(X) : K(Y)]$ de cette extension, avec égalité si $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle.*

Lorsque u satisfait aux conditions du théorème, on dit que u est *génériquement finie*; son *degré* est le nombre de points d'une fibre générale. La démonstration montre plus généralement que le nombre de points d'une fibre générale de u est égal au degré de l'extension $[K(X) : K(Y)]$ si celle-ci est *séparable* (c'est-à-dire si le polynôme dérivé du polynôme minimal de tout élément de $K(X)$ n'est pas nul).

Démonstration du théorème. Supposons tout d'abord X et Y affines. Identifiant X au graphe de u, on se ramène au cas où u est la restriction d'une projection $\pi\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n-1}$ donnée par

$$\pi(y, x_n) = y.$$

La $\mathbf{k}$-algèbre $A(X)$ est alors engendrée par $A(Y)$ et x_n, donc l'extension $K(X)$ de $K(Y)$ est engendrée par x_n.

Supposons x_n algébrique sur $K(Y)$, de polynôme minimal $G(T) \in K(Y)[T]$, que l'on peut écrire, en chassant les dénominateurs

$$G(T) = a_d(y)T^d + \cdots + a_0(y) \ ,$$

où les a_i sont dans $A(Y)$, avec $a_d \neq 0$. On a alors $d = [K(X) : K(Y)]$ et $G(x_n) = 0$ dans $A(X)$. Autrement dit, étant donné un point y de Y, les points (y, x_n) dans X (c'est-à-dire les points de la fibre $\pi^{-1}(y)$) sont caractérisés par la condition $G(x_n) = 0$.

Si $a_d(y) \neq 0$, la fibre a donc au plus d points. Lorsque la caractéristique de $\mathbf{k}$ est nulle (ou lorsque l'extension $K(Y) \subset K(X)$ est séparable), le polynôme dérivé G' n'est pas nul, donc est premier avec G dans $K(Y)[T]$: il existe des éléments a, b et c de $A(Y)$, avec $c \neq 0$, tels que $aG + bG' = c$; la fibre d'un point y tel que $c(y) \neq 0$ a exactement d points.

Supposons x_n transcendant sur $K(Y)$; si on écrit un élément F de $I(X)$ comme

$$F(y, x_n) = b_e(y)x_n^e + \cdots + b_0(y) \ ,$$

tous les b_i doivent s'annuler sur Y, donc X contient toute la fibre de π au-dessus de chaque point de Y.

Pour traiter le cas général, on utilise la construction et les notations de 3.11. Si la fibre générale de u est finie, il en est de même pour celle de u' ; comme $K(X) \simeq K(U)$ et $K(Y) \simeq K(V)$, on conclut par le cas déjà traité que $K(X)$ est une extension finie de $K(Y)$. Inversement, si $K(X)$ est une extension finie de $K(Y)$, les variétés affines U et V ont même dimension par le cas déjà traité et, par l'exemple 3.7.1) et la proposition 3.2.b), on a

$$\dim \overline{u(X \smallsetminus U)} \leq \dim(X \smallsetminus U) < \dim X = \dim U = \dim V = \dim Y \ ,$$

de sorte que $\overline{u(X \smallsetminus U)}$ est distinct de Y. Les fibres générales de u et de u' sont ainsi les mêmes, donc ont le même nombre d'éléments, qui est $[K(X) : K(Y)]$ par le cas déjà traité. □

Exemples 3.13. 1) Projetons la conique C d'équation $XY = Z^2$ sur $\mathbf{P}^1$ par l'application régulière $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Si $\mathbf{k}$ est de caractéristique différente de 2, chaque fibre a deux points, sauf celles de $(0, 1)$ et de $(1, 0)$ (en caractéristique 2, toutes les fibres ont un seul point). L'extension de corps correspondante est $K(X) \subset K(Z)$, où X est envoyé sur Z^2 ; elle est de degré 2 (inséparable en caractéristique 2).

2) En caractéristique 0, le théorème entraîne qu'une application régulière entre variétés irréductibles dont la fibre générale a un seul point est un morphisme birationnel (c'est faux en caractéristique > 0 !).

Corollaire 3.14. *Pour toute variété irréductible X de dimension n, il existe une application régulière dominante $X \to \mathbf{P}^n$ à fibres finies.*

Démonstration. On peut supposer $X \subset \mathbf{P}^N$ projective ; on procède par récurrence sur la codimension $c = N - n$ de X. Si $c = 0$, c'est fini ; si $c > 0$, on choisit un point x hors de X, et on projette depuis x sur un hyperplan H disjoint de x. Les fibres de la restriction $p \colon X \to H$ sont finies, le théorème entraîne $\dim p(X) = \dim(X)$, donc $\operatorname{codim}_H p(X) = c - 1$. □

Corollaire 3.15. *Soient X et Y des variétés. On a*

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Démonstration. Supposons X et Y irréductibles. Par le corollaire précédent, il existe des applications régulières $X \to \mathbf{P}^m$ et $Y \to \mathbf{P}^n$ à fibres finies. Les fibres de l'application régulière induite $X \times Y \to \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ sont finies, de sorte que $\dim(X \times Y) = \dim(\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n) = m + n$ (th. 3.12 et ex. 3.7.2)).

Dans le cas général, on note X_i les composantes irréductibles de X, et Y_j celles de Y. Le produit $X \times Y$ est réunion des fermés $X_i \times Y_j$, donc sa dimension est le maximum des $\dim X_i + \dim Y_j$, c'est-à-dire $\dim X + \dim Y$. □

Exemple 3.16. Soit $\pi\colon \mathbf{A}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ la projection canonique. Si X est une variété contenue dans $\mathbf{P}^n$, on pose $C^0X = \pi^{-1}(X)$; c'est une variété quasi-projective dans $\mathbf{A}^{n+1}$, irréductible si X l'est, de dimension $\dim X + 1$ (si U est un ouvert standard, $C^0X \cap \pi^{-1}(U)$ est isomorphe à $(X \cap U) \times \mathbf{k}^*$). On note CX l'adhérence de C^0X ; c'est une sous-variété de $\mathbf{A}^n$, qui est la réunion de C^0X et de l'origine si X est fermée non vide.

Théorème 3.17. *Soient X et Y des variétés contenues dans $\mathbf{P}^n$.*

a) Si X et Y sont irréductibles, chaque composante de $X \cap Y$ est de dimension $\geq \dim X + \dim Y - n$.

b) Si X et Y sont fermées et que $\dim X + \dim Y \geq n$, l'intersection $X \cap Y$ n'est pas vide.

Démonstration. On passe aux cônes : $C^0(X \cap Y)$ est égal à $C^0X \cap C^0Y$, qui est isomorphe à l'intersection dans $\mathbf{A}^{2n+2}$ de $C^0X \times C^0Y$ avec la diagonale Δ. Celle-ci étant définie par l'annulation de $n+1$ formes linéaires, chaque composante de $(C^0X \times C^0Y) \cap \Delta$ est de dimension $\geq \dim C^0X + \dim C^0Y - n - 1$ (th. 3.8). Cela montre a).

Pour b), on peut supposer X et Y irréductibles. Le même raisonnement montre que chaque composante de $CX \cap CY$ est de dimension $\geq \dim X + \dim Y - n + 1 \geq 1$. Comme $CX \cap CY$ contient l'origine, il contient aussi d'autres points (prop. 3.3), qui sont alors dans $C^0X \cap C^0Y = C^0(X \cap Y)$. Cela démontre b). □

On trouvera une autre démonstration de ce théorème dans l'exercice 3.9.3).

3.5. Applications régulières et dimension

On se propose dans cette section de comparer la dimension des fibres d'une application régulière surjective (ou simplement dominante) $X \to Y$ avec celles de X et de Y. Pour l'éclatement $\varepsilon\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^n$ (*cf.* § 2.8), toutes les fibres sont des points sauf une qui est un espace projectif de dimension $n-1$. Sur cet exemple, les fibres générales sont de dimension constante $\dim X - \dim Y$, mais la dimension de certaines fibres peut augmenter. C'est exactement ce qui se passe en général.

Si $u\colon X \to Y$ est une application régulière et x un point de X, on notera X_x la fibre de u contenant x, c'est-à-dire $u^{-1}(u(x))$.

Théorème 3.18. *Soit X une variété et soit $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière. L'application δ qui à un point x de X associe $\dim_x(X_x)$ est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que pour tout entier r, l'ensemble*

$$X(r) = \{x \in X \mid \dim_x(X_x) \geq r\}$$

est fermé. Si X est irréductible, on a

$$\dim X = \dim \overline{u(X)} + \min_{x \in X} \delta(x).$$

Démonstration. Soient $X_1, \dots, X_N$ les composantes irréductibles de X et soit u_i la restriction de u à X_i ; on pose $\delta_i(x) = \dim_x u_i^{-1}(u_i(x))$. On a alors $X_x = \bigcup_i (X_i)_x$, de sorte que $\delta(x) = \max_i \delta_i(x)$. On se ramène donc au cas où X est irréductible. Soit Y l'adhérence de $u(X)$, de sorte que l'application régulière $u\colon X \to Y$ est dominante.

Lemme 3.19. *Soit Y une variété affine de dimension pure e et soit y un point de Y. Il existe des fonctions régulières $f_1, \dots, f_e$ nulles en y telles que $V(f_1, \dots, f_e)$ soit fini.*

Démonstration. Supposons $Y \subset \mathbf{A}^N \subset \mathbf{P}^N$, et procédons par récurrence sur e. Si $e = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $e > 0$, l'intersection des hyperplans passant par y étant $\{y\}$, il en existe un, H, qui ne contient aucune composante irréductible de Y. Le théorème 3.8 entraîne que $H \cap Y$ est de dimension pure $e - 1$. On lui applique l'hypothèse de récurrence. $\square$

Soit e la dimension de Y. Soit y un point de Y, soit V un voisinage affine de y dans Y et soient $f_1, \dots, f_e$ des fonctions régulières sur V telles que y soit isolé dans $V(f_1, \dots, f_e)$. Toute composante irréductible de $u^{-1}(y)$ est une composante irréductible de $V(u^* f_1, \dots, u^* f_e)$, donc est de dimension $\geq \dim X - e$ (th. 3.8). Cela montre $\delta(x) \geq \dim X - \dim Y$ pour tout x dans X.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ouvert dense de X sur lequel on a égalité. Si u' est la restriction de u à un ouvert dense de X, les fonctions δ' et δ correspondantes coïncident sur cet ouvert. On peut donc supposer par 3.11 que X et Y sont affines.

On peut aussi supposer comme dans la démonstration du théorème 3.12 que u est la restriction à une sous-variété (fermée) X de la projection $\pi\colon \mathbf{A}^{n+m} \to \mathbf{A}^n$; elle se factorise en

$$u\colon X = X_m \xrightarrow{\pi_{m-1}} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-2}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_1 \xrightarrow{\pi_0} X_0 = Y \subset \mathbf{A}^n ,$$

où $X_i \subset \mathbf{A}^{n+i}$ est l'adhérence (irréductible) de l'image de X par la projection $p_i\colon \mathbf{A}^{n+m} \to \mathbf{A}^{n+i}$.

Pour chaque application $\pi_i\colon X_{i+1} \to X_i$, la situation a déjà été analysée dans la démonstration du théorème 3.12 : soit x_{n+i+1} est transcendant sur $K(X_i)$, et l'on a $X_{i+1} = X_i \times \mathbf{A}^1$ et $\dim X_{i+1} = \dim X_i + 1$, soit x_{n+i+1} est algébrique sur $K(X_i)$, il existe un ouvert U_i dense dans X_i au-dessus duquel les fibres de π_i sont finies, et $\dim X_{i+1} = \dim X_i$. Soit J l'ensemble des indices i pour lesquels la première alternative est vérifiée ; son cardinal est $\dim X - \dim Y$.

Soit x un point de l'ouvert $U = \bigcap_{i=0}^{m-1} p_i^{-1}(U_i) \cap X$ de X, et soit X' une composante irréductible de la fibre X_x passant par x. On factorise l'application $u|_{X'}\colon X' \to \{u(x)\}$ de la même façon que l'on a factorisé u, et l'on prend des notations analogues ; par construction, les fibres de π'_i sont contenues dans celles de π_i, donc sont finies si $i \notin J$, de sorte que $J' \subset J$ et $\dim X' = \operatorname{Card} J' \leq \operatorname{Card} J = \dim X - \dim Y$. On a donc $\delta(x) \leq \dim X - \dim Y$.

Comme on a montré l'inégalité opposée, on en déduit que δ atteint son minimum $\delta_0 = \dim X - \dim Y$ sur l'ouvert dense U de X.

Il reste à montrer que $X(r)$ est fermé. Procédons par récurrence sur $\dim X$. Si $r \leq \delta_0$, on a $X(r) = X$; d'autre part, on vient de montrer qu'il existe un fermé F distinct de X qui contient tous les $X(r)$ pour $r > \delta_0$. On a clairement $F(r) \subset X(r)$; inversement, si $r > \delta_0$ et $x \in X(r)$, il existe une composante X' de X_x passant par

x, de dimension $\geq r > \delta_0$. On a alors $X' \subset F$, et même $X' \subset F(r)$, de sorte que $x \in F(r)$. On a donc $X(r) = F(r)$ pour $r > \delta_0$, et l'hypothèse de récurrence entraîne que $X(r)$ est fermé dans F, donc dans X. □

Donnons un exemple d'application du théorème : soient X une variété irréductible et $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière ; s'il existe un point x de X isolé dans sa fibre, alors u est génériquement finie sur son image, et l'adhérence de l'image de u est de même dimension que X (en effet, on a $\delta(x) = 0$).

Le corollaire suivant, à part les informations qu'il donne sur la dimension des fibres, montre que *l'image d'une application régulière dominante contient un ouvert dense.*

Corollaire 3.20. *Soit X une variété irréductible et soit $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière ; posons $Y = \overline{u(X)}$.*

a) Soit y un point de $\mathbf{P}^n$; toute composante irréductible de $u^{-1}(y)$ est de dimension $\geq \dim X - \dim Y$.

b) Il existe un ouvert non vide U de Y tel que $u^{-1}(y)$ soit de dimension pure $\dim X - \dim Y$ pour tout y dans U.

Démonstration. Si X' est une composante de $u^{-1}(y)$ et x un point de X' qui n'est sur aucune autre composante de $u^{-1}(y)$, on a $\dim X' = \delta(x) \geq \delta_0 = \dim X - \dim Y$, par le théorème, ce qui montre a). Pour b), il s'agit de montrer que pour toute composante irréductible F de $X(\delta_0 + 1)$, la variété $\overline{u(F)}$ est distincte de Y. Si x est dans F, mais dans aucune autre composante irréductible de $X(\delta_0 + 1)$, il existe une composante X' de X_x de dimension $> \delta_0$. On a alors $X' \subset X(\delta_0 + 1)$, donc $X' \subset F$, ce qui montre que le minimum de la fonction δ associée à l'application régulière $u|_F\colon F \to \overline{u(F)}$ est $\geq \delta_0 + 1$. On en déduit $\dim \overline{u(F)} \leq \dim F - \delta_0 - 1 \leq \dim Y - 2$ par le théorème. □

Exemple 3.21. Soit G un groupe algébrique (c'est-à-dire que G est une variété algébrique munie d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$ et l'inverse $G \to G$ soient des applications régulières) irréductible et soit X un espace homogène algébrique, c'est-à-dire une variété algébrique munie d'une opération transitive $G \times X \to X$ qui est une application régulière. Les stabilisateurs des points de X sont tous conjugués, donc ont même dimension ; appliquant le corollaire à l'application régulière surjective $G \to X$ qui applique g sur $g \cdot x_0$, on en déduit $\dim X = \dim G - \dim G_{x_0}$.

3.6. Cas des applications fermées

Le résultat suivant est la traduction directe du théorème 3.18 dans le cas d'une application fermée ; c'est sous cette forme que ce théorème est le plus souvent utilisé. Attention : l'hypothèse u fermée est essentielle. Perrin donne dans [**P**], p. 97, un exemple d'application régulière $u\colon \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ surjective, telle que $\{y \in \mathbf{A}^3 \mid \dim u^{-1}(y) \geq 1\}$ ne soit pas fermé. Curieusement, cet énoncé donne lieu à beaucoup d'erreurs dans la littérature ([**S**], Corollary p. 61 ; [**H**], page 139, l. 22).

On rappelle (cor. 2.37) que toute application régulière définie sur une variété projective est fermée.

Proposition 3.22. *Soit $u\colon X \to Y$ une application régulière fermée. L'application qui à un point y de Y associe la dimension de la fibre $u^{-1}(y)$ est semi-continue* *supérieurement, c'est-à-dire que pour tout entier r, l'ensemble*

$$Y(r) = \{y \in Y \mid \dim u^{-1}(y) \geq r\}$$

est fermé.

DÉMONSTRATION. On a $Y(r) = u(X(r))$. □

La proposition suivante est utile pour montrer que l'espace source d'une application régulière est irréductible (on rappelle que l'image d'un espace irréductible par une application continue est irréductible ; *cf.* exerc. 1.6.3)b)).

PROPOSITION 3.23. *Soit $u\colon X \to Y$ une application régulière surjective fermée. On suppose que Y est irréductible et que toutes les fibres de u sont irréductibles de même dimension r. Alors X est irréductible de dimension* $\dim Y + r$.

DÉMONSTRATION. Soient $X_1, \ldots, X_N$ les composantes irréductibles de X ; pour y dans Y, notons $d_i(y)$ la dimension de la fibre de l'application $u_i = u|_{X_i}\colon X_i \to Y$. On a par hypothèse $\max_i d_i(y) = r$ pour tout y dans Y, de sorte que Y est la réunion des $\{y \in Y \mid d_i(y) \geq r\}$. Ceux-ci sont fermés par la proposition 3.22 ; Y étant irréductible, il existe i tel que $d_i(y) = r$ pour tout y. La fibre $u_i^{-1}(y)$, contenue dans le fermé irréductible $u^{-1}(y)$, est alors de même dimension, donc lui est égale, et $X = \bigcup_{y \in Y} u^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} u_i^{-1}(y) = X_i$ est irréductible. □

3.7. Applications

Les groupes algébriques ont été définis dans l'exemple 3.21 ; une variété abélienne est un groupe algébrique irréductible qui est une variété projective. Commençons par un lemme.

LEMME 3.24. *Soit X une variété projective irréductible, soit Y une variété irréductible, y_0 un point de Y et soit $u\colon X \times Y \to Z$ une application régulière telle que $u(X \times \{y_0\})$ ait un seul point. Alors $u(X \times \{y\})$ a un seul point pour tout point y de Y.*

DÉMONSTRATION. Soit Γ le graphe de u et soit $q\colon X \times Y \times Z \to Y \times Z$ la projection. Comme X est projective, le théorème 2.34 entraîne que $q(\Gamma)$ est fermé dans $Y \times Z$; il est aussi irréductible par hypothèse. La projection $q(\Gamma) \to Y$ est surjective, et la fibre de y_0 est un point, de sorte que $q(\Gamma)$ a même dimension que Y (cor. 3.20). Soit x_0 un point de X ; la variété $\{(y, u(x_0, y)) \mid y \in Y\}$ est fermée dans $q(\Gamma)$ et de même dimension : elles sont égales et, pour tout x dans X et tout y dans Y, on a $u(x, y) = u(x_0, y)$. □

La conclusion du lemme est fausse si l'on ne suppose pas X projective, comme le montre l'exemple de l'application $u\colon \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ définie par $u(x, y) = xy$.

THÉORÈME 3.25. *Une variété abélienne est un groupe commutatif.*

DÉMONSTRATION. Soit G une variété abélienne. L'application régulière $u\colon G \times G \to G$ définie par $u(g, g') = g^{-1}g'g$ contracte $G \times \{e\}$ en un point. Le lemme entraîne que pour tous g, g' dans G, on a $u(g, g') = u(e, g') = g'$, de sorte que G est commutatif. □

Il existe bien entendu des groupes algébriques non commutatifs (comme le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{k})$).

Proposition 3.26. *Soit G une variété abélienne et soit H un groupe algébrique. Une application régulière $u\colon G \to H$ qui vérifie $u(e) = e$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Définissons une application régulière $u'\colon G \times G \to H$ par $u'(g, g') = u(g)u(g')u(gg')^{-1}$. On a $u'(G \times \{e\}) = \{e\}$, et le lemme entraîne que pour tous g, g' dans G, on a $u'(g, g') = u'(e, g') = e$, ce qui montre la proposition. $\square$

Une dernière application concerne la structure des applications régulières générales. On a vu que l'image d'une application régulière n'est en général pas fermée, ni même localement fermée. Il existe cependant une classe d'ensemble qui est stable par les applications régulières. On dit qu'un sous-ensemble d'une variété est *constructible* si c'est une réunion finie de sous-ensembles localement fermés. Par exemple, la réunion dans $\mathbf{A}^2$ du complémentaire de l'axe des y et de l'origine, que l'on avait obtenue dans le § 2.9 comme image d'une application régulière, est constructible.

Théorème 3.27 (Chevalley). *L'image d'un ensemble constructible par une application régulière est constructible.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'image d'une application régulière $u\colon X \to Y$ est constructible. Procédons par récurrence sur la dimension de Y. Si $\dim Y = 0$, c'est clair. On peut supposer X irréductible et u dominante. D'après le corollaire 3.20, $u(X)$ contient un ouvert dense U. Posons $F = Y \smallsetminus U$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $u(X) = U \cup u(u^{-1}(F))$ est constructible. $\square$

3.8. Applications finies

Nous nous intéressons maintenant aux applications régulières dont les fibres sont finies. Sous l'hypothèse que la variété de départ est projective, nous allons voir qu'elles ont une propriété algébrique.

Théorème 3.28. *Soient X et Y des variétés et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière. On suppose que X est projective et que toutes les fibres de u sont finies. Tout point de Y a un voisinage affine V tel que $U = u^{-1}(V)$ est encore affine et que le morphisme $u^*\colon A(V) \to A(U)$ fasse de $A(U)$ un $(A(V))$-module de type fini.*

Une application qui vérifie ces propriétés est dite finie. On remarquera que dans la démonstration, la projectivité de X n'est utilisée que pour factoriser u en

$$X \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

où X est une sous-variété fermée de $\mathbf{P}^N \times Y$. La conclusion reste donc valable sous cette hypothèse plus faible. Ce qui compte, ce n'est pas vraiment que X soit projective, mais que les fibres de u le soient. Sans cette hypothèse, la conclusion ne subsiste pas : les fibres de l'application régulière $u\colon \mathbf{A}^1 \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{A}^1$ sont bien finies, mais $u^*\colon k[T] \to k[T, T^{-1}]$ ne fait pas de $k[T, T^{-1}]$ un $k[T]$-module de type fini !

Démonstration. On se donne un espace projectif $\mathbf{P}^N$ dans lequel X est une sous-variété. On écrit u comme la composée de l'application graphe $X \to X \times Y$, de l'inclusion $X \times Y \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times Y$ et de la seconde projection $\pi\colon \mathbf{P}^N \times Y \to Y$. On peut donc supposer que X est une sous-variété de $\mathbf{P}^N \times Y$ et que u est la restriction à X de la seconde projection.

Soit y_0 un point de Y. Comme $u^{-1}(y_0)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{P}^N \times \{y_0\}$, il existe un hyperplan H de $\mathbf{P}^N$ qui ne le rencontre pas, c'est-à-dire que $(H \times \{y_0\}) \cap X$

est vide. En d'autres termes, $p_2((H \times Y) \cap X)$ ne contient pas y_0. C'est un sous-ensemble fermé de Y (th. 2.34). Si on remplace Y par un voisinage affine de y_0 dans son complémentaire, $(H \times Y) \cap X$ est maintenant vide, de sorte que X est contenu dans

$$(\mathbf{P}^N \smallsetminus H) \times Y = \mathbf{A}^N \times Y \ ,$$

avec Y affine. Il en résulte que X, comme sous-ensemble fermé d'une variété affine, est affine.

On est ramené, en procédant par récurrence sur N, au cas

$$X \subset \mathbf{A}^1 \times Y \to Y.$$

On a $A(\mathbf{A}^1 \times Y) = A(Y)[T]$ et X est défini dans cette algèbre par un idéal I. La fibre de y_0 étant finie, il existe $F \in I$ tel que $F(y_0, T) \neq 0$. Ecrivons $F(y,T) = \sum_{i=0}^m a_i T^i$, avec $a_i \in A(Y)$ et $a_m(y_0) \neq 0$. Au-dessus de l'ouvert affine $a_m \neq 0$ de Y, l'algèbre $A(X)$ est un quotient de $A(Y)[T]/(F)$, où F est un polynôme unitaire à coefficients dans $A(Y)$, donc est un $A(Y)$-module de type fini. □

3.9. Exercices

1) Soit X une variété affine irréductible et soit Y une sous-variété irréductible de X de codimension r.

a) Montrer qu'il existe $f_1, \ldots, f_r$ dans $A(X)$ tels que Y soit une composante irréductible de $V(f_1, \ldots, f_r)$.

b) En déduire que la dimension de Krull de l'anneau local $A(X)_{I(Y)}$ est r. En général, si Y est une sous-variété irréductible d'une variété irréductible X, la codimension de Y dans X est égale à la longueur maximale des chaînes de fermés irréductibles de X commençant par Y.

2) On dit qu'une variété irréductible X est *normale* en un point x si l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ (*cf.* exerc. 2.10.3)) est intégralement clos dans son corps de fractions $K(X)$.

a) Montrer que la courbe affine plane d'équation $y^2 = x^3$ n'est pas normale.

b) Soit X une variété affine irréductible ; montrer que X est normale si et seulement si $A(X)$ est intégralement clos dans son corps de fractions (*Indication :* on remarquera que tout localisé d'un anneau intégralement clos est intégralement clos, et qu'un anneau intègre est l'intersection dans son corps de fractions des localisés en ses idéaux maximaux).

3) Soient X et Y des variétés disjointes dans $\mathbf{P}^n$. Montrer que la dimension de $J(X,Y)$ (défini dans l'exercice 2.10.16)d)) est $\dim X + \dim Y + 1$; en déduire une autre démonstration du théorème 3.17.

4) Montrer que l'image d'une application régulière *non constante* $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ est de dimension n.

5) Soit $\mathscr{M}$ l'espace projectif de dimension $mn-1$ des matrices $m \times n$ et soit $\mathscr{M}_r$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ formé des matrices de rang $\leq r$. Montrer que $\mathscr{M}_r$ est une sous-variété irréductible de dimension $r(m+n-r)-1$ (*Indication :* on pourra introduire la variété d'incidence

$$I = \{(M, \Lambda) \in \mathscr{M} \times G(n-r, \mathbf{P}^n) \mid \Lambda \subset \operatorname{Ker} M\}.)$$

6) Soit $\mathbf{P}$ l'espace projectif de dimension $\binom{n+d}{d} - 1$ qui paramètre les hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^n$.

a) Montrer que la variété d'incidence

$$\{(X, \Lambda) \in \mathbf{P} \times G(r, \mathbf{P}^n) \mid \Lambda \subset X\}$$

est irréductible et déterminer sa dimension (on pourra admettre que c'est une sous-variété de $\mathbf{P} \times G(r, \mathbf{P}^n)$, ou essayer de le démontrer).

b) En déduire que si $\binom{d+r}{r} > (r+1)(n-r)$, une hypersurface générale de degré d dans $\mathbf{P}^n$ ne contient pas de sous-espace linéaire de dimension r. En particulier, une surface générale de degré ≥ 4 dans $\mathbf{P}^3$ ne contient pas de droite.

c) Montrer que la cubique d'équation $T_0^3 = T_1 T_2 T_3$ dans $\mathbf{P}^4$ ne contient que 3 droites. En déduire qu'une surface cubique générale dans $\mathbf{P}^3$ ne contient qu'un nombre fini de droites.

7) Soit X une sous-variété irréductible de $\mathbf{P}^n$ distincte de $\mathbf{P}^n$.

a) Montrer que
$$\{[L] \in G(1, \mathbf{P}^n) \mid L \cap X \neq \varnothing\}$$
est une sous-variété irréductible de la grassmannienne $G(1, \mathbf{P}^n)$ de dimension $\dim X + n - 1$.

b) Soit Δ la diagonale de $X \times X$. Montrer que l'application
$$(X \times X) \smallsetminus \Delta \longrightarrow G(1, \mathbf{P}^n)$$
qui à deux points distincts de X associe la droite qui les joint est régulière, et que l'adhérence de son image est irréductible de dimension $2 \dim X$, sauf si X est un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^n$.

c) En déduire que si $\dim X \leq n - 2$, une droite générale qui rencontre X ne coupe X qu'en un seul point, puis, en caractéristique 0, qu'il existe un morphisme birationnel de X sur une hypersurface de $\mathbf{P}^{\dim X+1}$.

8) On veut étendre le résultat de l'exercice précédent en caractéristique quelconque, et montrer que pour toute sous-variété irréductible X de $\mathbf{A}^n$, il existe une projection linéaire de $\mathbf{A}^n$ sur un sous-espace linéaire L qui induise un morphisme birationnel de X sur une hypersurface de L.

a) Si d est la dimension de X, il existe, parmi les n fonctions coordonnées, d d'entre elles qui sont algébriquement indépendantes dans $K(X)$. Supposons que ce soit $x_1, \ldots, x_d$. Soit F le polynôme minimal de x_{d+1} sur le sous-corps de $K(X)$ engendré par $x_1, \ldots, x_d$. Montrer que l'une des $d + 1$ dérivées partielles de F n'est pas nulle.

b) Si $\frac{\partial F}{\partial T_i} \neq 0$, montrer que $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{d+1}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$. On peut donc supposer $\frac{\partial F}{\partial T_{d+1}} \neq 0$; montrer que x_{d+1} est séparable sur le sous-corps $\mathbf{k}(x_1, \ldots, x_d)$ de $K(X)$.

c) Utiliser le théorème de l'élément primitif pour montrer qu'il existe une forme linéaire l dans $K(X)$ tel que $\mathbf{k}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, x_{d+2}) = \mathbf{k}(x_1, \ldots, x_d, l)$.

d) Montrer qu'il existe des formes linéaires $l_1, \ldots, l_{d+1}$ telles que $l_1, \ldots, l_d$ soient linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}$, et que
$$K(X) = K(l_1, \ldots, l_{d+1})$$
conclure.

9) Soit X une sous variété de $\mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_1}$ de codimension pure 1. Montrer qu'il existe un polynôme multihomogène $F(T_{1,0}, \ldots, T_{1,n_1}, T_{2,0}, \ldots, T_{2,n_2}, \ldots, T_{r,n_r})$ tel que $X = V(F)$ (*Indication :* procéder comme dans le corollaire 3.10).

10) **Coordonnées de Chow d'une variété projective.** L'ensemble des hyperplans de $\mathbf{P}^n$ est en bijection avec l'ensemble des hyperplans de $\mathbf{k}^{n+1}$, c'est-à-dire les droites de $(\mathbf{k}^{n+1})^*$; c'est donc un espace projectif de dimension n, que l'on note $\mathbf{P}^{n*}$. Soit X une sous-variété irréductible de $\mathbf{P}^n$ de dimension r. On pose
$$\Gamma = \{(x, H_1, \ldots, H_{r+1}) \in X \times (\mathbf{P}^{n*})^{r+1} \mid x \in H_1 \cap \cdots \cap H_{r+1}\}.$$

a) Montrer que Γ est irréductible de dimension $n(r + 1) - 1$.

b) Montrer qu'il existe des hyperplans $H_1, \ldots, H_{r+1}$ tels que $X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{r+1}$ consiste en un seul point. En déduire que la projection de Γ dans $(\mathbf{P}^{n*})^{r+1}$ est de même dimension que Γ.

c) Déduire de l'exercice précédent que l'on peut associer de façon injective à X un polynôme multihomogène irréductible F_X de multidegré $(d, \ldots, d)$ en $(r + 1)(n + 1)$ variables ; on dit que d est le *degré* de la variété X.

L'ensemble de ces polynômes forme un espace projectif ; on peut montrer que l'ensemble des polynômes de la forme F_X est une sous-variété quasi-projective de cet espace projectif ; on dit que les sous-variétés de $\mathbf{P}^n$ de dimension et degré fixés sont *paramétrées* par une variété quasi-projective.

d) Montrer que le degré de X est le nombre maximum de points d'intersection de X avec un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^n$ de dimension $n - r$.

11) Soient X et Y des variétés et soit $u \colon X \to Y$ une application régulière.

a) On suppose que toutes les fibres non vides de u sont de dimension $\leq r$; montrer l'inégalité $\dim X \leq \dim Y + r$.

b) On suppose que u est dominante et que toutes les fibres non vides de u sont de dimension r ; montrer l'égalité $\dim X = \dim Y + r$.

CHAPITRE 4

Points et applications régulières lisses

4.1. Espace tangent de Zariski

Commençons par un peu de géométrie différentielle. Soit C une courbe de $\mathbf{R}^2$ définie par une équation $F(x,y)=0$. Comment définit-on sa tangente ? Supposons $\frac{\partial F}{\partial y}(p,q)\neq 0$; on peut alors paramétrer C localement par une fonction g qui vérifie $g(p)=q$ et $F(t,g(t))=0$ pour tout t. La tangente est la droite affine d'équation $y-q=g'(p)(x-p)$, soit encore $(x-p)\ \frac{\partial F}{\partial x}(p,q)+(y-q)\ \frac{\partial F}{\partial y}(p,q)=0$. Cette équation définit toujours une droite sauf si les deux dérivées partielles de F en (p,q) sont nulles.

Pour une hypersurface V dans $\mathbf{R}^n$ d'équation $F(x_1,\dots,x_n)=0$, on définit l'espace tangent affine en $p=(p_0,\dots,p_n)$ par l'équation

$$(x_1-p_1)\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(p)+\cdots+(x_n-p_n)\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)=0.$$

C'est un hyperplan sauf si toutes les dérivées partielles de F en p sont nulles.

4.1. Cela nous amène à poser la définition suivante : si X est une sous-variété de $\mathbf{A}^n$, on définit de façon provisoire l'*espace tangent de Zariski* à X en un point p comme l'espace vectoriel défini par les équations

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\ x_i=0.$$

pour tout F dans $I(X)$. Il est noté T_pX ; on vérifie que l'on obtient le même espace en ne prenant pour F que des générateurs de $I(X)$. L'espace affine correspondant passant par p est défini par

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\ (x_i-p_i)=0\ .$$

La géométrie différentielle nous donne aussi une autre approche. Supposons toujours X affine ; l'idée est de voir les vecteurs tangents en un point p de X comme des *dérivations* en p, c'est-à-dire des formes $\mathbf{k}$-linéaires $D\colon A(X)\to\mathbf{k}$ qui vérifient, pour toutes fonctions régulières f et g,

$$D(fg)=f(p)D(g)+g(p)D(f).$$

Lorsque $X=\mathbf{A}^n$, toute dérivation en p est du type

$$f\longmapsto a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)+\cdots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\ ,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbf{k}$. Les dérivations de X sont celles qui annulent les éléments de $I(X)$, c'est-à-dire celles qui vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$$

pour tout F dans $I(X)$. Elles forment donc un espace vectoriel isomorphe à l'espace tangent T_pX défini plus haut. On peut continuer dans cette voie pour donner une définition intrinsèque : si $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $A(X)$ des fonctions régulières nulles en x, *l'espace vectoriel T_xX est isomorphe au dual du* $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. En effet, soit $D\colon A(X) \to \mathbf{k}$ une dérivation en x ; elle s'annule sur $\mathfrak{m}_x^2$, et sa restriction à $\mathfrak{m}_x$ induit une forme linéaire sur $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Inversement, si θ est une telle forme, on obtient une dérivation en x en posant $D(f) = \theta(\overline{f - f(x)})$.

Soit $\mathscr{O}_{X,x}$ l'anneau local des germes de fonctions régulières en x défini dans l'exercice 2.10.3) et soit $\mathfrak{m}_{X,x}$ son idéal maximal. Le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est isomorphe à $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$. On peut maintenant donner la définition générale.

DÉFINITION 4.2. *Soit X une variété, soit x un point de X et soit $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. L'espace tangent de Zariski à X en x, noté T_xX, est le dual du* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$.*

On montre que l'on a un isomorphisme

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_xX \oplus T_yY \ . \tag{2}$$

4.2. Points lisses et points singuliers

Notre but est maintenant de comparer la dimension de l'espace tangent à celle de la variété.

PROPOSITION 4.3. *Soit X une variété ; la fonction $x \mapsto \dim T_xX$ est semi-continue supérieurement : pour tout entier r, l'ensemble*

$$X_r = \{x \in X \mid \dim T_xX \geq r\}$$

est fermé dans X.

DÉMONSTRATION. On peut raisonner localement, donc supposer X affine contenue dans $\mathbf{A}^n$. Si on choisit des générateurs $F_1, \ldots, F_s$ de $I(X)$, la dimension de T_xX est n moins le rang d'une certaine matrice dont les composantes sont des fonctions polynomiales en x. L'ensemble X_r est défini par l'annulation des $n - r + 1$ mineurs de cette matrice ; il est donc fermé. $\square$

PROPOSITION 4.4. *Soit X une variété irréductible. Pour tout point x de X, on a $\dim T_xX \geq \dim X$, et il y a égalité sur un ouvert dense de X.*

DÉMONSTRATION. Notons n la dimension de X et traitons d'abord le cas où X est une hypersurface irréductible de l'espace affine $\mathbf{A}^{n+1}$ dont l'idéal est engendré par un poylôme irréductible F. L'espace tangent en un point est défini par une équation ; il est donc de dimension n ou $n+1$. S'il est de dimension $n+1$ partout, toutes les dérivées partielles de F s'annulent sur X, donc sont divisibles par F, puisque $I(X)$ est engendré par F. Elles sont donc nulles ; comme F n'est pas constant, cela signifie que la caractéristique p de $\mathbf{k}$ n'est pas nulle et que les seules puissances des T_i qui apparaissent dans F sont des multiples de p. Comme $\mathbf{k} = \mathbf{k}^p$, il existe un polynôme G tel que $F = G^p$, ce qui contredit le fait que F est irréductible. Il existe donc un point en lequel l'espace tangent est de dimension n ; c'est encore vrai dans un ouvert dense de X par la proposition 4.3.

Traitons maintenant le cas général. Par l'exercice 3.9.8) (on remarquera que la démonstration est beaucoup plus simple en caractéristique 0 ; *cf.* aussi exerc. 3.9.7)), il existe un isomorphisme entre un ouvert dense de X et un ouvert U d'une hypersurface d'un espace affine. Par le cas déjà traité, la dimension de l'espace tangent à U, donc aussi à X, est n sur un ouvert dense V de X. Avec les notations de la proposition 4.3, le fermé X_n contient V, donc est égal à X. □

La proposition 4.4 entraîne que pour tout point x d'une variété X, on a $\dim T_x X \geq \dim_x X$; on dit que x est un point *lisse* sur X (ou que X est lisse en x) s'il y a égalité, un point *singulier* dans le cas contraire. Les propositions 4.3 et 4.4 entraînent que lorsque X est irréductible, l'ensemble des points singuliers de X est un fermé propre de X, appelé *lieu singulier* de X et noté $\operatorname{Sing} X$; l'ouvert complémentaire est noté X_{lisse}. Lorsque X est réductible, on peut montrer que tout point situé sur au moins deux composantes est singulier (*cf.* 4.6), de sorte que le lieu singulier est encore un fermé propre de X (c'est la réunion des intersections deux à deux des composantes de X et des lieux singuliers des composantes). Cela entraîne en particulier que toute variété lisse connexe est irréductible.

Exemples 4.5. 1) Par la formule (2), pour que le produit $X \times Y$ soit lisse en un point (x, y), il faut et il suffit que X soit lisse en x et que Y soit lisse en y. En d'autre termes, on a

$$\operatorname{Sing}(X \times Y) = \big((\operatorname{Sing} X) \times Y\big) \cup \big(X \times (\operatorname{Sing} Y)\big) .$$

2) Les points singuliers d'une hypersurface dans $\mathbf{A}^n$ d'idéal engendré par un polynôme F sont définis par les équations

$$F(x) = \frac{\partial F}{\partial T_1}(x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial T_n}(x) = 0.$$

On voit bien dans ce cas que si $F = F_1 \cdots F_s$, les points situés à l'intersection de $V(F_i)$ et $V(F_j)$ sont singuliers.

Les points singuliers de la courbe d'équation $y^2 = x^3$ dans $\mathbf{A}^2$ sont définis par $y^2 - x^3 = 2y = 3x^2 = 0$; il n'y en a qu'un, l'origine.

3) Si X est une sous-variété irréductible de $\mathbf{A}^n$ et que $I(X)$ est engendré par $F_1, \dots, F_r$, un point x de X est lisse si et seulement si le rang de la matrice $\Big(\dfrac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\Big)$ est $n - \dim X$. Si on a seulement $X = V(F_1, \dots, F_r)$ mais que le rang de la matrice jacobienne associée en x est $n - \dim X$, alors X est lisse en x (attention : la réciproque n'est pas vraie).

4) Les points singuliers d'une hypersurface X dans $\mathbf{P}^n$ d'idéal engendré par un polynôme homogène F de degré d sont définis par les équations

$$F(x) = \frac{\partial F}{\partial T_0}(x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial T_n}(x) = 0.$$

En effet, si $x = (1, x_1, \dots, x_n)$ est dans X, on a $I(X \cap U_0) = (F_\flat)$ (exerc. 2.10.10)). Le point x est singulier sur X si et seulement s'il l'est sur $X \cap U_0$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{\partial F_\flat}{\partial T_i}(x) = \frac{\partial F}{\partial T_i}(x) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Comme $F(x) = 0$, c'est aussi équivalent à cause de la formule d'Euler

$$dF = \sum_{i=0}^{n} T_i \, \frac{\partial F}{\partial T_i}(x)$$

aux équations ci-dessus. Il faut remarquer que si la caractéristique de $\mathbf{k}$ ne divise pas d, la formule d'Euler entraîne que les points singuliers sont définis pas les $n+1$ équations

$$\frac{\partial F}{\partial T_0}(x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial T_n}(x) = 0.$$

5) Si X est une sous-variété irréductible de $\mathbf{P}^n$ et que $I(X)$ est engendré par des polynômes homogènes $F_1, \ldots, F_r$, un point x de X est lisse si et seulement si le rang de la matrice $\Big(\dfrac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\Big)$ vaut $n - \dim X$.

6) Calculons l'espace tangent à la variété $\mathscr{M}_r$ définie dans l'exercice 3.9.4) comme l'ensemble (projectif) des matrices $m \times n$ de rang au plus r. Soit M une matrice de rang exactement r ; elle est équivalente à la matrice $D_r = (a_{ij})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ qui valent 1. Dans le voisinage affine de D_r défini par $a_{11} \neq 0$, on peut prendre $a_{11} = 1$; les $r+1$ mineurs contenant les r premières lignes et colonnes ont comme terme linéaire a_{ij}, avec $r < i \leq m$ et $r < j \leq n$. L'espace tangent à $\mathscr{M}_r$ en M est donc de dimension $\leq mn-1-(m-r)(n-r)$; comme c'est la dimension de $\mathscr{M}_r$, on en déduit que $\mathscr{M}_r \smallsetminus \mathscr{M}_{r-1}$ est lisse ; on a aussi une identification

$$T_M \mathscr{M}_r \simeq \{u \in \mathscr{L}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^m) \mid u(\operatorname{Ker} M) \subset \operatorname{Im} M\}.$$

Si M est de rang $< r$, aucun des $r+1$ mineurs de M n'a de terme linéaire. On ne peut cependant rien en déduire ; en revanche, si l'on sait que ces mineurs engendrent l'idéal de $\mathscr{M}_r$ (ce qui est vrai, mais difficile à démontrer), cela montre que l'espace tangent de Zariski à $\mathscr{M}_r$ en M est tout $T_M \mathscr{M}$ (il y a aussi des moyens directs plus simples pour démontrer ce résultat).

7) Soit G un groupe algébrique et soit X un espace homogène algébrique sous G (*cf.* ex. 3.21). Alors X est lisse : en effet, X a un point lisse x_0 par la proposition 4.4, donc tout point de X est lisse puisqu'il a un voisinage isomorphe (par translation) à un voisinage de x_0. Cela s'applique en particulier aux grassmanniennes $G(r, \mathbf{P}^n)$, qui sont homogènes sous le groupe algébrique $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{k})$, et aux variétés $\mathscr{M}_r \smallsetminus \mathscr{M}_{r-1}$ de l'exemple précédent, qui sont homogènes sous le groupe algébrique $\mathrm{PGL}(m+1, \mathbf{k}) \times \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{k})$.

8) Reprenons l'exemple 2.33.1) de la cubique C d'équation $X_1^2 X_2 = X_0^2(X_2 - X_0)$ dans $\mathbf{P}^2$. Les dérivées partielles ne s'annulent qu'en $O = (0,0,1)$: c'est le seul point singulier de C. L'éclaté $\widetilde{C}$ de C en O est défini par les équations $x_1 = x_0 y_1$ et $x_2 y_1^2 = x_2 - x_0$, dans $\mathbf{P}^2 \times U_0$ (avec $y_0 = 1$), et par les équations $x_0 = x_1 y_0$ et $x_2 = y_0^2(x_2 - x_1 y_0)$ dans $\mathbf{P}^2 \times U_1$ (avec $y_1 = 1$). On vérifie que ces courbes sont lisses, de sorte que $\widetilde{C}$ est lisse. On dit que l'application régulière $\widetilde{C} \to C$ est une désingularisation de C.

4.6. Anneaux réguliers. Soit A un anneau local noethérien, soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et soit $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel. Lorsque A est l'anneau local d'une variété algébrique en un point, on a vu $\dim_{\mathbf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$. Cette inégalité reste vraie en général, et on dit que A est *régulier* s'il y a égalité. Le lemme de Nakayama entraîne que $\dim_{\mathbf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est le nombre minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$; pour qu'un anneau local noethérien soit régulier, il faut et il suffit que son idéal maximal puisse être engendré par $\dim A$ éléments.

En particulier, pour qu'un anneau local noethérien A de dimension 1 soit régulier, il faut et il suffit que son idéal maximal soit principal ; cela entraîne que A est local et principal : c'est un anneau de valuation discrète.

4.7. On montre (mais c'est difficile) qu'un anneau local régulier est factoriel, donc intègre ; cela prouve qu'un point situé sur deux composantes irréductibles d'une variété algébrique est singulier.

4.8. Le fait que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ d'une variété algébrique X en un point lisse x est intègre est démontré de façon élémentaire dans [**M**] : Mumford montre que si $F_1, \dots, F_r$ sont des polynômes de $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_n]$ sans terme constant dont les termes linéaires sont indépendants, alors $V(F_1, \dots, F_r)$ est de dimension $n - r$ et a une seule composante qui passe par 0 ([**M**], th. 1.16, p. 7).

Il montre d'ailleurs aussi la factorialité de $\mathscr{O}_{X,x}$, en procédant la façon suivante :

• on montre d'abord que le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} = \varinjlim_l \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^l_{X,x}$ est isomorphe à un anneau de séries formelles $\mathbf{k}[[T_1, \dots, T_n]]$, avec $n = \dim_x X$ (prop. 1.27, p. 15) ;

• on utilise ensuite le fait que les anneaux de séries formelles en un nombre fini d'indéterminées sur un corps sont factoriels pour montrer que $\mathscr{O}_{X,x}$ est factoriel (th. 1.28, p. 15).

La factorialité des anneaux locaux d'une variété lisse permet de montrer qu'une hypersurface d'une variété lisse est définie *localement* par une équation.

Proposition 4.9. *Soit X une variété irréductible, soit Y une sous-variété de X de codimension pure 1 et soit y un point de Y lisse sur X. Il existe un voisinage affine U de y dans X et une fonction régulière $f\colon U \to \mathbf{k}$ tels que $I(U \cap Y) = (f)$.*

Démonstration. On peut supposer X affine et Y irréductible d'idéal $\mathfrak{p}$ premier dans $A(X)$. Notons que $A(X)$ est un sous-anneau de $\mathscr{O}_{X,y}$. L'idéal

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\mathscr{O}_{X,y} = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in A(X), g(y) \neq 0, f \in \mathfrak{p}\}$$

est premier non nul dans l'anneau factoriel $\mathscr{O}_{X,y}$; il contient donc un élément irréductible f/g. L'élément f de $\mathfrak{p}$ est encore irréductible dans $\mathscr{O}_{X,y}$, et $Y \subset V(f)$. Le problème est que f peut très bien ne plus être irréductible dans $A(X)$.

Soient $f_1, \dots, f_r$ des générateurs de l'idéal $A(X) \cap f\mathscr{O}_{X,y}$ de $A(X)$. Il existe $g_1, \dots, g_r$, $h_1, \dots, h_r$ dans $A(X)$, avec $g_i(y) \neq 0$, tels que $f_i = f\frac{h_i}{g_i}$. Posons $g = g_1 \cdots g_r$; l'idéal premier $A(X)_g \cap f\mathscr{O}_{X,y}$ de $A(X)_g$ est alors engendré par f, qui est donc irréductible dans $A(X)_g$. On a vu (exerc. 2.10.2)) que l'ouvert $U = X \smallsetminus V(g)$ est affine d'algèbre $A(X)_g$. La variété $U \cap V(f)$ est donc irréductible et contient $U \cap Y$, qui est de même dimension ; ils sont donc égaux, et $I(U \cap Y)$ est engendré par f. □

4.3. Le théorème principal de Zariski

C'est un résultat très important, dont nous ne démontrerons qu'un cas simple. Il nous servira surtout de prétexte pour montrer comment l'algèbre commutative intervient dans des énoncés de nature purement géométrique.

THÉORÈME 4.10. *Soient X et Y des variétés irréductibles, soit $u\colon X \to Y$ un morphisme birationnel et soit y un point de $u(X)$ en lequel Y est lisse.*

• *Soit il existe un voisinage ouvert V de y tel que u induise un isomorphisme de $u^{-1}(V)$ sur V ;*

• *soit $u^{-1}(y)$ est partout de dimension strictement positive.*

Dans la version forte du théorème de Zariski, on suppose simplement que Y est *normale* en y (*cf.* exerc. 3.9.2)) ; c'est alors beaucoup plus difficile à démontrer.

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer Y par un voisinage affine de y, on peut supposer Y sous-variété affine de $\mathbf{A}^n$.

Supposons dans un premier temps aussi X sous-variété affine de $\mathbf{A}^m$ et notons $x_1, \dots, x_m$ les fonctions coordonnées sur X (elles engendrent la $\mathbf{k}$-algèbre $A(X)$). L'application régulière $u\colon X \to Y$ induit des morphismes de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & \overset{u^*}{\hookrightarrow} & A(X) \\ \cap & & \cap \\ \mathscr{O}_{Y,y} & \overset{u^*}{\hookrightarrow} & \mathscr{O}_{X,x} \end{array}$$

qui induisent un isomorphisme $K(Y) \simeq K(X)$ sur les corps de fractions. Il existe donc des éléments a_i et b_i de $\mathscr{O}_{Y,y}$ tels que

$$x_i = u^*(\frac{a_i}{b_i}) = \frac{a_i \circ u}{b_i \circ u}.$$

Comme Y est lisse en y, l'anneau $\mathscr{O}_{Y,y}$ est factoriel (*cf.* 4.7), et on peut supposer a_i et b_i premiers entre eux dans cet anneau.

Si les b_i sont tous inversibles dans $\mathscr{O}_{Y,y}$ (c'est-à-dire si $b_i(y) \neq 0$ pour tout i), on peut les supposer égaux à 1. On écrit $a_i = f_i/g_i$, avec $f_i, g_i \in A(Y)$ et $g_i(y) \neq 0$, de sorte que

$$x_i = u^*(\frac{f_i}{g_i}) = \frac{f_i \circ u}{g_i \circ u}.$$

Cela signifie que le morphisme induit $u^*\colon A(Y)_{g_1 \cdots g_m} \to A(X)_{(g_1 \circ u) \cdots (g_m \circ u)}$ est surjectif ; comme il est injectif, c'est un isomorphisme. Posons $V = Y \smallsetminus V(g_1 \cdots g_m)$; cela signifie que u induit un isomorphisme entre $u^{-1}(V)$ et V : on est dans la première alternative du théorème.

Supposons maintenant $b_1(y) = 0$; écrivons a_1 et un facteur irréductible c_1 de b_1 comme quotients d'applications régulières $a_1 = a'_1/a''_1$ et $c_1 = c'_1/c''_1$, avec $a''_1(y)c''_1(y) \neq 0$. Quitte à remplacer Y par $Y \smallsetminus V(a''_1 c''_1)$ et X par $X \smallsetminus V((a''_1 c''_1) \circ u)$, on peut supposer $a''_1 = c''_1 = 1$, c'est-à-dire a_1 et c_1 régulières.

Soit x un point de $u^{-1}(y)$ et soit E une composante irréductible de $V(c_1 \circ u)$ passant par x, de sorte que c_1 s'annule sur $\overline{u(E)}$. Par le théorème 3.8, E est de codimension 1 dans X. Posons $b_1 = c_1 d_1$; on a $a_1 \circ u = x_1 \ (c_1 \circ u) \ (d_1 \circ u)$, de sorte que a_1 s'annule aussi sur $\overline{u(E)}$. Mais l'idéal $c_1 \mathscr{O}_{Y,y}$ est premier dans $\mathscr{O}_{Y,y}$, donc aussi $\mathfrak{p} = A(Y) \cap c_1 \mathscr{O}_{Y,y}$ dans $A(Y)$. Comme a_1 et c_1 sont premiers entre eux dans $\mathscr{O}_{Y,y}$, on a $a_1 \notin \mathfrak{p}$, d'où

$$\overline{u(E)} \subsetneq V(\mathfrak{p}) \subset V(c_1) \subsetneq Y \ ,$$

de sorte que $\overline{u(E)}$ est de codimension ≥ 2 dans Y, donc de dimension $< \dim E$. Le corollaire 3.20 entraîne que les fibres de $E \to Y$ sont partout de dimension strictement positive, donc en particulier aussi la fibre de u en x. On est donc dans la seconde alternative du théorème.

Supposons maintenant X toujours contenu dans $\mathbf{A}^m$, mais pas nécessairement fermé. L'application régulière u se prolonge à une application régulière birationnelle $\bar{u}\colon \bar{X} \to Y$ à laquelle on peut appliquer ce qui précède. Si l'on est dans la première alternative du théorème pour $\bar{u}$, le point y étant dans $u(X)$ n'est pas dans $u(\bar{X} \smallsetminus X)$ et l'on est aussi dans la première alternative du théorème pour u. Si l'on est dans la seconde alternative du théorème pour $\bar{u}$, la fibre $u^-1(y)$ étant ouverte dans $\bar{u}^-1(y)$ est aussi partout de dimension strictement positive.

Traitons maintenant le cas général. On suppose X contenu dans $\mathbf{P}^m$; soit H un hyperplan de $\mathbf{P}^m$ ne contenant aucune composante irréductible de $u^{-1}(y)$ et soit U son complémentaire. On peut appliquer ce qui précède à la restriction v de u à $X \cap U$. Par construction, $v^{-1}(y)$ est ouvert dense dans $u^{-1}(y)$. Si l'on est dans la seconde alternative du théorème pour v, il en est donc de même pour u. Si l'on est dans la première alternative du théorème pour v, la fibre $u^{-1}(y)$ n'a qu'un seul point qui n'est pas sur H, de sorte que H ne rencontre pas non plus les fibres voisines de u. Il s'ensuit que u et v coïncident au-dessus d'un voisinage de y. Ceci termine la démonstration du théorème. □

La seconde alternative du théorème peut bien sûr se produire, comme par exemple dans l'éclatement $\varepsilon\colon \widetilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^n$ construit dans le § 2.8 (pour $n \geq 1$!).

Corollaire 4.11. *Soit X une courbe irréductible, soit Y une courbe* lisse *et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière birationnelle ; $u(X)$ est ouvert et u induit un isomorphisme de X sur $u(X)$. En particulier, X est lisse.*

La conclusion du corollaire est évidemment fausse si Y n'est pas lisse : si C est la courbe plane d'équation homogène $Y^2Z = X^3$, l'application régulière $u\colon \mathbf{P}^1 \to C$ définie par $u(\lambda, \mu) = (\lambda^2\mu, \lambda^3, \mu^3)$ est surjective, mais ce n'est pas un isomorphisme.

Corollaire 4.12. *Soit X une variété irréductible* lisse *; toute application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ est définie sur un ouvert de X dont le complémentaire est de codimension ≥ 2.*

Démonstration. Soit $u\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une application rationnelle, régulière sur un ouvert dense U de X ; notons Γ l'adhérence (irréductible) dans $X \times \mathbf{P}^n$ du graphe de $u\colon U \to \mathbf{P}^n$ et $p\colon \Gamma \to X$ la première projection. Posons enfin

$$V = \{x \in X \mid p \text{ est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de } x\}.$$

C'est un ouvert de X sur lequel u est régulière (c'est en fait le plus grand tel ouvert), puisque p induit un isomorphisme de $p^{-1}(V)$ sur V. Si $Z = X \smallsetminus V$, le théorème de Zariski dit que les fibres de $p\colon p^{-1}(Z) \to Z$ sont partout de dimension > 0. Si Z' est une composante irréductible de Z de dimension maximale et Γ' une composante irréductible de $p^{-1}(Z)$ qui domine Z', les fibres de l'application $\Gamma' \to Z'$ sont partout de dimension > 0. Le corollaire 3.20 entraîne les inégalités

$$\dim Z = \dim Z' < \dim \Gamma' < \dim \Gamma = \dim X.$$

La codimension de Z dans X est donc au moins 2, ce qui prouve le corollaire. □

Corollaire 4.13. *Soit X une courbe irréductible* lisse *; toute application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ est définie sur tout X.*

Mentionnons pour finir sans démonstration un autre théorème de Zariski. Noter qu'il s'applique à la situation du théorème précédent (où les fibres générales de u sont des singletons).

Théorème 4.14. *Soit X une variété irréductible projective et soit $u\colon X\to Y$ une application régulière dominante dont les fibres générales sont connexes ; si Y est lisse en y, la fibre $u^{-1}(y)$ est connexe.*

En fait, cette version ne nécessite aussi que la normalité de Y en y. Il faut quand même une hypothèse sur Y : si C est la courbe projective plane d'équation $XYZ = X^3+Y^3$, l'application régulière $u\colon \mathbf{P}^1 \to C$ définie par $u(\lambda,\mu) = (\lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \lambda^3+\mu^3)$ est surjective, et la fibre de $(0,0,1)$ consiste en les points $(0,1)$ et $(1,0)$, tandis que toutes les autres fibres sont connexes.

4.4. Application tangente, applications régulières lisses

Soit $u\colon X\to Y$ une application régulière et soit x un point de X ; posons $y=u(x)$. Vue la définition de l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ en termes de germes de fonctions, u induit un homomorphisme local d'anneaux locaux

$$u^*\colon \mathscr{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}$$

donc aussi une application $\mathbf{k}$-linéaire

$$T_xu\colon T_xX \longrightarrow T_yY\ ,$$

qui s'appelle l'*application tangente*, ou la *différentielle*, de u en x.

Si $v\colon Y\to Z$ est une application régulière, on a

$$T_x(v\circ u) = T_yv\circ T_xu.$$

Si l'on désigne comme d'habitude par X_x la fibre $u^{-1}(u(x))$ de u passant par x, la composée $X_x\subset X\to Y$ est constante, ce qui entraîne

$$T_x(X_x)\subset \operatorname{Ker}(T_xu\colon T_xX \longrightarrow T_yY).$$

On n'a en général pas égalité, comme le montre l'exemple 4.16 ci-dessous. Cela provient du fait que l'on n'a pas défini correctement la structure que l'on met sur les fibres d'une application (il faudrait ici parler de schémas).

On a l'analogue de la proposition 4.3, qui la généralise.

Proposition 4.15. *Soient X et Y des variétés et soit $u\colon X\to Y$ une application régulière. La fonction $x\mapsto \dim\operatorname{Ker} T_xu$ est semi-continue supérieurement : pour tout entier r, l'ensemble*

$$\{x\in X \mid \dim\operatorname{Ker} T_xu \geq r\}$$

est fermé dans X.

Démonstration. On se ramène au cas où X est une sous-variété de $\mathbf{A}^n$ définie par des poynômes $F_1,\dots,F_s$, et où $u\colon \mathbf{A}^n\to\mathbf{A}^m$ est donnée par $u=(u_1,\dots,u_m)$. L'ensemble en question est alors défini par

$$\dim\Big(\operatorname{Ker}\big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\big)\cap \operatorname{Ker}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\big)\Big)\geq r\ ,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\big)\\ \big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\big)\end{pmatrix}\leq n-r$$

il est donc fermé. □

En revanche, la fonction $x \mapsto \dim T_x(X_x)$ n'est pas en général semi-continue (de nouveau, c'est parce que l'on n'a pas défini correctement la fibre ; avec les schémas, tout se passe bien).

Exemple 4.16. Considérons l'application régulière $u\colon \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^2$ donnée par $u(x,y,z) = (z, x^2z + y^2)$ et supposons la caractéristique de $\mathbf{k}$ distincte de 2. La matrice de $T_{(x,y,z)}u$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2xz & 2y & x^2 \end{pmatrix}$; elle est donc surjective, sauf si $xz = y = 0$, auquel cas elle est de rang 1. La fibre de (z,t) est isomorphe à $V(x^2z + y^2 - t)$ dans $\mathbf{A}^3$; elle est singulière si $t = 0$ (c'est la réunion de deux droites concourantes), mais pas pour $t = z = 0$ (c'est une seule droite, mais moralement, elle est « double »).

Définition 4.17. *Soient X et Y des variétés* lisses *irréductibles. On dit qu'une application régulière $u\colon X \to Y$ est lisse en x si T_xu est surjective ; on dit que u est lisse si elle est lisse en tout point de X.*

La proposition 4.15 entraîne que le lieu des points où u n'est pas lisse est fermé dans X. Il est clair que la composée de deux applications régulières lisses est lisse.

Proposition 4.18. *Soient X et Y des variétés lisses irréductibles et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière lisse.*

a) Toutes les fibres non vides de u sont de dimension pure $\dim X - \dim Y$ *et u est dominant.*

b) Si $Z \subset Y$ est lisse, $u^{-1}(Z)$ est lisse.

Démonstration. Si $x \in X$, on a $\dim T_xX_x \leq \dim \operatorname{Ker} T_xu = \dim X - \dim Y$ et (th. 3.18) $\dim_x X_x \geq \dim X - \dim \overline{u(X)}$. Cela prouve a).

On peut supposer Z irréductible de codimension r dans Y. Soit z un point de $u^{-1}(Z)$; comme $T_zu\bigl(T_z(u^{-1}(Z))\bigr)$ est contenu dans $T_{u(z)}Z$ et que Z est lisse en $u(z)$, on a

$$\dim T_z(u^{-1}(Z)) \leq \dim Z + \dim \operatorname{Ker} T_zu = \dim X - r \ . \tag{3}$$

Par 4.8, il existe des fonctions régulières $f_1, \ldots, f_r$ définie sur un voisinage affine irréductible V de $u(z)$ dans Y telles que $Z \cap V$ soit l'unique composante irréductible de $V(f_1, \ldots, f_r)$ passant par $u(z)$; on peut même supposer, quitte à rétrécir V, que $Z \cap V = V(f_1, \ldots, f_r)$. Cela entraîne que $u^{-1}(V) \cap u^{-1}(Z) = V(f_1 \circ u, \ldots, f_r \circ u)$, donc (th. 3.8) que $u^{-1}(Z)$ est de dimension $\geq \dim X - r$ en z. On conclut en comparant avec (3). □

On va maintenant montrer le résultat principal de ce numéro : le théorème de lissité générique. C'est l'analogue algébrique du théorème de Sard, qui dit que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction réelle $\mathscr{C}^\infty$ est de mesure nulle.

Lemme 4.19. *On suppose* $\mathbf{k}$ *de caractéristique nulle. Soient X et Y des variétés irréductibles et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière dominante. Il existe un ouvert lisse non vide V de Y et un ouvert lisse non vide U de $u^{-1}(V)$ tels que l'application $U \to V$ induit par u soit lisse.*

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 3.12, il suffit de traiter le cas où X est une sous-variété de $\mathbf{A}^n$, et où u est la restriction à X d'une projection $\pi\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n-1}$ que l'on écrit $\pi(y, x_n) = y$. On reprend les notations de *loc.cit.* : si x_n est transcendant sur $K(Y)$, on a $X = Y \times \mathbf{A}^1$ et on prend $V = Y_{\text{lisse}}$; sinon, on note

$$G(T) = a_d(y)T^d + \cdots + a_0(y)$$

un polynôme de $A(Y)[T]$ de degré minimal > 0 qui annule x_n dans $A(X)$. On a $a_d \neq 0$; remplaçant X par l'ouvert X_{a_d}, affine dans $\mathbf{A}^{n+1}$, et Y par l'ouvert Y_{a_d}, affine dans $\mathbf{A}^n$, on peut supposer $a_d = 1$. Si $F \in I(X)$, on fait la division euclidienne $F = GQ + R$; elle entraîne $I(X) = (I(Y), G)$. En un point $x = (y, x_n)$ au-dessus d'un point lisse y de Y, on voit que X et $T_x u$ sont lisses si $\frac{\partial G}{\partial x_n}(y, x_n)$ n'est pas nul. En caractéristique 0, c'est le cas. □

La démonstration montre que le résultat subsiste si l'extension de corps $K(Y) \subset K(X)$ est séparable. En revanche, il est faux en général : si $\mathbf{k}$ est de caractéristique $p > 0$, l'application tangente à l'application de Frobenius $u \colon \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ défini par $u(t) = t^p$ est partout nulle.

Théorème 4.20. *On suppose* $\mathbf{k}$ *de caractéristique nulle. Soient* X *et* Y *des variétés irréductibles et soit* $u \colon X \to Y$ *une application régulière dominante. Il existe un ouvert* lisse *non vide* V *de* Y *tel que l'application régulière* $u^{-1}(V) \cap X_{\text{lisse}} \to V$ *induite par* u *soit lisse.*

Démonstration. On peut supposer X et Y lisses par la proposition 4.4 ; soit d la dimension de Y. Posons $Z = \{x \in X \mid \operatorname{rang} T_x u < d\}$; soit Y' une composante de $\overline{u(Z)}$, soit X' une composante de Z qui domine Y', et soit $u' \colon X' \to Y'$ l'application induite par u. Par le lemme 4.19, il existe un point lisse x de X tel que $y = u(x)$ soit lisse sur Y' et que $T_x u' \colon T_x X' \to T_y Y'$ soit surjective. Cette application étant obtenue à partir de $T_x u$ par restriction, on en déduit $\dim T_y Y' < d$. Comme Y' est lisse en y, il est de dimension $< d$. Cela montre que $\overline{u(Z)}$ est de dimension $< d$, donc distinct de Y. On prend pour V son complémentaire. □

4.5. Théorèmes de Bertini

Soit X une sous-variété de $\mathbf{P}^n$; on appelle section hyperplane de X l'intersection de X avec un hyperplan de $\mathbf{P}^n$. Rappelons que ceux-ci sont paramétrés par un espace projectif de dimension n, dit dual de $\mathbf{P}^n$, et noté $\mathbf{P}^{n*}$. L'appelation « théorèmes de Bertini » regroupe toute une catégorie de résultats qui disent que si X a une certaine propriété (lissité, irréductibilité, connexité,...), alors une section hyperplane (générale ou quelconque, selon les cas) de X a la même propriété.

Théorème 4.21. *On suppose* $\mathbf{k}$ *de caractéristique nulle. Soit* X *une variété lisse, soit* $u \colon X \to \mathbf{P}^n$ *une application régulière et soit* H *un hyperplan général de* $\mathbf{P}^n$*. Alors* $u^{-1}(H)$ *est lisse.*

Démonstration. On peut supposer X irréductible de dimension ≥ 1. Considérons la correspondance d'incidence

$$I = \{(p, H) \in X \times \mathbf{P}^{n*} \mid u(p) \in H\}$$

Si (p, H) est dans I, on peut prendre des coordonnées sur $\mathbf{P}^n$ de façon que $u(p) = (0, \ldots, 0, 1)$, et que H soit défini par $X_0 = 0$. Il existe des fonctions régulières $f_0, \ldots, f_{n-1}$ définies sur un voisinage U de p dans X telles que

$$u(x) = (f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x), 1)$$

pour tout x dans U ; tout hyperplan dans un voisinage de H dans $\mathbf{P}^{n*}$ a pour équation $x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. La variété I est définie au voisinage de (p, H) par l'équation

$$f_0(x) + a_1f_1(x) + \cdots + a_{n-1}f_{n-1}(x) + a_n = 0$$

dans $U \times \mathbf{A}^n$, dont la dérivée partielle par rapport à a_n n'est pas nulle. On en déduit sans mal que I est lisse. Les fibres de la projection $I \to X$ étant toutes des espaces projectifs de dimension $n-1$, on déduit de la proposition 3.23 que I est irréductible. La fibre de H sous la seconde projection $q\colon I \to \mathbf{P}^{n*}$ est isomorphe à $u^{-1}(H)$; soit la fibre générale est vide, soit q est dominante et le théorème 4.20 donne le résultat. □

Comme d'habitude, ce résultat est faux en caractéristique p non nulle (considérer par exemple l'application régulière $u\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ définie par $u(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^p, \ldots, x_n^p)$). On a en revanche le résultat suivant, valable en toute caractéristique.

Théorème 4.22. *Soit X une variété lisse contenue dans $\mathbf{P}^n$; si H est un hyperplan général de $\mathbf{P}^n$, alors $X \cap H$ est lisse.*

Démonstration. Soit x un point de X ; on suppose sa première coordonnée non nulle. Soit L_x l'ensemble des hyperplans H passant par x tels que soit $X \subset H$, soit $H \cap X$ n'est pas lisse en x. Cela correspond exactement à demander $T_xX \subset T_xH$, ce qui prouve que L_x est un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}^{n*}$ de dimension $n - \dim X - 1$. Gardons les notations de la démonstration précédente, et notons Z le fermé des points de I où q n'est pas lisse. La fibre en x de la première projection $Z \to X$ est L_x, de sorte que Z est de dimension $\leq \dim X + n - \dim X - 1 < n$ (cor. 3.20.a)). La projection $Z \to \mathbf{P}^{n*}$ ne peut donc être dominante, et il suffit de prendre H dans le complémentaire de l'adhérence de l'image. □

Les deux dernières démonstrations illustrent bien une situation que l'on rencontre souvent lorsque l'on veut montrer qu'une application régulière surjective $u\colon X \to Y$ entre variétés irréductibles est lisse au-dessus d'un ouvert de Y : le théorème de lissité générique permet de conclure directement en caractéristique nulle, tandis qu'en caractéristique non nulle, il faut majorer « à la main » le lieu où u n'est pas lisse, en essayant de montrer qu'il est de dimension $< \dim Y$.

Il y a des variantes du théorème de Bertini ; nous en mentionnerons une sans donner de démonstration (*cf.* [**Ha**]).

Théorème 4.23. *Soit X une variété irréductible, soit $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière et soit H un hyperplan général de $\mathbf{P}^n$. Si $\overline{u(X)}$ est de dimension ≥ 2, alors $u^{-1}(H)$ est irréductible.*

Exemple 4.24. Il résulte du théorème 4.22 que pour $F_1, \ldots, F_r$ polynômes homogènes généraux en $n+1$ variables, la sous-variété $V(F_1, \ldots, F_r)$ de $\mathbf{P}^n$ est lisse et que chaque composante est de dimension $n - r$. Si $r \leq n/2$, cela entraîne qu'il est irréductible (puisque deux composantes se rencontreraient) ; en fait il est irréductible pour tout $r < n$, par le théorème 4.23.

4.6. Exercices

1) Soit X une hypersurface dans $\mathbf{P}^n$ définie comme le lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré d.

a) Soit x un point singulier sur X et soit L une droite passant par x. Si L rencontre X en au moins $d-1$ points distincts autres que x, montrer que L est contenue dans X.

b) En déduire que toute quadrique singulière de $\mathbf{P}^n$ est isomorphe à un cône de sommet un espace linéaire Λ de dimension r sur une quadrique lisse contenue dans un espace linéaire de dimension $n-r-1$ disjoint de Λ (*cf.* exerc. 2.10.15)).

c) Montrer que toute cubique irréductible singulière qui n'est pas un cône est rationnelle (*cf.* 2.29).

2) Montrer qu'un sous-espace linéaire contenu dans une hypersurface lisse X de $\mathbf{P}^n$ est de dimension au plus $\dim X/2$ (ce résultat se généralise à toute sous-variété lisse de $\mathbf{P}^n$ mais sa démonstration devient beaucoup plus difficile !).

3) On rappelle que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice (a_{ij}) dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être certains des $a_{i,i+1}$ qui valent 1. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

a) Montrer que $\mathscr{N}$ est une variété affine.

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{N}^0$ des matrices semblables à la matrice

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est un ouvert de $\mathscr{N}$, irréductible lisse de dimension $n(n-1)$.

c) Montrer que $\mathscr{N}$ est irréductible de dimension $n(n-1)$.

d) Montrer que $\mathscr{N}$ peut être défini par n équations dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$.

e) Calculer le noyau de la matrice jacobienne en N_0 correspondant à ces équations ; est-ce l'espace tangent à $\mathscr{N}$ en N_0 ? Faire le lien avec la question d). Les équations $N^n = 0$ engendrent-elles l'idéal de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$?

4) a) Soit x un point lisse d'une variété irréductible X ; montrer en utilisant le résultat de 4.8 qu'il existe des fonctions régulières $f_1, \ldots, f_n$ sur $X \times X$ telles que la diagonale Δ de $X \times X$ soit la seule composante de $V(f_1, \ldots, f_n)$ passant par (x, x).

b) Soit Y une variété lisse irréductible, soit X une variété irréductible et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière. Pour toute sous-variété irréductible Z de Y qui rencontre $u(X)$, chaque composante de $u^{-1}(Z)$ est de dimension $\leq \operatorname{codim} Z$ (*Indication :* se ramener comme dans la démonstration du théorème 3.17 à l'image inverse de la diagonale de $Y \times Y$ et utiliser a)).

c) En déduire que si X est une variété irréductible et $(f_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$ une matrice de fonctions régulières sur X, chaque composante de

$$\{x \in X \mid \operatorname{rang}(f_{ij}) \leq r\}$$

est de codimension $\geq \dim X - (m-r)(n-r)$ dans X (*Indication :* utiliser l'exercice 3.9.4)).

5) **Une généralisation du théorème de Bertini 4.21 (Kleiman).** On suppose $\mathbf{k}$ de caractéristique nulle. Soit G un groupe algébrique irréductible et soit Y un espace homogène sous G (lisse par l'exemple 4.5.7)). Soit X une variété lisse irréductible, soit $u\colon X \to Y$ une application régulière et soit Z une sous-variété lisse irréductible de Y.

a) Montrer que l'application régulière $v\colon G \times X \to Y$ définie par $v(g, x) = g \cdot u(x)$ est lisse (*Indication :* utiliser le théorème 4.20).

b) En déduire que pour g général dans G, l'image inverse $u^{-1}(g \cdot Z)$ est vide ou lisse de dimension pure $\dim X - \operatorname{codim} Z$ (*Indication :* pour chaque composante irréductible $v^{-1}(Z)_j$ de $v^{-1}(Z)$, appliquer le théorème 4.20 à la projection $v^{-1}(Z)_j \to G$).

c) En déduire le théorème de Bertini 4.21.

CHAPITRE 5

Diviseurs sur une variété algébrique

On fixe un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$; toutes les variétés considérées seront définies sur ce corps.

5.1. Fibrés en droites

5.1. Définitions. Intuitivement, un *fibré en droites* sur une variété X est une application régulière surjective $p\colon L \to X$ qui est « localement un produit avec $\mathbf{k}$ ». Plus précisément, on demande qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et des isomorphismes $\psi_i\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{k}$ dont la composée avec la première projection est p, tels que, pour tout i et tout j, la composée $\psi_i \circ \psi_j^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbf{k} \to (U_i \cap U_j) \times \mathbf{k}$ soit donnée par

$$(x, t) \longmapsto (x, g_{ij}(x)t) \ ,$$

où g_{ij} est une fonction régulière sur $U_i \cap U_j$ qui ne s'annule pas.

On dit que L est *trivialisé* sur le recouvrement ouvert (U_i). Des fibrés en droites $p\colon L \to X$ et $p'\colon L' \to X$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $u\colon L \to L'$ tel que $p' \circ u = p$, qui soit *linéaire sur les fibres*. Cela signifie que sur U_i, on a (on suppose que les deux fibrés sont trivialisés sur le même recouvrement)

$$u\big(\psi_i^{-1}(x, t)\big) = \psi_i^{'-1}(x, h_i(x)t) \ ,$$

où h_i est une fonction régulière sur U_i qui ne s'annule pas.

Une *section* du fibré $p\colon L \to X$ est une application régulière $s\colon X \to L$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_X$. On définit la section nulle $s_0\colon X \to L$ en posant $s_0(x) = \psi_i^{-1}(x, 0)$ pour tout x dans U_i. Les sections de L forment un espace vectoriel dont l'origine est s_0 ; on le note $\Gamma(X, L)$. On dit qu'une section s s'annule en un point x de X si $s(x) = s_0(x)$ (on écrira simplement $s(x) = 0$).

Si $u\colon Y \to X$ est une application régulière et $p\colon L \to X$ un fibré en droites, on définit le fibré u^*L sur Y par

$$u^*L = \{(y, l) \in Y \times L \mid u(y) = p(l)\}$$

avec la première projection $u^*L \to Y$. Il y a une application linéaire $\Gamma(u)\colon \Gamma(X, L) \to \Gamma(Y, u^*L)$ qui à une section s de L associe la section $y \mapsto (y, s(u(y)))$ de u^*L.

Exemples 5.2. 1) La première projection $X \times \mathbf{k} \to X$ est un fibré en droites dont les sections correspondent aux fonctions régulières sur X. Un fibré en droites est dit trivial s'il est isomorphe à ce fibré. Pour qu'un fibré en droites soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section jamais nulle.

2) On peut construire un fibré en droites $L \to \mathbf{P}^n$ dont la fibre au-dessus d'un point x de $\mathbf{P}^n$ est la droite ℓ_x de $\mathbf{k}^{n+1}$ que x représente, en posant

$$L = \{(x, v) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{k}^{n+1} \mid v \in \ell_x\}.$$

Au-dessus de l'ouvert standard U_i, l'ensemble L est défini dans $U_i \times \mathbf{k}^{n+1}$ par les équations $v_j = v_i x_j$, pour tout $j \neq i$; c'est donc une variété algébrique. L'isomorphisme ψ_i de la définition est donné par

$$\psi_i(x,v) = (x, v_i) \quad , \qquad \text{avec} \qquad \psi_j^{-1}(x,t) = (x, t\frac{x}{x_j}) \ ,$$

de sorte que $g_{ij}(x) = x_i/x_j$, pour $x \in U_i \cap U_j$. Ce fibré est noté $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$.

Déplaçons un peu notre point de vue ; si X est une variété algébrique, nous aimerions reconstruire le fibré L à partir de la donnée de ses *fonctions de transition* g_{ij} : l'idée est d'obtenir L en « recollant » les $U_i \times \mathbf{k}$ en identifiant le point (x,t) de $U_j \times \mathbf{k}$ avec le point $(x, g_{ij}(x)t)$ de $U_i \times \mathbf{k}$, pour tout x dans $U_i \cap U_j$ et tout t dans $\mathbf{k}$. Cette opération de recollement n'est pas prévue dans notre définition des variétés algébriques (à qui l'on a demandé d'être des sous-ensembles d'un espace projectif). Nous reviendrons plus loin sur ce point et nous contenterons pour l'instant d'élargir notre définition en posant :

DÉFINITION 5.3. *Un* fibré en droites *sur une variété X est la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de X et de fonctions régulières $g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathbf{k}^*$ vérifiant*

$$g_{ii} = g_{ij} g_{jk} g_{ik} = 1.$$

Pour tenir compte du fait que le « même » fibré peut être trivialisé sur des recouvrements différents, nous dirons que deux telles données (U_i, g_{ij}) et $(U'_{i'}, g'_{i'j'})$ définissent des fibrés en droites isomorphes s'il existe des fonctions régulières $s_{ii'} \colon U_i \cap U'_{i'} \to \mathbf{k}^*$ vérifiant $g'_{i'j'} s_{ii'} = g_{ij} s_{jj'}$ pour tous i, i', j, j'. On vérifie que l'on peut ainsi remplacer le recouvrement (U_i) par un recouvrement plus fin, et en particulier trivialiser deux fibrés sur le même recouvrement.

Toutes les constructions précédentes se retrouvent dans ce cadre :

– une section s d'un fibré donné sous cette forme est une collection de fonctions régulières[1] $s_i \colon U_i \to \mathbf{k}$ qui vérifient $s_i = g_{ij} s_j$ sur $U_i \cap U_j$;
– son image inverse par une application régulière $u \colon Y \to X$ est définie par la donnée $(u^{-1}(U_i), g_{ij} \circ u)$.

Contrairement aux apparences, cette définition est beaucoup plus maniable que la précédente !

On définit par exemple le *dual* d'un fibré en droites (U_i, g_{ij}) comme le fibré $(U_i, 1/g_{ij})$. On définit le *produit tensoriel* de fibrés en droites (U_i, g_{ij}) et (U_i, h_{ij}) trivialisés sur les mêmes recouvrements comme le fibré $(U_i, g_{ij} h_{ij})$. Ces opérations permettent de munir l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X d'une structure de groupe. On appelle le groupe ainsi obtenu le *groupe de Picard* de X et on le note $\mathrm{Pic}(X)$.

EXEMPLE 5.4. On note $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ le dual du fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$ défini plus haut. Pour tout entier d positif, on pose

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\otimes d} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-d) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)^{\otimes d}.$$

On montrera (ex. 5.16.2)) que l'on obtient ainsi tous les fibrés en droites sur la variété $\mathbf{P}^n$; son groupe de Picard est donc isomorphe à $\mathbf{Z}$.

---

1. On peut d'ailleurs aussi parler de section rationnelle lorsque les s_i ne sont que des fonctions rationnelles.

Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ est donc défini par le recouvrement des ouverts standard (U_i) et les fonctions de transition $g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$. Pour $d \geq 0$, tout polynôme homogène P de degré d en $n+1$ variables définit donc une section de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ en posant $s_i(x_0, \dots, x_n) = P(x_0, \dots, x_n)/x_i^d$. On montrera (ex. 5.16.2)) que l'on obtient ainsi *toutes* les sections de ce fibré. Pour $d < 0$, la seule section est la section nulle.

5.5. Fibrés en droites et applications vers l'espace projectif. Soit L un fibré en droites sur une variété X, défini par une donnée (U_i, g_{ij}), et soient $s_0, \dots, s_n$ des sections non toutes nulles de L, où chaque s_j est donnée par une collection de fonctions régulières $(s_{j,i})$. On construit une application rationnelle $u \colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ en envoyant un point x de U_i sur le point de coordonnées homogènes $\big(s_{0,i}(x), \dots, s_{n,i}(x)\big)$ de $\mathbf{P}^n$. Ce point est indépendant de l'ouvert U_i choisi puisque dans un autre ouvert U_j, toutes ces coordonnées sont multipliées par le même scalaire non nul $g_{ji}(x)$; il est bien défini sauf si toutes les sections s'annulent en x. On obtient ainsi une application rationnelle $u \colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ définie hors du fermé où toutes les sections s'annulent, que l'on écrit d'habitude simplement

$$u(x) = \big(s_0(x), \dots, s_n(x)\big).$$

Supposons que les s_i n'aient pas de zéro commun ; l'application u est alors régulière et *le fibré en droites* $u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ *est isomorphe à* L : il est en effet défini par le recouvrement ouvert de X par les images inverses des ouverts standard de $\mathbf{P}^n$, c'est-à-dire les $\{x \in X \mid s_i(x) \neq 0\}$, avec les fonctions de transition $(x_i/x_j) \circ u = s_i/s_j$.

Exemple 5.6. Considérons le fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ pour $d > 0$. Ses sections n'ont pas de zéro commun donc définissent une application régulière $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ qui n'est autre que l'application de Veronese définie en 2.21.2).

Inversement, étant donnée une application régulière $u \colon X \to \mathbf{P}^n$, on considère le fibré en droites $L = u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ et l'application $\Gamma(u) \colon \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \to \Gamma(X, L)$. Si s_j est l'image de la section x_j par $\Gamma(u)$, l'application u est associée comme plus haut aux sections $s_0, \dots, s_n$ de L, puisque $s_j(x) = x_j \circ u(x)$.

En résumé, nous avons établi une correspondance bijective entre :
- l'ensemble des applications régulières $X \to \mathbf{P}^n$;
- l'ensemble des $(n+1)$-uplets de sections d'un fibré en droites sur X, sans zéro commun.

5.2. Diviseurs

5.7. Diviseurs de Weil. Soit X une variété irréductible et soit $f \colon X \to \mathbf{k}$ une fonction régulière non nulle. Nous voulons définir l'ordre d'annulation de f le long d'une hypersurface irréductible Y de X.

Il est pour cela nécessaire de faire l'hypothèse que *le lieu singulier de X est de codimension au moins* 2 (on dit que X est lisse en codimension 1). Il existe alors un point y de Y lisse sur X. La proposition 4.9 montre qu'il existe un voisinage ouvert affine U de y dans X et un élément irréductible δ de $A(U)$ tel que l'idéal de $U \cap Y$ soit engendré par δ. Le germe de δ est irréductible dans l'anneau local de chaque point de $U \cap Y$; on peut donc écrire $f = g\delta^m$ dans $\mathscr{O}_{X,y}$, avec $m \geq 0$ et $\delta \nmid g$. Si V est l'ouvert où g est régulière non nulle, il rencontre Y et dans l'anneau local de chacun de ses points, f est produit d'une unité avec δ^m. L'entier m ne dépend donc que de Y ; on le note $v_Y(f)$.

On appelle *diviseur de Weil* toute combinaison linéaire formelle finie à coefficients entiers d'hypersurfaces irréductibles de X ; il est *effectif* si tous les coefficients sont positifs. On a ainsi associé à toute fonction régulière non nulle f le diviseur effectif

$$\operatorname{div}(f) = \sum_Y v_Y(f)Y.$$

On peut étendre cette construction aux sections non nulles de fibrés en droites, puisque ce sont localement des fonctions régulières et même aux sections rationnelles : celles-ci s'écrivent localement comme quotient g/h de deux fonctions régulières et on pose $v_Y(f) = v_Y(g) - v_Y(h)$ (c'est indépendant de l'écriture choisie). On obtient ainsi un morphisme de groupes de $K(X)^*$ dans le groupe des diviseurs.

Exemples 5.8. 1) Considérons la surface irréductible affine d'équation $xy = z^2$ dans $\mathbf{A}^3$. Elle est lisse en dehors de l'origine, donc en codimension 1. Le diviseur de la fonction régulière x est $2D$, où D est la droite d'équations $x = z = 0$.

2) Le diviseur de la section x_i de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ est l'hyperplan H_i complémentaire de l'ouvert standard U_i. Le diviseur de la fonction rationnelle x_i/x_j est $H_i - H_j$.

5.9. Diviseurs de Cartier. Le diviseur d'une fonction régulière a la propriété d'être *localement principal*, c'est-à-dire qu'il est défini localement par *une équation*. Certains diviseurs n'ont pas cette propriété : c'est le cas par exemple de la droite D du premier exemple ci-dessus, alors que $2D$ est lui principal [2].

Ce sont surtout ces diviseurs localement principaux qui nous intéresserons. La raison en est qu'on peut leur associer un fibré en droites, en procédant comme suit.

Un tel diviseur D est par définition principal sur des ouverts U_i qui recouvrent X, défini par des fonctions rationnelles $f_i \colon U_i \dashrightarrow \mathbf{k}$. Sur $U_i \cap U_j$, les fonctions f_i et f_j ont même diviseur, de sorte que $g_{ij} = f_i/f_j$ est une fonction régulière qui ne s'annule pas [3]. La donnée (U_i, g_{ij}) définit donc un fibré en droites.

C'est cet aspect que nous allons privilégier pour poser la définition générale suivante (sans hypothèse sur les singularités de X).

Définition 5.10. *Une famille (U_i, f_i), où (U_i) est un recouvrement ouvert de X, et $f_i \colon U_i \dashrightarrow \mathbf{k}$ une fonction rationnelle non identiquement nulle dans aucune composante irréductible de U_i est* admissible *si f_i/f_j est une fonction régulière qui ne s'annule pas dans $U_i \cap U_j$. De telles familles sont équivalentes si leur réunion est encore admissible.*

Un diviseur de Cartier sur X est une classe d'équivalence de familles admissibles [4].

2. La démonstration de la proposition 4.9 montre que lorsque les anneaux locaux de la variété sont factoriels (on dit que la variété est *localement factorielle* ; c'est le cas si elle est lisse), tout diviseur est localement principal.

3. Ici je triche un peu : ce point n'est vrai que si X est *normale*, c'est-à-dire si ses anneaux locaux sont intégralement clos.

4. De nouveau, cette relation d'équivalence est nécessaire pour tenir compte du fait qu'un diviseur de Cartier peut être défini sur différents recouvrements. On peut en particulier toujours raffiner le recouvrement donné, donc supposer que deux diviseurs sont définis sur le même recouvrement.

Un diviseur de Cartier est *effectif* s'il a une représentation (U_i, f_i) où les fonctions f_i sont régulières (toutes ses représentations ont alors cette propriété).

Étant donnés des diviseurs de Cartier D et D' définis (sur le même recouvrement) par les familles admissibles (U_i, f_i) et (U_i, f_i'), on définit le diviseur de Cartier $-D$ par la famille admissible $(U_i, 1/f_i)$ et le diviseur de Cartier $D + D'$ par la famille admissible $(U_i, f_i f_i')$.

La définition du diviseur d'une fonction rationnelle f non nulle est maintenant tautologique (c'est le diviseur de Cartier associé à la famille admissible (X, f)), tout comme celle du diviseur d'une section non nulle d'un fibré en droites (c'est le diviseur de Cartier associé à la famille admissible (U_i, s_i)). La fonction (ou la section) est régulière si son diviseur est effectif.

DÉFINITION 5.11. *On appelle* diviseur principal *le diviseur d'une fonction rationnelle non nulle. Deux diviseurs sont* linéairement équivalents *si leur différence est principale.*

Lien avec les diviseurs de Weil. On peut, lorsqu'on suppose X *lisse en codimension* 1, associer à un diviseur de Cartier D défini par une famille admissible (U_i, f_i) un diviseur de Weil

$$\sum_Y n_Y Y \ ,$$

où n_Y est l'entier $v_Y(f_i)$, pour n'importe quel i tel que $Y \cap U_i$ soit non vide.

On obtient ainsi un morphisme depuis le groupe des diviseurs de Cartier vers celui des diviseurs de Weil. Il est injectif si $v_Y(f_i) = 0$ pour tout Y entraîne que f_i est régulière sur U_i. C'est vrai si la variété X est normale (*cf.* exerc. 3.9.2)).

5.12. Image inverse d'un diviseur de Cartier par une application rationnelle. Si $u \colon Y \to X$ est une application régulière dominante et (U_i, f_i) une famille admissible définissant un diviseur de Cartier D sur X, la famille $(u^{-1}(U_i), f_i \circ u)$ est admissible et définit un diviseur de Cartier sur Y que l'on note u^*D (il ne dépend que de D). On a fait l'hypothèse que u est dominante pour assurer que $f_i \circ u$ n'est pas identiquement nulle sur $u^{-1}(U_i)$, ou encore que f_i n'est pas identiquement nulle sur $u(Y) \cap U_i$. Si cette hypothèse est satisfaite, on peut encore définir u^*D.

EXEMPLES 5.13. 1) Soit par exemple Y une sous-variété de $\mathbf{P}^n$ et soit H un hyperplan de $\mathbf{P}^n$ ne contenant pas Y, défini par une forme linéaire ℓ. Soit u l'inclusion de Y dans $\mathbf{P}^n$; le diviseur de Cartier u^*H, que l'on appelle encore la restriction de H à Y, est défini par la famille $(U_i \cap Y, \ell|_{U_i})$, où $U_0, \dots, U_n$ sont les ouverts standard. Regardons de plus près le cas $n = 2$; supposons que la droite H ne coupe la courbe Y qu'en des points lisses. On peut comme ci-dessus associer au diviseur u^*H un diviseur de Weil

$$\sum n_i p_i \ ,$$

où $p_1, \dots, p_r$ sont les points d'intersection de Y et de H. L'entier n_i s'appelle la multiplicité d'intersection de Y et de H en p_i ; si $F(T_0, T_1, T_2)$ est un générateur de l'idéal de Y dans $\mathbf{P}^2$, c'est tout simplement l'ordre de la racine du polynôme $F|_H$ (*cf.* exemple 5.20.2) pour un exemple concret).

2) Soit par exemple X une variété *lisse en codimension* 1 et soit f une fonction rationnelle sur X. Elle induit une application rationnelle $u \colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ dont on a vu dans le cor. 4.12 qu'elle est régulière sur un ouvert lisse U de X dont le

complémentaire est de codimension au moins 2. Notons U_0 et U_1 les ouverts standards de $\mathbf{P}^1$. Le diviseur 0 sur $\mathbf{P}^1$ est défini par la famille $\big((U_0, t_1/t_0), (U_1, 1)\big)$. Son image inverse u^*0 sur U est donc définie par la famille

$$\big((u^{-1}(U_0), f), (u^{-1}(U_1), 1)\big).$$

De façon analogue, le diviseur $u^*\infty$ sur U est défini par la famille

$$\big((u^{-1}(U_0), 1), (u^{-1}(U_1), 1/f)\big)\ ,$$

de sorte que $u^*(0-\infty)$ est défini par $\big((u^{-1}(U_0), f), (u^{-1}(U_1), f)\big)$: ce n'est autre que la restriction de $\operatorname{div}(f)$ à U.

5.14. Fibré en droites associé à un diviseur de Cartier. À une famille admissible (U_i, f_i) on peut associer le fibré en droites $(U_i, f_i/f_j)$; à un diviseur de Cartier D est donc associé un (ou plutôt une classe d'isomorphisme de) fibré en droites. Il est noté $\mathscr{O}_X(D)$.

Inversement, tout fibré en droites sur une variété *irréductible* X, décrit par une donnée (U_i, g_{ij}), admet une section rationnelle non nulle : on choisit un ouvert non vide U_{i_0} du recouvrement, et on considère chaque g_{ii_0} comme une fonction rationnelle $s_i \colon U_i \dashrightarrow \mathbf{k}$, définie sur l'ouvert dense $U_i \cap U_{i_0}$. La collection des s_i définit une section rationnelle non identiquement nulle de L. Soit D son diviseur ; le fibré en droites L est alors (tautologiquement) isomorphe à $\mathscr{O}_X(D)$. Pour que $\mathscr{O}_X(D)$ soit trivial, il faut et il suffit (par définition), qu'il admette une section jamais nulle, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions régulières $s_i \colon U_i \to \mathbf{k}^*$ telles que $s_i = \frac{f_i}{f_j} s_j$. Les fonctions rationnelles $\frac{f_i}{s_i}$ définissent alors une fonction rationnelle globale sur X dont le diviseur est D. Il s'ensuit que pour que le fibré $\mathscr{O}_X(D)$ soit trivial, il faut et il suffit que D soit principal.

En résumé, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 5.15. *Soit X une variété irréductible. Le groupe des diviseurs de Cartier sur X modulo les diviseurs principaux et le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X (c'est-à-dire le groupe de Picard de X) sont isomorphes.*

De plus, si $u \colon Y \to X$ est une application régulière et D un diviseur de Cartier sur X tel que u^*D soit défini (*cf.* 5.12), les fibrés en droites $u^*\mathscr{O}_X(D)$ et $\mathscr{O}_Y(u^*D)$ sont isomorphes.

Ce théorème ramène le calcul du groupe de Picard à l'étude des diviseurs de Cartier sur la variété, bien souvent plus aisée.

Le fibré $\mathscr{O}_X(D)$ a une section rationnelle s_D définie par la collection des f_i, dont le diviseur est D. Soit s une section non nulle de $\mathscr{O}_X(D)$; on peut considérer le quotient s/s_D comme une fonction rationnelle $f \colon X \dashrightarrow \mathbf{k}$, et

$$\operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(s_D) + \operatorname{div}(f) = D + \operatorname{div}(f)\ ,$$

de sorte que le diviseur de s est linéairement équivalent à D. Inversement, si D' est un diviseur de Cartier linéairement équivalent à D, il existe une fonction rationnelle $f \colon X \dashrightarrow \mathbf{k}$ de diviseur $D' - D$, et fs_D est une section rationnelle de $\mathscr{O}_X(D)$ de diviseur D'. On obtient en particulier un isomorphisme de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)) \simeq \{f \in K(X) \mid f = 0 \ \text{ ou } \ \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Notons que sur une variété *projective* X, une fonction rationnelle est caractérisée, à multiplication par une constante non nulle près, par son diviseur [5]. Par conséquent, l'application qui à une section non nulle associe son diviseur induit une bijection entre $\mathbf{P}\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D))$ et l'ensemble des diviseurs linéairement équivalents à D.

Exemples 5.16. 1) Toute hypersurface irréductible Y de $\mathbf{A}^n$ est définie globalement par une équation (cor. 3.10). Plus exactement, l'idéal de Y est principal. Soit P un générateur ; par sa définition même, l'entier $v_Y(P)$ est 1 (*cf.* 5.7), donc le diviseur de P est Y. Tout diviseur est donc principal et le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbf{A}^n)$ est trivial.

2) L'idéal d'une hypersurface H de $\mathbf{P}^n$ est engendré par un polynôme homogène P de degré d. Comme ci-dessus, cela entraîne l'égalité

$$D - dH_0 = \mathrm{div}(P(x)/x_0^d) \ ,$$

de sorte que ce diviseur est principal. Le groupe des diviseurs sur $\mathbf{P}^n$ modulo les diviseurs principaux est ainsi engendré par la classe de l'hyperplan H_0.

Le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n)$ est donc engendré par la classe de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$. Il est infini cyclique puisqu'aucun $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$, pour $d > 0$, n'est trivial (par exemple, l'espace vectoriel de ses sections est de dimension > 1).

Soit D le diviseur d'une section s non nulle de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$, avec $d \geq 0$. C'est une hypersurface, dont le degré est d. Soit P un polynôme homogène définissant D ; la section de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ qu'il définit a même diviseur que s, qui lui est donc proportionnelle. L'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$ est donc isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d en $n+1$ variables. Soit t une section de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-d)$; le produit st définit une section du produit tensoriel de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ et de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-d)$, qui est trivial. C'est donc une fonction régulière sur $\mathbf{P}^n$, qui est constante, nulle sur D donc identiquement nulle. On en déduit $t = 0$. Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-d)$ n'a aucune section non nulle.

3) On garde les mêmes notations. Les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n \smallsetminus H$ sont les restrictions de celles de $\mathbf{P}^n$; on a donc une surjection $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \smallsetminus H)$. La fonction x_0^d/P est régulière sur $\mathbf{P}^n \smallsetminus H$; son diviseur dH_0 y est donc principal. Inversement, si $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d')$, avec $d' > 0$ est dans le noyau, le diviseur effectif $d'H_0$ est celui d'une fonction régulière sur $\mathbf{P}^n \smallsetminus H$, qui s'écrit $x_0^{d'}/P(x)^m$, et $d' = md$ (on rappelle que $\mathbf{P}^n \smallsetminus H$ est affine ; *cf.* exerc. 2.10.15)d)). Le groupe de Picard de la variété affine $\mathbf{P}^n \smallsetminus H$ est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Cela généralise l'exemple 1).

4) On peut montrer comme dans le cor. 3.10 qu'une hypersurface de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ est définie par un seul polynôme bihomogène (*cf.* § II.7). On peut donc définir le bidegré d'un diviseur de $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$, et cela induit un morphisme surjectif

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n) \to \mathbf{Z}^2 \ ,$$

dont on montre comme plus haut qu'il est bijectif. Attention, en général, le groupe de Picard d'un produit n'est pas le produit des groupes de Picard.

5.17. Diviseurs sur les courbes lisses. Un diviseur de Weil sur une courbe X est une combinaison linéaire formelle finie $\sum_i n_i x_i$, où les x_i sont des points de X. On définit le *degré* d'un tel diviseur comme la somme des n_i.

---

5. En effet, si f et g ont même diviseur, la famille $\{(X, f), (X, g)\}$ est admissible ; le quotient f/g est donc une fonction régulière qui ne s'annule pas dans X. Par cor. 2.38, elle est constante non nulle. La même chose est vraie pour les sections rationnelles d'un fibré en droites.

Proposition 5.18. *Un diviseur principal sur une courbe projective lisse irréductible X est de degré* 0. *Le degré induit donc un morphisme surjectif*

$$\deg\colon \operatorname{Pic}(X) \to \mathbf{Z}.$$

Ce morphisme n'est en général pas injectif (ce n'est le cas que lorsque X est isomorphe à $\mathbf{P}^1$; *cf.* ex. 5.20.1)). Pour la démonstration de la proposition, nous utiliserons le lemme suivant, que nous admettrons (pour la démonstration, voir [**Ha**], II, prop. 6.9).

Lemme 5.19. *Soient X et Y des courbes lisses et soit $u\colon X \to Y$ une application régulière surjective. Pour tout point y de Y, on a*

$$\deg(u^*y) = \deg(u) ,$$

où le degré de u est celui de l'extension de corps $K(Y) \subset K(X)$ (cf. th. 3.12).

Rappelons que lorsque le corps $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle (ou plus généralement lorsque l'extension $K(Y) \subset K(X)$ est *séparable*), le degré de u est le nombre de points d'une fibre générale de u. Cela joint au théorème de lissité générale th. 3.17 entraîne facilement le lemme pour un point général y de Y. La démonstration complète est en fait très algébrique. Il faut interpréter le lemme comme disant que le nombre de points d'une fibre de y, « comptés avec multiplicité », est constant.

Démonstration. Il s'agit de montrer que le diviseur d'une fonction rationnelle non nulle sur X est de degré nul, c'est-à-dire que f a même nombre de zéros que de pôles (comptés « avec multiplicité »). Une telle fonction définit une application rationnelle $u\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^1$, qui par le cor. 4.13 est régulière. Si elle est constante, son diviseur est nul ; sinon, elle est surjective et son diviseur est $u^*(0-\infty)$, comme on l'a vu dans l'exemple 5.13.2). Le lemme entraîne que ce diviseur est de degré 0. □

Exemples 5.20. 1) Soit X une courbe projective lisse. Le morphisme de groupes $\deg\colon \operatorname{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$ est injectif si et seulement si X est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ (on dit alors que X est une courbe *rationnelle*).

On a déjà vu un sens dans l'exemple 5.16.2). Inversement, si deg est injectif, deux points quelconques x et y de X sont linéairement équivalents, de sorte qu'il existe une fonction rationnelle f de diviseur $x-y$. Comme dans la proposition 5.18, celle-ci peut se voir comme une application régulière $u\colon X \to \mathbf{P}^1$ et $u^*0 = x$ et $u^*\infty = y$. Le lemme 5.19 entraîne que u est de degré 1, donc est un isomorphisme (cor. 4.11).

2) Soit X la cubique plane lisse d'équation homogène $T_1^2T_2 = T_0^3 - T_0T_2^2$. Elle a un point d'inflexion $P_0 = (0,1,0)$. Tous les diviseurs obtenus comme restriction des droites à X sont linéairement équivalents. En particulier, si P, Q et R sont trois points alignés de X, on a

$$3P_0 \equiv P + Q + R. \tag{4}$$

Nous admettrons que X n'est pas rationnelle, de sorte que le noyau K du morphisme deg n'est pas trivial. Nous allons montrer qu'il est en bijection avec X. L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & X & \to & K \\ & P & \mapsto & P - P_0 \end{array}$$

est injective. Soit $D = \sum n_iP_i$ un diviseur de degré 0 ; on peut l'écrire $D = \sum n_i(P_i - P_0)$. En utilisant (4), on obtient $(P-P_0) + (Q-P_0) \equiv P_0 - R$, de sorte que l'on peut finalement écrire $D \equiv P_1 - P_2$. Soit P le point de X tel que $P_0 + P_2 + P \equiv 3P_0$, on a

$$D \equiv P_1 + P - 2P_0 \ ,$$

qui se trouve dans l'image de φ. Il s'ensuit que l'application φ est bijective ; en particulier, elle induit une *structure de groupe* sur la variété X.

5.21. Intersection d'un diviseur et d'une courbe lisse. Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour définir l'intersection d'un diviseur (de Cartier) D et d'une courbe lisse C sur une variété X comme l'entier

$$D \cdot C = \deg(\mathscr{O}_X(D)).$$

Cette formule a toujours un sens et ce nombre d'intersection ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D.

5.22. Comment calculer un nombre d'intersection ? Soit X une variété projective. Pour calculer l'intersection d'un diviseur D avec une courbe lisse C, on écrit D comme somme d'hypersurfaces irréductibles et on est ramené à calculer l'intersection d'une telle hypersurface H avec C. Nous traiterons ici exclusivement le cas où C n'est pas contenue dans H.

Notons donc $p_1, \ldots, p_r$ les points d'intersection de H et de C. Au voisinage de chaque p_i, l'idéal de H est engendré par une fonction régulière f_i. Dans l'anneau local $\mathscr{O}_{C,p_i}$, l'idéal du point p_i est l'idéal maximal, et il est engendré par un élément δ_i. La multiplicité du diviseur de Weil u^*H en p_i est par définition l'unique entier m_i tel que

$$f_i = g_i \delta_i^{m_i}$$

dans $\mathscr{O}_{C,p_i}$, avec $g_i(p_i) \neq 0$; on l'appelle la *multiplicité* de l'intersection de H et de C en p_i et

$$H \cdot C = \sum_{i=1}^{r} m_i.$$

Comment calculer cette multiplicité ? Le cas facile est lorsque l'intersection de H et de C est transverse en p_i, c'est-à-dire que

$$T_{p_i}X = T_{p_i}C \oplus T_{p_i}H \ ,$$

où encore que la forme linéaire définie par la différentielle de f_i en p_i ne s'annule pas sur $T_{p_i}C$. Comme

$$(df_i)|_{T_{p_i}C} = (dg_i)\delta_i^{m_i} + g_i m_i \delta_i^{m_i-1}(d\delta_i) \ ,$$

on a $m_i = 1$.

Dans le cas général, on peut parfois se ramener au cas ci-dessus en remplaçant D par un diviseur linéairement équivalent. C'est le cas par exemple lorsque X est contenue dans $\mathbf{P}^n$ et que H est un hyperplan, le théorème de Bertini 4.22 (voir aussi th. 7.18) dit que l'on peut toujours choisir H de façon qu'il ne coupe C qu'en des points lisses sur C, et ce transversalement. Le nombre d'intersection $H \cdot C$ est alors simplement le nombre de points d'intersection. Il ne dépend pas du choix de H. On l'appelle le *degré* de C dans $\mathbf{P}^n$; c'est en particulier un nombre strictement positif.

Exemple 5.23. Lorsque X est une surface, courbes et hypersurfaces coïncident. Il est clair que le degré d_1 d'une courbe C_1 dans $\mathbf{P}^2$ est le degré d'un polynôme homogène F qui engendre son idéal (par le théorème de Bertini, une droite Δ coupe C transversalement, ce qui signifie exactement, comme la différentielle de F définit l'espace tangent à C, que les racines de F sur Δ sont simples, donc qu'il y en a autant que le degré de F). Si C_2 est une autre courbe plane de degré d_2, on a

$$C_1 \cdot C_2 = d_1(\Delta \cdot C_2) = d_1 d_2$$

(c'est le théorème de Bézout).

CHAPITRE 6

Faisceaux cohérents et cohomologie

6.1. Faisceaux

La théorie des faisceaux permet de formaliser de façon maniable plusieurs des notions définies dans les numéros précédents, en particulier celle de diviseur (déf. 5.10) ainsi que la définition 5.3 des fibrés en droites par des fonctions de transition.

L'idée de départ est de définir une certaine classe de fonctions sur un espace topologique par des propriétés *locales.* Nous donnerons la définition, qui paraîtra sans doute un peu formelle, et nous l'expliquerons immédiatement par de nombreux exemples, qui vous montrerons que vous avez en fait déjà utilisé des faisceaux !

DÉFINITION 6.1. *Soit X un espace topologique. On appelle* faisceau $\mathscr{F}$ *sur X la donnée*

– *pour chaque ouvert U de X, d'un ensemble $\mathscr{F}(U)$;*
– *pour chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$, d'une restriction $r_{VU}\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$; satisfaisant les conditions suivantes :*
    a) *(restriction) pour toutes inclusions $W \subset V \subset U$, on a $r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$;*
    b) (recollement) *si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts d'union U et si l'on se donne pour chaque i un élément s_i de $\mathscr{F}(U_i)$ vérifiant*

$$r_{U_i\cap U_j,U_i}(s_i) = r_{U_i\cap U_j,U_j}(s_j) \ ,$$

il existe un unique élément s de $\mathscr{F}(U)$ vérifiant $r_{U_i,U}(s) = s_i$ pour chaque i.

Pour chaque ouvert U, on note aussi $\Gamma(U,\mathscr{F})$ l'ensemble $\mathscr{F}(U)$; ses éléments sont appelés les *sections* de $\mathscr{F}$ sur U. Les éléments de $\Gamma(X,\mathscr{F})$ sont souvents appelés *sections globales* de $\mathscr{F}$. On notera aussi $s|_V$ au lieu de $r_{VU}(s)$ la restriction d'une section s à un ouvert V.

On peut se limiter à définir un faisceau $\mathscr{F}$ sur une base d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X : il suffit de poser, pour tout ouvert U de X,

$$\mathscr{F}(U) = \{(s_i) \in \prod_{U_i\subset U} \mathscr{F}(U_i) \mid s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \ \text{ pour tout } i \text{ et } j \text{ dans } I\}.$$

On rencontre fréquemment des faisceaux de fonctions, pour lesquels $\mathscr{F}(U)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de U dans un ensemble fixé K. La propriété de restriction est alors automatique et l'unicité dans le recollement aussi : la fonction f existe toujours comme fonction de U dans K, il s'agit de vérifier qu'elle est dans $\mathscr{F}(U)$.

Si $u\colon X \to Y$ est une application continue et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X, on définit un faisceau $u_*\mathscr{F}$ sur Y en posant, pour tout ouvert U de Y,

$$u_*\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}\big(u^{-1}(U)\big).$$

Exemples 6.2. 1) Si K est un ensemble, on peut prendre pour $\mathscr{F}(U)$ l'ensemble des fonctions localement constantes de U dans K ; on note le faisceau correspondant $\underline{K}$. Si K est un espace topologique, on peut aussi prendre pour $\mathscr{F}(U)$ l'ensemble des fonctions *continues* de X dans K.

2) Soit x un point de X et soit K un ensemble avec un point fixé 0 (souvent un groupe abélien) ; le *faisceau gratte-ciel* K_x est défini en prenant pour $K_x(U)$ l'ensemble des fonctions de U dans K valant 0 hors de x.

3) Les fonctions régulières sur une variété algébrique X forment un faisceau noté $\mathscr{O}_X$. On note $\mathscr{O}_X^*$ le sous-faisceau des fonctions qui ne s'annulent pas. On définit le faisceau $\mathscr{K}_X$ des fonctions rationnelles sur X en prenant pour $\mathscr{K}_X(U)$ le corps (total) de fractions de l'anneau $\mathscr{O}_X(U)$, c'est-à-dire le localisé en l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro. Lorsque U est irréductible, $\mathscr{O}_X(U)$ est intègre et $\mathscr{K}_X(U)$ est simplement le corps de fractions de l'anneau $\mathscr{O}_X(U)$.

La définition des fonctions rationnelles est beaucoup plus naturelle dans le cadre du formalisme des faisceaux (comparer avec la déf. 2.24) : une fonction rationnelle est tout simplement une section du faisceau $\mathscr{K}_X$.

Lorsque X est irréductible de corps de fonctions rationnelles $K(X)$, le faisceau $\mathscr{K}_X$ n'est autre que le faisceau $\underline{K(X)}$ des fonctions localement constantes de U dans $K(X)$.

4) Soit L un fibré en droites sur une variété algébrique X. On définit un faisceau en associant à tout ouvert U de X l'espace vectoriel $\Gamma(U, L)$ des sections de L sur U. On l'appelle *faisceau des sections* de L.

Définition 6.3. *Soit X un espace topologique et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des faisceaux sur X. On appelle* morphisme *f de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ la donnée, pour chaque ouvert U de X, d'une application $f|_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$. Ces applications doivent avoir des propriétés de compatibilité évidentes vis-à-vis des restrictions.*

On définit de façon évidente les faisceaux de groupes abéliens (on demande que chaque $\mathscr{F}(U)$ soit un groupe abélien et que les restrictions soient des morphismes de groupes) et les morphismes entre tels faisceaux. On définit de même les faisceaux d'anneaux ou de **k**-algèbres.

On peut définir le noyau d'un tel morphisme $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en posant

$$\mathrm{Ker}(f)(U) = \mathrm{Ker}(f|_U).$$

Pour l'image, c'est plus difficile, car les $f(U)$ ne forment en général pas un faisceau (la propriété de recollement n'est en général pas satisfaite ; *cf.* l'exemple 2) ci-dessous). On définit le faisceau $\mathrm{Im}\, f$ comme suit : un élément t de $\mathscr{G}(U)$ est dans $(\mathrm{Im}\, f)(U)$ s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U et des élément s_i de $\mathscr{F}(U_i)$ tels que $f(s_i) = t|_{U_i}$ pour tout i. En d'autres termes, c'est l'ensemble des sections de $\mathscr{G}$ qui proviennent *localement* de sections de $\mathscr{F}$.

Exemples 6.4. 1) Les fonctions différentiables sur une variété différentiable X forment un faisceau de $\mathbf{R}$-algèbres. Si on réfléchit un peu, on se rend compte que l'on peut très bien, même si ce n'est pas l'approche habituelle, *définir* une variété différentiable comme un espace topologique muni d'un faisceau de fonctions localement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ muni du faisceau des fonctions différentiables sur cet ouvert.

2) Soit X une variété algébrique irréductible et soit L un fibré en droites sur X. Toute section s de L non identiquement nulle induit un morphisme de faisceaux

de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\mathscr{O}_X \xrightarrow{s} L$$

qui est injectif. En effet, si U est un ouvert non vide de X et f une fonction régulière sur U telle que la section fs de L sur U soit nulle, alors f est nulle sur l'ouvert dense de U où s ne s'annule pas, donc est nulle.

3) Soit X une variété algébrique et soient $x_1, \dots, x_r$ des points distincts de X. L'évaluation des fonctions régulières en $x_1, \dots, x_r$ est un morphisme de faisceaux de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\mathscr{O}_X \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{k}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}_{x_r}$$

qui est surjectif. On remarquera que les $\text{ev}(U)$ ne forment en général pas un faisceau : si $r = 2$ et $U_i = X \smallsetminus \{x_i\}$, la fonction $X \to \mathbf{k}$ qui vaut 1 en x_1 et 0 ailleurs est dans $\text{ev}(U_1)$ et dans $\text{ev}(U_2)$, mais pas dans $\text{ev}(U_1 \cup U_2)$ lorsque X est projective (puisque les fonctions régulières sur X sont alors constantes par le corollaire 2.38).

Son noyau est un faisceaux d'idéaux de $\mathscr{O}_X$, noté $\mathscr{I}_{x_1,\dots,x_r}$. On dit qu'on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathscr{I}_{x_1,\dots,x_r} \to \mathscr{O}_X \to \mathbf{k}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}_{x_r} \to 0.$$

La suite correspondantes des sections globales

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{I}_{x_1,\dots,x_r}) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}_{x_r}) \simeq \mathbf{k}^r$$

est exacte, mais la flèche de droite n'est pas surjective en général (lorsque X est projective par exemple).

4) L'exemple précédent se généralise ainsi. Soit Y une sous-variété d'une variété X. Les fonctions régulières sur X qui s'annulent sur Y forment un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_X$ noté $\mathscr{I}_Y$ et on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y \to 0.$$

6.5. Faisceaux quotients. La définition du faisceau quotient $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ d'un faisceau $\mathscr{F}$ de groupes abéliens par un faisceau $\mathscr{G}$ de sous-groupes est un peu alambiquée (heureusement, nous nous n'en servirons qu'une fois, ci-dessous). Soit U un ouvert de X ; on peut définir une section de $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ sur U avec le vocabulaire de la définition 5.10 : on dit qu'une famille (U_i, s_i), où (U_i) est un recouvrement ouvert de U et $s_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$, est admissible si

$$s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathscr{G}(U_i \cap U_j)$$

pour tout i et tout j. De telles familles sont équivalentes si leur réunion est encore admissible. Un élément de $(\mathscr{F}/\mathscr{G})(U)$ est alors une classe d'équivalence de familles admissibles. On a bien une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{G} \to 0.$$

Exemple 6.6. Soit X une variété algébrique irréductible. Le groupe des diviseurs de X n'est autre que le groupe des sections du faisceau quotient $\mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*$ (cela résulte de la définition même).

6.7. Définition des variétés algébriques. Le premier service que va nous rendre la théorie des faisceaux est de nous fournir un cadre pour énoncer enfin une définition de la notion de variété algébrique indépendante de tout plongement (dans un espace projectif ou ailleurs).

DÉFINITION 6.8. *Une variété algébrique est un couple formé d'un espace topologique X quasi-compact et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ (le faisceau des* fonctions régulières*) localement isomorphe à une variété affine munie du faisceau de ses fonctions régulières.*

On copie ainsi la définition des variétés différentiables donnée dans l'exemple 1) ci-dessus. Le lecteur intéressé pourra vérifier que les variétés quasi-projectives (c'est-à-dire celles que l'on considérait exclusivement jusqu'à maintenant) sont toujours des variétés dans le nouveau sens. Il faut prendre garde que cette définition, pour séduisante qu'elle soit, permet aussi des objets très étranges, comme par exemple la variété obtenue en identifiant les ouverts $\mathbf{k}^*$ de deux copies de $\mathbf{k}$!

Il faut reconnaître que si cette définition est satisfaisante du point de vue conceptuel, dans la pratique, la plupart des variétés que nous rencontrerons seront de toute façon quasi-projectives.

Étant donnée une variété algébrique $(X, \mathscr{O}_X)$, un *$\mathscr{O}_X$-module* est un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur X tel que pour tout ouvert U, le groupe $\mathscr{F}(U)$ est un $\mathscr{O}_X(U)$-module, avec des propriétés de compatibilité évidentes vis-à-vis des restrictions.

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules, on laisse au lecteur le soin de définir les $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ (simplement noté $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$) et $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

EXEMPLE 6.9. Soit L un fibré en droites sur une variété algébrique X. Le *faisceau $\mathscr{L}$ des sections* de L est un $\mathscr{O}_X$-module *localement libre de rang* 1, c'est-à-dire que X est recouvert par des ouverts affines U sur lesquels $\mathscr{L}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_U$.

6.10. Qu'est-ce qu'un schéma ? Nous avonc tous les ingrédients nécessaires pour définir ces étranges objets, alors profitons-en pour le faire, sans bien sûr couvrir toute la théorie. Nous aurons de toute façon bientôt besoin de la flexibilité qu'elle apporte.

Rappelons que les variétés affines sont en correspondance bijectives avec les $\mathbf{k}$-algèbres de type fini réduites par les opérations

$$V \rightsquigarrow A = \Gamma(V, \mathscr{O}_V) \qquad\qquad A \rightsquigarrow V = \{\text{idéaux maximaux de } A\}.$$

L'idée est d'étendre cette correspondance à tous les anneaux, en attachant à un anneau A l'ensemble $\operatorname{Spec}(A)$ de tous ses idéaux *premiers*, muni de la topologie dont les fermés sont les

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}\ ,$$

pour tout idéal I de A. Attention : non seulement, cette topologie n'est pas séparée, mais il y a en général des points qui ne sont pas fermés ! Plus précisément, le point de $\operatorname{Spec}(A)$ correspondant à un idéal premier de A est fermé si et seulement si cet idéal est maximal.

En particulier, même quand A est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini réduite, l'espace topologique $\operatorname{Spec}(A)$ n'est pas la variété affine V associée à A comme ci-dessus : on a adjoint à X des points non fermés, un pour chaque sous-variété irréductible de X. Le fait d'avoir des points non fermés est un obstacle de nature essentiellement psychologique, amplement compensé par l'unité, la flexibilité et l'efficacité du nouveau point de vue.

On munit $X = \mathrm{Spec}(A)$ d'une structure d'espace annelé de la façon suivante. Les

$$X_f = X \smallsetminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \ ,$$

pour f décrivant A, forment une base d'ouverts de X. On vérifie (ce n'est pas immédiat) qu'on définit un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ sur X en posant [1]

$$\Gamma(X_f, \mathscr{O}_X) = A_f \ ,$$

pour tout f dans A. On copie alors la définition 6.7 : *un schéma est un couple formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ localement isomorphe au spectre d'un anneau muni du faisceau défini ci-dessus.*

Attention : les éléments de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ne peuvent plus être considérés comme des « fonctions » sur le schéma X en un sens naturel, même si on se restreint aux points fermés sur un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$. Tout au plus, on peut dire qu'une section $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ prend ses valeurs dans le corps $A/\mathfrak{m}$ au point fermé $\mathfrak{m}$, mais ce corps peut varier avec le point. Si $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos et A une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini, alors ces corps résiduels sont bien égaux [2] à $\mathbf{k}$ et on est très proche de la situation géométrique habituelle. Cependant, il faut garder dans l'esprit que l'anneau des sections globales de $\mathscr{O}_X$ peut contenir des éléments nilpotents non nuls, qui ne sont alors pas déterminés par leurs « valeurs » aux points fermés.

Avec ce vocabulaire, une variété algébrique est un schéma de type fini sur un corps $\mathbf{k}$ qui est *réduit*, c'est-à-dire localement isomorphe au spectre d'une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini sans éléments nilpotents non nuls.

Remarquons qu'à tout schéma X on peut associer un schéma réduit X_{red} : il suffit de le faire pour un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$, où le schéma réduit associé est simplement le spectre de l'anneau quotient de A par l'idéal des éléments nilpotents.

Exemples 6.11. 1) Soit A l'anneau $\mathbf{k}[\varepsilon]/(\varepsilon^n)$. Son seul idéal premier est l'idéal maximal (ε). Le schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ a un seul point, qui est fermé. Cependant, l'anneau des « fonctions régulières » sur X est l'anneau A, qui contient certainement des éléments nilpotents non nuls.

2) Un sous-schéma fermé d'un schéma X est un schéma Y qui est un sous-ensemble fermé de X tel que l'inclusion $\iota\colon Y \to X$ induise une *surjection* $\mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y$. On peut aussi définir Y par le noyau de cette surjection, qui est un faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_X$ noté $\mathscr{I}_Y$ qui s'insère dans une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathscr{O}_X \to \iota_*\mathscr{O}_Y \to 0$$

(où on laisse souvent tomber le ι_*). Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules, on appelle restriction de $\mathscr{F}$ à Y le faisceau $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_Y$ de $\mathscr{O}_Y$-modules ; nous le noterons parfois $\mathscr{F}|_Y$. Comme le produit tensoriel est exact à droite, on a une suite exacte

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{I}_Y \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}|_Y \to 0$$

dans laquelle la flèche de gauche n'est pas nécessairement injective. Elle l'est cependant lorsque $\mathscr{F}$ est localement libre (*cf.* exemple 6.9).

1. On rappelle que l'anneau A_f est défini comme l'ensemble des « fractions » $\frac{g}{f^p}$ modulo la relation d'équivalence $\frac{g}{f^p} \sim \frac{h}{f^q}$ si et seulement si il existe un entier positif r tel que $f^r(gf^q - hf^p) = 0$.

2. C'est une conséquence d'un théorème de Zariski (qui d'ailleurs entraîne facilement le Nullstellensatz) : si k est un corps algébriquement clos et K une k-algèbre de type fini qui est un corps, on a $K = \mathbf{k}$.

Par exemple, tout idéal I d'un anneau A définit le sous-schéma fermé $V(I)$ de $\mathrm{Spec}(A)$, qui est isomorphe à $\mathrm{Spec}(A/I)$ (en particulier, le « point épais » $\mathrm{Spec}\big(\mathbf{k}[\varepsilon]/(\varepsilon^n)\big)$ considéré ci-dessus est un sous-schéma fermé de la droite affine $\mathrm{Spec}(\mathbf{k}[\varepsilon])$). Réciproquement, on peut montrer que tout sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ est de ce type, mais ce n'est pas facile.

3) La plupart des concepts définis pour les variétés s'étendent aux schémas (avec parfois des difficultés non négligeables). Soit X un schéma. Un diviseur de Cartier *effectif* D sur X est une classe d'équivalence (au même sens que dans la définition 5.10) de familles (U_i, f_i), où f_i est un élément de l'anneau $\mathscr{O}_X(U_i)$ qui n'est pas diviseur de 0, et f_i/f_j est inversible dans $\mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)$. Chaque f_i définit un sous-schéma de U_i ; ces sous-schémas se recollent pour définir un sous-schéma fermé Y de X qui ne dépend que de D (et qui est souvent encore noté D). L'idéal de Y dans X est localement principal : il est engendré sur U_i par f_i. En tant que $\mathscr{O}_X$-module, il est donc localement libre de rang 1 (*cf.* ex. 6.9). Sur chaque ouvert U, une section du fibré en droites $\mathscr{O}_U(-D)$ est une famille (*cf.* p. 52) $s_i \in \mathscr{O}_X(U \cap U_i)$ avec

$$s_j \frac{f_j}{f_i} = s_i$$

ce qui est équivalent, comme f_i n'est pas diviseur de 0, à $s_j f_j = f_i s_i$. On a donc un morphisme de faisceaux

$$\mathscr{O}_X(-D) \to \mathscr{O}_X$$

dont l'image est l'idéal $\mathscr{I}_Y$ et qui est injectif (de nouveau parce que f_i n'est pas diviseur de 0). On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_X(-D) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y \to 0\ . \tag{5}$$

6.2. Cohomologie des faisceaux

Soit X un espace topologique et soit

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \tag{6}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur X. La suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathscr{F}'')$$

est encore exacte, mais $\Gamma(g)$ n'est en général pas surjective, comme on l'a vu dans les exemples ci-dessus.

Nous amettrons que l'on peut définir, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ de groupes abéliens sur X et tout entier $q \geq 0$, des groupes $H^q(X, \mathscr{F})$, avec $H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$, et pour tout morphisme $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X, des morphismes de groupes $H^q(f)\colon H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{G})$, avec $H^0(f) = \Gamma(f)$, de façon que pour toute suite exacte (6) on ait une suite exacte longue

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{H^0(f)} H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow \\ &\qquad H^1(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{H^1(f)} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{H^1(g)} H^1(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

avec des propriétés fonctorielles évidentes.

6.12. Cohomologie de Cech. Plutôt que d'expliquer la construction de ces groupes en général, nous allons détailler une construction analogue, dite cohomologie de Cech.

On se donne un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$, où l'ensemble I est bien ordonné. On définit l'ensemble $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ des q-cochaînes associé comme

$$C^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{i_0<\cdots<i_q} \mathscr{F}(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}) \ ,$$

de sorte que

$$C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_i \mathscr{F}(U_i) \ ,$$
$$C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{i<j} \mathscr{F}(U_i\cap U_j).$$

On définit aussi des opérateurs

$$C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

par les formules

$$\begin{aligned}
\delta^0(s)_{i_0i_1} &= s_{i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}}\\
\delta^1(s)_{i_0i_1i_2} &= s_{i_1i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} - s_{i_0i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} + s_{i_0i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}}\\
&\cdots\\
\delta^q(s)_{i_0\cdots i_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j s_{i_0\cdots\widehat{i_j}\cdots i_{q+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{q+1}}}.
\end{aligned}$$

6.13. On vérifie que l'on obtient bien un complexe $C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ (c'est-à-dire que $\delta^q\circ\delta^{q-1}=0$), dont on note $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ le groupe de cohomologie $\operatorname{Ker}\delta^q/\operatorname{Im}\delta^{q-1}$. Les groupes obtenus dépendent hélas du recouvrement $\mathscr{U}$ choisi. En prenant la limite inductive sur tous les recouvrements (*cf.* [**BT**], p. 112), on définit des groupes $\check{H}^q(X,\mathscr{F})$, dit de cohomologie de Cech.

Exemple 6.14. *Le groupe de Picard d'une variété algébrique X est isomorphe à $\check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^*)$.* En effet, considérons un fibré en droites sur X associé à la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathscr{U}=(U_i)$ de X et de fonctions g_{ij} régulières dans $U_i\cap U_j$ qui ne s'annulent pas. En d'autres termes, g_{ij} est dans $\Gamma(U_{ij},\mathscr{O}_X^*)$ et les $(g_{ij})_{i<j}$ définissent un élément g de $C^1(\mathscr{U},\mathscr{O}_X^*)$. La condition

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki}=1$$

montre que g est dans le noyau de δ^1 donc définit un élément de $\check{H}^1(\mathscr{U},\mathscr{O}_X^*)$, donc de $\check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^*)$, dont on vérifie qu'il ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré. On obtient donc un morphisme de groupes $\varphi\colon \operatorname{Pic}(X)\to\check{H}^1(X,\mathscr{O}_X^*)$ dont le lecteur vérifiera qu'il est bijectif.

Un morphisme $\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X induit des morphismes $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})\to C^q(\mathscr{U},\mathscr{G})$ qui commutent avec les différentielles, donc des morphismes

$$H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})\to H^q(\mathscr{U},\mathscr{G})$$

en cohomologie, et enfin des morphismes

$$\check{H}^q(X,\mathscr{F})\to\check{H}^q(X,\mathscr{G})$$

en cohomologie de Cech.

Ces groupes ne sont les « bons » groupes de cohomologie que sur certains espaces topologiques, par exemple paracompacts séparés, ce qui est bien ennuyeux car la topologie de Zariski n'est pas séparée ! Il existe cependant, pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, des morphismes $H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F})$ qui passent à la limite pour donner un morphisme

$$\check{H}^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F})$$

qui est bijectif pour $q \leq 1$. On a en particulier, pour une suite exacte (6), une suite exacte à six termes en cohomologie de Cech.

Exemple 6.15. Soit X une variété algébrique. Considèrons la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X^* \longrightarrow \mathscr{K}_X^* \longrightarrow \mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Une partie de la suite exacte longue de cohomologie associée s'interprète de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X, \mathscr{O}_X^*) & \longrightarrow & H^0(X, \mathscr{K}_X^*) & \longrightarrow & H^0(X, \mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*) & \longrightarrow & H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \\ & & f & \longmapsto & \operatorname{div}(f) \quad D & \longmapsto & [\mathscr{O}_X(D)] \end{array}$$

6.16. Comment calculer les groupes de cohomologie d'un faisceau ? Puisque la construction de Cech ne donne pas les groupes de cohomologie en degré au moins 2, nous ne sommes pas plus avancés pour calculer ces groupes. Nous verrons par la suite que la cohomologie de Cech permet cependant le calcul de nombreux groupes de cohomologie, même sur un espace non séparé. Cela provient du théorème suivant de Leray.

Théorème 6.17. *Soit X un espace topologique, soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et soit $\mathscr{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de X tel que les groupes de cohomologie $H^p(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}, \mathscr{F})$ soient nuls pour tous $i_1, \ldots, i_k$ et tout $p > 0$. Alors le morphisme*

$$H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F})$$

est bijectif pour tout q.

Nous allons voir que l'hypothèse du théorème de Leray est vérifiée lorsque les ouverts du recouvrement $\mathscr{U}$ sont *affines* et que le faisceau $\mathscr{F}$ a la propriété d'être *cohérent.*

6.3. Faisceaux cohérents

6.18. Qu'est-ce qu'un faisceau cohérent ? Soit X une variété algébrique. Un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules qui est localement de présentation finie, c'est-à-dire que tout point de X a un voisinage U sur lequel il existe une suite exacte

$$\mathscr{O}_U^{\oplus m} \to \mathscr{O}_U^{\oplus n} \to \mathscr{F} \to 0$$

de $\mathscr{O}_U$-modules. Le faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites est cohérent, mais pas $\mathscr{O}_X^*$ (qui n'est pas un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules), ni $\mathscr{K}_X$ (qui est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules, mais pas localement de présentation finie).

6.19. Faisceaux cohérents sur une variété affine. On se place ici sur une variété affine X d'algèbre de fonctions $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Soit f un élément de A ; on rappelle que l'ouvert

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

est affine d'algèbre A_f et que les ouverts de ce type forment une base de la topologie de Zariski de X.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules sur X. Le groupe $\Gamma(X,\mathscr{F})$ de ses sections globales est muni d'une structure de A-module.

THÉORÈME 6.20. *Pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur une variété algébrique affine X et tout fonction régulière f sur X, on a*[3]

$$\Gamma(X_f,\mathscr{F}) \simeq \Gamma(X,\mathscr{F})_f.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que le morphisme de A-modules

$$\begin{array}{cccc} \varphi_f: & \Gamma(X,\mathscr{F})_f & \longrightarrow & \Gamma(X_f,\mathscr{F}) \\ & \dfrac{s}{f^p} & \longmapsto & \dfrac{1}{f^p}s \end{array}$$

est bijectif. L'injectivité de φ_f est équivalente à la propriété suivante :

– si $s \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ est nulle sur X_f, il existe un entier $p \geq 0$ tel que sf^p soit nulle sur X ;

et sa surjectivité à :

– si $s \in \Gamma(X_f,\mathscr{F})$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que sf^p soit restriction d'une section de $\mathscr{F}$ sur X.

LEMME 6.21. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules. S'il existe une suite exacte*

$$\mathscr{O}_X^m \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_X^n \xrightarrow{\beta} \mathscr{F} \to 0 \ ,$$

l'application φ_f est surjective pour tout f.

DÉMONSTRATION. Nous supposerons par simplicité X *irréductible.*

Nous allons d'abord montrer que φ_f est injective. Soit s une section de $\mathscr{F}$ sur X nulle sur X_f. Par définition de la surjectivité de β, sur chaque ouvert affine d'un recouvrement fini de X, la section s est dans l'image de β. Si on montre que sf^p est nul sur chaque ouvert de ce recouvrement, on en déduira que sf^p est nul. Il suffit donc de traiter le cas où s est l'image par β d'une section g de $\mathscr{O}_X^n$ sur X (qui est un n-uplet de fonctions régulières sur X, donc d'éléments de A). Comme l'image de $g|_{X_f}$ par β est nulle, cette section est dans le faisceau image de α sur cet ouvert. De nouveau par définition d'un faisceau image, il existe un recouvrement fini de X_f par des ouverts affines X_{f_i} et des éléments g_i de A^m tels que

$$g|_{X_{f_i}} = \alpha(\frac{g_i}{f_i^p}).$$

Les fonctions régulières composantes de $f_i^p g - \alpha(g_i)$ sont nulles sur l'ouvert X_{f_i} donc sur X puisque X est irréductible.

---

3. Pour tout A-module M, on pose

$$M_f = M \otimes_A A_f = \{\frac{m}{f^p} \mid m \in M, p \geq 0\}/ \sim \ ,$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est définie par $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si et seulement si il existe un entier positif r tel que $f^r(mf^q - m'f^p) = 0$. Ce A- module est nul si et seulement si tout élément de M est annulé par une puissance de f. Lorsque M est un A-module de type fini, c'est le cas si et seulement si une puissance de f annule tous les éléments de M.

Comme les X_{f_i} recouvrent X_f, les f_i^p n'ont pas de zéro commun dans X_f et il existe une partition de l'unité [4] (prop. 1.16), c'est-à-dire des $h_i \in A$ tels que

$$\sum_i f_i^p \frac{h_i}{f^q} = 1 \ ,$$

dans A_f, de sorte que (puisque A est intègre)

$$f^q s = \beta(f^q g) = \beta\big(\sum_i f_i^p h_i g\big) = \beta\big(\sum_i \alpha(g_i) h_i\big) = 0 \ ,$$

ce qui termine la démonstration de l'injectivité de φ_f.

Nous allons maintenant montrer que l'application

$$\Gamma(\beta)\colon A^n \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F})$$

entre sections globales est surjective. Soit $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$; il existe un recouvrement fini de X par des ouverts affines X_{f_i} et des éléments g_i de A^n tels que

$$s|_{X_{f_i}} = \beta(\frac{g_i}{f_i^p}).$$

Les sections $f_i^p s$ et $\beta(g_i)$ de $\mathscr{F}$ coïncident sur X_{f_i} donc, par ce qui précède, il existe un entier q tel que

$$s f_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q).$$

On utilise de nouveau une partition de l'unité

$$\sum_i f_i^{p+q} h_i = 1 \ ,$$

qui donne

$$s = \sum_i f_i^{p+q} h_i s = \sum_i h_i \beta(g_i f_i^q) = \beta\big(\sum_i h_i g_i f_i^q\big) \ ,$$

ce qui montre la surjectivité de $\Gamma(\beta)$.

On en déduit la surjectivité de φ_f en appliquant ce qui précède sur X_f : tout élément de $\Gamma(X_f, \mathscr{F})$ est dans $\beta\big(\Gamma(X_f, \mathscr{O}_{X_f})^n\big) = \beta\big(A_f^n\big)$ donc s'écrit $\beta(\frac{g}{f^p})$, de sorte que la section globale $\beta(g)$ de $\mathscr{F}$ se restreint en sf^p sur X_f. □

Passons maintenant au cas général. On se donne $s \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$ et on suppose $\mathscr{F}$ cohérent, de sorte qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i, qu'on peut supposer affines de type X_{f_i} et en nombre fini, sur lesquels on peut appliquer le cas déjà traité : il existe un entier $p \geq 0$ (le même valable pour tous les i) et $s_i \in \Gamma(X_{f_i}, \mathscr{F})$, tels que

$$sf^p|_{X_f \cap U_i} = s_i|_{X_f \cap U_i}.$$

Les sections s_i et s_j coïncident sur $X_f \cap U_i \cap U_j$ donc, par le cas déjà traité appliqué sur l'ouvert affine $U_i \cap U_j = X_{f_i f_j}$, il existe un entier q positif (le même valable pour tout i et tout j) tel que

$$(s_i - s_j) f^q = 0 \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

La propriété de recollement des sections d'un faisceau entraîne qu'il existe une section $t \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ qui se restreint en $s_i f^q$ sur U_i, donc en sf^{p+q} sur chaque

4. Du point de vue de la théorie des schémas, ce résultat est très simple : dire que les ouverts X_{f_i} recouvrent $X_f = \operatorname{Spec}(A_f)$, c'est dire que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A_f, il existe un f_i qui n'est pas dans $\mathfrak{p}$. L'idéal engendré par les f_i n'est donc contenu dans aucun idéal premier, donc dans aucun idéal maximal : il est égal à A_f.

$X_f \cap U_i$ et la partie unicité de la même propriété entraîne que les sections $t|_{X_f}$ et sf^{p+q} sont égales. Cela montre la surjectivité de φ_f.

Pour l'injectivité, on se donne une section globale s de $\mathscr{F}$ sur X nulle sur X_f. Par le cas déjà traité appliqué sur U_i, il existe un entier $p \geq 0$ (le même pour tous les i) tel que sf^p soit nulle sur chaque U_i, donc sur X. □

On peut interpréter le théorème 6.20 ainsi : un faisceau cohérent sur une variété affine est déterminé par le A-module de ses sections globales.

Inversement, étant donné un A-module M, on définit un faisceau $\tilde{M}$ de $\mathscr{O}_X$-modules en posant, pour tout $f \in A$,

$$\Gamma(X_f, \tilde{M}) = M_f.$$

PROPOSITION 6.22. *On définit ainsi un faisceau $\tilde{M}$ de $\mathscr{O}_X$-modules qui est cohérent lorsque le A-module M est de type fini.*

On a bien sûr $\tilde{A} = \mathscr{O}_X$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier la propriété de recollement sur un recouvrement fini de X par des ouverts X_{f_i}. On se donne donc des éléments $s_i = \frac{m_i}{f_i^p}$ de M_{f_i} (avec le même p pour tout i) qui vérifient $s_i|_{M_{f_i f_j}} = s_j|_{M_{f_i f_j}}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier q tel que

$$(f_i f_j)^q (m_i f_j^p - m_j f_i^p) = 0.$$

Comme les X_{f_i} recouvrent X, il existe une partition de l'unité, c'est-à-dire des $g_j \in A$ tels que

$$\sum_j g_j f_j^{p+q} = 1.$$

On en déduit

$$m_i f_i^q = m_i f_i^q \sum_j g_j f_j^{p+q} = f_i^{p+q} \sum_j m_j f_j^q g_j = f_i^{p+q} m \ ,$$

où l'on a posé $m = \sum_j m_j f_j^q g_j$, donc

$$f_i^q (m_i - f_i^p m) = 0 \ ,$$

de sorte que $m = s_i$ dans M_{f_i}.

Si m' est un autre élément de M qui vérifie la même propriété, il existe un entier q' tel que $f_i^{q'}(m_i - f_i^p m') = 0$ pour tout i. On en déduit $f_i^{p+q+q'}(m - m') = 0$ et on conclut $m = m'$ en utilisant de nouveau une partition de l'unité.

Enfin, lorsque le A-module M est de type fini, il est de présentation finie puisque A est noethérien : il existe des entiers r et s et une suite exacte

$$A^r \to A^s \to M \to 0.$$

L'opération $M \mapsto \tilde{M}$ transforme les suites exactes de A-modules en suites exactes de $\mathscr{O}_X$-modules puisque la localisation préserve l'exactitude. On en déduit que $\tilde{M}$ est cohérent. □

6.23. On tire ici quelques conséquences du théorème 6.20. La première est que si Y est une sous-variété (ou même un sous-schéma) de X, le faisceau d'idéaux associé

$\mathscr{I}_Y$ et le faisceau $\mathscr{O}_Y$ sont cohérents : sur un ouvert affine U d'anneau A sur lequel Y est défini par un idéal I, on a

$$\mathscr{I}_Y|_U = \tilde{I} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}_Y|_U = \widetilde{A/I}.$$

Soit D un diviseur effectif sur X de sous-schéma associé Y (*cf.* exemple 6.11.3)). Si D est défini sur U par l'élément f de A *non diviseur de* 0, la suite exacte (5) correspond à la suite exacte suivante de A-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A \longrightarrow A/fA \to 0.$$

On a aussi les corollaires suivants.

Corollaire 6.24. *Les noyau, image et conoyau d'un morphisme de faisceaux cohérents sur une variété algébrique sont cohérents. Le produit tensoriel de deux faisceaux cohérents est un faisceau cohérent.*

Démonstration. C'est une propriété qu'il suffit de vérifier localement, c'est-à-dire sur une variété affine. Cela résulte alors des propriétés analogues des modules de type fini sur un anneau noethérien. □

Corollaire 6.25. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur une variété algébrique X. Pour* tout *ouvert affine U de X d'algèbre A, il existe un A-module de type fini M tel que $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$. En particulier, il existe une présentation finie*

$$\mathscr{O}_U^m \to \mathscr{O}_U^n \to \mathscr{F}|_U \to 0.$$

6.26. Cohomologie des faisceaux cohérents. Sur une variété affine, les deux constructions $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ et $M \mapsto \tilde{M}$ sont inverses l'une de l'autre ; on a

$$\mathscr{F} \simeq \widetilde{\Gamma(X, \mathscr{F})} \qquad\qquad \Gamma(X, \tilde{M}) \simeq M$$

pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ (le premier isomorphisme est conséquence du théorème 6.20, le second résulte de la définition de $\tilde{M}$).

On en déduit que si

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux cohérents sur une variété affine X, la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

est encore exacte.

En effet, soit N l'image de $\Gamma(g)$. On déduit de la suite exacte de A-modules de type fini

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}') \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to N \to 0$$

une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \widetilde{\Gamma(X, \mathscr{F}')} \to \widetilde{\Gamma(X, \mathscr{F})} \to \tilde{N} \to 0.$$

Comme $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}$ sont cohérents, les deux premiers termes de la suite sont respectivement $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}$, de sorte que $\tilde{N}$ est isomorphe à $\mathscr{F}''$. Les A-modules de sections globales N et $\Gamma(X, \mathscr{F}'')$ sont donc identiques et $\Gamma(g)$ est surjective.

Cela laisse suspecter que le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathscr{F}')$ est nul, ce que nous allons effectivement prouver à l'aide de la cohomologie de Cech.

PROPOSITION 6.27. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur une variété algébrique X et soit $\mathscr{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines du type X_f. On a*

$$H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) = 0.$$

En particulier, $\check{H}^1(X,\mathscr{F}) = 0$.

On peut montrer que tous les groupes de cohomologie de Cech en degré strictement positif sont nuls, mais cela n'est pas très utile car ce ne sont pas les ≪ bons ≫ groupes de cohomologie.

DÉMONSTRATION. Soit A l'algèbre des fonctions de X et soit M le A-module $\Gamma(X,\mathscr{F})$. On se donne un recouvrement fini de X par des ouverts X_{f_i} et une 1-cochaîne $(s_{ij}) \in \prod_{i<j} M_{f_i f_j}$ qui s'écrit

$$s_{ij} = \frac{m_{ij}}{f_i^p f_j^p} \qquad \text{avec } \ m_{ij} \in M \ .$$

La condition $\delta^1((s_{ij})) = 0$ s'écrit

$$s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij} = 0$$

dans $M_{f_i f_j f_k}$. Il existe donc un entier positif q tel que

$$(f_i f_j f_k)^q (f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij}) = 0$$

dans M. On en déduit

$$f_k^{p+q} s_{ij} = \frac{m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \frac{m_{jk} f_k^q}{f_j^p}$$

dans $M_{f_i f_j}$. On introduit comme d'habitude une partition de l'unité $\sum_k g_k f_k^{p+q} = 1$; on a alors

$$s_{ij} = \sum_k g_k f_k^{p+q} s_{ij} = \frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \frac{\sum_k g_k m_{jk} f_k^q}{f_j^p} = s_j - s_i$$

dans $M_{f_i f_j}$, où

$$s_i = -\frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p}.$$

Ceci montre que (s_{ij}) est dans l'image de δ^0, donc que le groupe $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ est nul. □

Nous admettrons sans démonstration le résultat suivant.

THÉORÈME 6.28. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur une variété affine X. On a*

$$H^q(X,\mathscr{F}) = 0$$

pour tout $q > 0$.

Pour appliquer le théorème de Leray en vue de calculer les groupes de cohomologie d'un faisceau cohérent sur une variété algébrique générale, il faut encore vérifier que l'intersection de deux ouverts affines reste affine. C'est vrai pour les variétés quasi-projectives, mais plus en général pour les variétés algébriques définies en 6.7 (par exemple pour la variété étrange considérée en 6.7), ni *a fortiori* pour les schémas. Soient U et V des ouverts d'une variété X. Si Δ désigne la diagonale de X dans $X \times X$, on a

$$U \cap V \simeq (U \times V) \cap \Delta.$$

Si Δ est fermée dans $X \times X$ (on dit que la variété X est *séparée*[5]), $U \cap V$ est isomorphe à un fermé dans une variété affine, donc est affine. Cette propriété est tellement essentielle que dans toute la suite, *nous supposerons toujours les variétés séparées.*

THÉORÈME 6.29. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur une variété algébrique (séparée) X et soit $\mathscr{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. On a*

$$H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \simeq H^q(X, \mathscr{F})$$

pour tout entier q.

COROLLAIRE 6.30. *Soit X une variété algébrique (séparée) et soit Y une sous-variété de X. Notons $u\colon Y \to X$ l'inclusion. Pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur Y, le faisceau $u_*\mathscr{F}$ est cohérent sur X et l'on a*

$$H^q(X, u_*\mathscr{F}) \simeq H^q(Y, \mathscr{F})$$

pour tout entier q.

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert affine de X, soit A l'algèbre des fonctions régulières sur U, soit I l'idéal définissant $U \cap Y$ dans U et soit M le (A/I)-module $\Gamma(U \cap Y, \mathscr{F})$. On a par définition, pour tout f dans A,

$$\Gamma(U_f, u_*\mathscr{F}) = \Gamma(U_f \cap Y, \mathscr{F}) = M_f.$$

Cela signifie que $u_*\mathscr{F}|_U$ est le faisceau cohérent associé à M, vu comme A-module (de type fini). En particulier, $u_*\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent sur X.

Soit $\mathscr{U} = (U_i)$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Les ouverts affines $V_i = U_i \cap Y$ forment un recouvrement $\mathscr{V}$ de Y. Il suffit donc de montrer par le corollaire que les groupes de cohomologie $H^q(\mathscr{U}, u_*\mathscr{F})$ et $H^q(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ sont isomorphes. Or il ressort de ce qui précède que les restrictions

$$C^q(\mathscr{U}, u_*\mathscr{F}) \to C^q(\mathscr{V}, \mathscr{F})$$

sont des isomorphismes, donc induisent des isomorphismes en cohomologie. $\square$

COROLLAIRE 6.31. *Soit X une variété et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. On a*

$$H^q(X, \mathscr{F}) = 0$$

pour tout $q > \dim(X)$.

Ce résultat reste vrai[6] pour tout faisceau de groupes abéliens.

DÉMONSTRATION. Ce résultat provient du fait que toute variété de dimension n est réunion de $n+1$ ouverts affines, de sorte que pour le revêtement $\mathscr{U}$ correspondant, on a $C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = 0$ pour $q > n$, donc aussi $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$.

Nous ne le démontrerons que lorsque X est projective, donc contenue comme sous-ensemble fermé d'un espace projectif $\mathbf{P}^N$. Il existe un sous-espace linéaire L

5. Attention ! Ce n'est pas la même notion que celle d'espace topologique séparé.

6. Comme d'habitude, il s'agit de faisceaux pour la topologie de Zariski ; pour la topologie usuelle sur une variété complexe de dimension n, la cohomologie du faisceau constant $\mathbf{Z}$ ne s'annule en général qu'en degré $> 2n$, alors qu'elle est nulle en degré > 0 pour la topologie de Zariski.

de $\mathbf{P}^N$ de dimension $N-n-1$ disjoint de X (cor. 3.14). Si L est défini par les équations homogènes

$$T_0 = \cdots = T_n = 0 \ ,$$

X est contenue dans la réunion des ouverts standard $U_0, \ldots, U_n$, et chaque $U_i \cap X$ est affine. □

6.4. Cohomologie des faisceaux cohérents sur une variété projective

Nous allons démontrer des théorèmes d'annulation et de finitude portant sur les groupes de cohomologie des faisceaux cohérents sur une variété projective. Nous supposerons dans tout ce paragraphe que les variétés sont quasi-projectives, c'est-à-dire localement fermées dans un espace projectif défini sur un corps $\mathbf{k}$ (pas nécessairement algébriquement clos).

DÉFINITION 6.32. *Soit X une variété. On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est* engendré par ses sections globales *s'il existe un ensemble I et une surjection*

$$\mathscr{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \mathscr{F}$$

de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que $\mathscr{F}$ est engendré par un nombre fini de sections globales *si on peut prendre l'ensemble I fini.*

Un morphisme $\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_X$-modules correspond à une section globale de $\mathscr{F}$, d'où la terminologie. Remarquons que le produit tensoriel de deux $\mathscr{O}_X$-modules engendrés par (un nombre fini de) ses sections globales a la même propriété.

Tout faisceau cohérent sur une variété affine est engendré par un nombre fini de sections globales, mais la situation est très différente sur les variétés projectives.

6.33. Faisceaux inversibles. Soit L un fibré en droites sur une variété X et soit $\mathscr{L}$ le faisceau de ses sections. Il est *localement libre*, c'est-à-dire que X est recouvert par des ouverts U sur lesquels $\mathscr{L}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_U$. Inversement, on vérifie que tout faisceau de ce type est le faisceau des sections d'un fibré en droites. Dans la pratique, d'ailleurs, on confond presque toujours L et $\mathscr{L}$ (bien qu'il s'agisse de deux objets très différents, cela ne pose en général pas de problème). On dit aussi de $\mathscr{L}$ que c'est un *faisceau inversible*, car le faisceau dual

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$$

(qui est le faisceau des sections du fibré en droites dual L^* défini p. 52) vérifie

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^* \simeq \mathscr{O}_X.$$

Supposons le morphisme

$$\mathscr{O}_X^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathscr{L}$$

associé à des sections $s_0, \ldots, s_n$ de L surjectif. La variété X est recouverte par des ouverts affines U d'algèbre A sur lesquels L est trivial et le morphisme $A^{n+1} \to A$ défini par $s_0, \ldots, s_n$ est surjectif. Ceci signifie que l'idéal engendré par $s_0, \ldots, s_n$ est A, donc que les U_{s_j} recouvrent U. En d'autres termes, $s_0, \ldots, s_n$ n'ont pas de zéro commun. On peut leur associer comme en 5.5 une application régulière $u \colon X \to \mathbf{P}^n$ telle que

$$L \simeq u^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1).$$

Inversement, s'il existe une telle application régulière, le faisceau $\mathscr{L}$ est engendré par ses sections globales.

On note encore $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ le faisceau des sections du fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ sur $\mathbf{P}^n$ défini dans l'exemple 5.4. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}$-modules ; pour tout entier m, on note $\mathscr{F}(m)$ le $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}$-module $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(m)$.

THÉORÈME 6.34. *Soit X une sous-variété de l'espace projectif et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe un entier m_0 tel que, pour tout $m \geq m_0$, le faisceau $\mathscr{F}(m)$ soit engendré par un nombre fini de sections globales, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme surjectif*

$$\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F}$$

de $\mathscr{O}_X$-modules.

Ce théorème est fondamental. Nous allons en expliquer quelques conséquences avant de le démontrer.

COROLLAIRE 6.35. *Soit X une variété* projective *et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $H^q(X, \mathscr{F})$ sont de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. On peut par le corollaire 6.30 supposer $X = \mathbf{P}^n$. La conclusion du corollaire est vraie pour $q > n$ par le corollaire 6.31. Procédons par récurrence descendante sur q. Le théorème entraîne qu'il existe un entier m et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-m)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

de faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}^n$. Les espaces vectoriels $H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_X(-m))$ se calculent « à la main » et sont tous de dimension finie. La suite exacte

$$H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_X(-m)) \longrightarrow H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbf{P}^n, \mathscr{G})$$

permet de conclure. □

COROLLAIRE 6.36. *Soit X une sous-variété de l'espace projectif et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe un entier m_0 tel que, pour tout $q > 0$ et tout $m \geq m_0$, les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $H^q(X, \mathscr{F}(m))$ sont nuls.*

DÉMONSTRATION. On peut de nouveau supposer $X = \mathbf{P}^n$. La conclusion est encore vraie pour $q > n$ par le corollaire 6.31, et on procède de nouveau par récurrence descendante sur q. Il existe un entier m_1 et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-m_1)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte

$$H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(m - m_1)) \longrightarrow H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{F}(m)) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbf{P}^n, \mathscr{G}(m)).$$

Le calcul direct montre que $H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(m - m_1))$ est nul pour $m > m_1$ et $q > 0$, ce qui permet de conclure. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On peut par le corollaire 6.30 supposer $X = \mathbf{P}^n$. La restriction de $\mathscr{F}$ à chaque ouvert affine standard U_i est engendrée par un nombre fini de sections s_{ik}. Nous allons montrer que $s_{ik} x_i^m$ se prolonge pour m assez grand en une section t_{ik} de $\mathscr{F}(m)$. Soit donc $s \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$. Par ce qu'on a vu dans le cas affine, pour tout j,

$$x_i^m s|_{U_i \cap U_j}$$

se prolonge en une section t_j sur U_j pour m assez grand. On a alors

$$t_j|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = t_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

donc, quitte de nouveau à multiplier par une puissance de x_i,

$$t_j|_{U_j \cap U_k} = t_k|_{U_j \cap U_k}.$$

Ceci signifie que les t_j se recollent en une section t de $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{P}^n$ qui étend $x_i^m s$.

On obtient ainsi des sections t_{ik} de $\mathscr{F}(m)$ sur $\mathbf{P}^n$ qui engendrent $\mathscr{F}(m)$ sur chaque U_i donc sur $\mathbf{P}^n$. □

6.5. Faisceaux inversibles amples et très amples

Définition 6.37. *Soit X une variété.*

– *Un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est* ample *si, pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X, le faisceau $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales pour tout m assez grand.*
– *Un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est* très ample *s'il existe une application régulière $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ qui réalise un isomorphisme entre X et une sous-variété (fermée) de $\mathbf{P}^n$ pour laquelle $\mathscr{L} \simeq u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$.*

Le corollaire 6.30 entraîne que la restriction d'un faisceau ample à une sous-variété est encore ample [7].

Avec notre définition (qui diffère de celle de [**Ha**], II, §5, p. 120), s'il existe un faisceau inversible très ample sur une variété, celle-ci est projective. Un faisceau inversible très ample est engendré par (un nombre fini de) ses sections globales ; celles-ci définissent une application régulière de X vers un espace projectif qui induit un isomorphisme entre X et son image. On peut prendre cette description « géométrique » comme définition des faisceaux inversibles très amples.

Le théorème 6.34 dit qu'un faisceau inversible très ample sur une variété projective est ample. La réciproque est en général fausse, mais il existe un lien très étroit entre les deux notions ; la notion d'amplitude est beaucoup plus maniable, tandis que les faisceaux inversibles très amples sont intéressants puisqu'ils permettent de construire des plongements dans un espace projectif.

Exemples 6.38. 1) Nous avons vu dans l'exemple 5.16.2) que tout faisceau inversible sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ est du type $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ est très ample par définition, ainsi que chaque $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ avec $d > 0$, puisque c'est l'image inverse de $\mathscr{O}(1)$ par le plongement de Veronese (*cf.* ex. 2.21.2))

$$\nu_d\colon \mathbf{P}^n \hookrightarrow \mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}.$$

En revanche, un faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ avec $d \geq 0$ n'est pas ample puisqu'aucune puissance tensorielle n'a de section globale non constante. On a donc

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \;\text{ ample } \iff \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \;\text{ très ample } \iff d > 0.$$

2) Nous avons vu dans l'exemple 5.16.4) que tout faisceau inversible sur l'espace projectif $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ est du type $p_1^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^m}(a) \otimes p_2^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(b)$; on le note $\mathscr{O}(a,b)$. Le

7. Si u est l'inclusion d'une sous-variété Y dans X et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur Y, le faisceau $u_*\mathscr{F}$ est cohérent sur X et, pour m assez grand, il existe une surjection $\mathscr{O}_X^{\oplus I} \to u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$. En la tensorisant par $\mathscr{O}_Y$, on obtient une surjection $\mathscr{O}_Y^{\oplus I} \to u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L} \otimes^{\otimes m} \mathscr{O}_Y$. Il s'agit maintenant de remarquer que le $\mathscr{O}_Y$-module $u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{O}_Y$ est isomorphe à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} (\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{O}_Y)$; on peut se placer pour cela sur un ouvert affine d'algèbre A, sur lequel Y est d'idéal I, le faisceau $\mathscr{F}$ est associé à un (A/I)-module M et le faisceau $\mathscr{L}^{\otimes m}$ à un A-module L. Le faisceau cohérent $u_*\mathscr{F}$ est associé au A-module M, et $u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{O}_Y$ au (A/I)-module $(M \otimes_A L) \otimes_A (A/I)$, qui n'est autre que $M \otimes_{A/I} (L \otimes_A (A/I))$.

faisceau de type $\mathscr{O}(1,1)$ est très ample puisque c'est l'image inverse de $\mathscr{O}(1)$ par le plongement de Segre (*cf.* § 2.7)

$$\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \hookrightarrow \mathbf{P}^{(m+1)(n+1)-1}.$$

Il en est de même pour le faisceau $\mathscr{O}(a,b)$ avec a et b strictement positifs : il suffit de composer les plongements de Veronese (ν_a, ν_b) avec le plongement de Segre. En revanche, comme $\mathscr{O}(a,b)$ se restreint en $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$ sur $\mathbf{P}^m \times \{x\}$, il ne peut être ample par l'exemple précédent dès que a est négatif. On a donc

$$\mathscr{O}(a,b) \text{ ample } \iff \mathscr{O}(a,b) \text{ très ample } \iff a > 0 \text{ et } b > 0.$$

PROPOSITION 6.39. *Soit X une variété et soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ des faisceaux inversibles sur X.*

a) Soit r un entier strictement positif ; pour que $\mathscr{L}$ soit ample, il faut et il suffit que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ le soit.
b) Si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont amples, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ l'est aussi.
c) Si $\mathscr{M}$ est ample, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ est ample pour tout entier r assez grand.

DÉMONSTRATION. Si $\mathscr{L}$ est ample, il est clair que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ l'est aussi. Inversement, supposons $\mathscr{L}^{\otimes r}$ ample. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour chaque $0 \le s < r$, le faisceau

$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathscr{L}^{\otimes r})^{\otimes m}$$

est engendré par ses sections globales pour tout $m \ge m_s$. Pour

$$m \ge r \max(m_0, \ldots, m_{r-1}) \ ,$$

le faisceau $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales, ce qui prouve a).

Supposons $\mathscr{L}$ ample et $\mathscr{M}$ engendré par ses sections globales. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout m assez grand, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales, donc aussi $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}$, ce qui prouve que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est ample.

Supposons $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ amples. Le faisceau $\mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales pour m assez grand ; comme $\mathscr{M}^{\otimes m}$ est ample par a), le faisceau $\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}$ est ample par ce qui précède, donc $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est ample par a). Ceci prouve b).

Supposons $\mathscr{M}$ ample. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout entier r assez grand, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ est engendré par ses sections globales, donc aussi

$$\mathscr{F} \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)})^{\otimes m} \simeq (\mathscr{F} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}) \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r})^{\otimes m}$$

pour tout m assez grand par amplitude de $\mathscr{M}$. Ceci prouve que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)}$ est ample, d'où c). □

EXEMPLE 6.40. Soit X la cubique plane lisse d'équation homogène $T_1^2 T_2 = T_0^3 - T_0 T_2^2$ étudiée dans l'exemple 5.20.3) et soit P_0 le point d'inflexion $(0,1,0)$. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ se restreint à X en $\mathscr{O}_X(3P_0)$, qui est donc très ample, donc ample. Le a) de la proposition montre que le faisceau $\mathscr{O}_X(P_0)$ est ample. Il n'est pourtant pas très ample, car il n'est pas engendré par ses sections globales s'il l'était, le point P_0 serait linéairement équivalent à un autre point et X serait isomorphe à $\mathbf{P}^1$ (*cf.* exemple 5.20.1)).

C'est une conséquence du critère de Nakai-Moishezon (th. 7.17) qu'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur une courbe projective est ample si et seulement si son degré est strictement positif.

THÉORÈME 6.41. *Soit X une variété projective. Pour qu'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X soit ample, il faut et il suffit que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ soit très ample pour un entier $r > 0$.*

On peut montrer que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ est très ample pour tout entier r assez grand (*cf.* exerc. 8.5).

DÉMONSTRATION. Si $\mathscr{L}^{\otimes r}$ est très ample, il est ample par le théorème 6.34, donc aussi $\mathscr{L}$ par la proposition 6.39.a).

Supposons inversement $\mathscr{L}$ ample. Soit x_0 un point de X et soit V un voisinage affine de x_0 dans X sur lequel $\mathscr{L}$ est localement libre. Soit Y le complémentaire de V dans X et soit $\mathscr{I}_Y$ le faisceau des fonctions régulières nulles sur Y (*cf.* ex. 6.11.2)). Il existe un entier positif m tel que le faisceau $\mathscr{I}_Y \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ soit engendré par ses sections globales. Comme c'est un sous-faisceau de $\mathscr{L}^{\otimes m}$, ses sections peuvent être vues comme les sections de $\mathscr{L}^{\otimes m}$ nulles sur Y, et il en existe donc une, s, qui ne s'annule pas en x_0. L'ensemble

$$V_s = \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}$$

est contenu dans V. Comme $\mathscr{L}$ est trivial sur V, la section s peuvent y être vue comme une fonction régulière, de sorte que V_s est un ouvert affine contenant x_0.

On recouvre X par un nombre fini de ces ouverts. Quitte à remplacer s par une puissance, on peut supposer que l'entier m est le même pour tous ces ouverts ; en remplaçant $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes m}$, on peut supposer $m = 1$. On a donc des sections $s_1, \dots, s_p$ de $\mathscr{L}$ telles que les $V_i = \{x \in X \mid s_i(x) \neq 0\}$ soient des ouverts affines qui recouvrent X. En particulier, $s_1, \dots, s_p$ n'ont pas de zéro commun. Soient f_{ij} des générateurs (en nombre fini) de la $\mathbf{k}$-algèbre des fonctions régulières sur V_i. La même démonstration que celle du théorème 6.34 montre qu'il existe un entier r tel que $s_i^r f_{ij}$ se prolonge en une section s_{ij} de $\mathscr{L}^{\otimes r}$ sur X. Les sections s_i^r, s_{ij} de $\mathscr{L}^{\otimes r}$ n'ont *a fortiori* pas de zéro commun et définissent donc une application régulière

$$u \colon X \to \mathbf{P}^N.$$

Soit U_i l'ouvert standard correspondant à la coordonnée s_i^r ; les ouverts $U_1, \dots, U_p$ recouvrent la sous-variété $u(X)$ et $u^{-1}(U_i) = V_i$. De plus, à l'application régulière induite $u_i \colon V_i \to U_i$ correspond par construction une surjection $u_i^* \colon A(U_i) \to A(V_i)$, de sorte que u_i induit un isomorphisme de V_i sur son image (*cf.* rem. 1.22). Il s'ensuit que u est un isomorphisme sur son image, donc $\mathscr{L}^{\otimes r}$ est très ample. □

6.42. Une caractérisation cohomologique des faisceaux amples.

Pour tout point x d'une variété X définie sur un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$, notons $\mathbf{k}_x$ le faisceau gratte-ciel associé au corps $\mathbf{k}$ concentré en x (*cf.* ex. 6.2.2) et 6.11.2)). C'est un faisceau cohérent.

THÉORÈME 6.43. *Soit X une variété projective et soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) le faisceau $\mathscr{L}$ est ample ;

(ii) pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, on a $H^q(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ pour tout entier m assez grand et tout entier $q > 0$;

(iii) pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, on a $H^1(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ pour tout entier m assez grand.

Démonstration. Supposons $\mathscr{L}$ ample. Le théorème précédent entraîne que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ est très ample pour un certain entier $r > 0$. Pour chaque $0 \leq s < r$, le corollaire 6.36 donne

$$H^q(X, (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathscr{L}^{\otimes r})^{\otimes m}) = 0$$

pour tout $m \geq m_s$. Pour

$$m \geq r \max(m_0, \ldots, m_{r-1}) \ ,$$

on a $H^q(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$. Ceci prouve que (i) entraîne (ii), qui entraîne (iii) trivialement.

Supposons la condition (iii) réalisée. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X, soit x un point de X et soit $\mathscr{F}'$ le noyau de la surjection

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathbf{k}_x$$

de $\mathscr{O}_X$-modules. Comme le faisceau $\mathscr{G}$ est cohérent (cor. 6.24), il existe un entier m_0 tel que

$$H^1(X, \mathscr{F}' \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$$

pour tout $m \geq m_0$. Comme la suite

$$0 \to \mathscr{F}' \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathbf{k}_x \to 0$$

est exacte, la restriction

$$\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \to \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathbf{k}_x)$$

est surjective. On notera que l'entier m_0 peut dépendre de $\mathscr{F}$ et de x.

Lemme 6.44. *Soit X une variété, soit x un point de X et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X tel que la restriction*

$$\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathbf{k}_x)$$

soit surjective. Il existe un voisinage de x dans X sur lequel $\mathscr{F}$ est engendré par un nombre fini de sections globales.

Démonstration. Soient $s_1, \ldots, s_r$ des sections globales de $\mathscr{F}$ dont les images engendrent le $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathbf{k}_x)$. Elles définissent une suite exacte

$$\mathscr{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

et $\mathscr{F}'' \otimes \mathbf{k}_x = 0$. Plaçons-nous sur un voisinage affine U de x d'algèbre A. Le faisceau cohérent $\mathscr{F}''$ correspond à un A-module N de type fini vérifiant $N \otimes_A (A/\mathfrak{m}_x) = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}_x N = N$. Le lemme de Nakayama appliqué dans l'anneau local $A_{\mathfrak{m}_x}$ entraîne $N_{\mathfrak{m}_x} = 0$, de sorte qu'il existe (*cf.* note 3) $f \notin \mathfrak{m}_x$ tel que $fN = 0$. Cela signifie que $\mathscr{F}''$ est nul sur le voisinage U_f de x, c'est-à-dire que les sections $s_1, \ldots, s_r$ engendrent $\mathscr{F}$ sur cet ouvert. $\square$

Pour chaque $m \geq m_0$, il existe donc un voisinage $U_{\mathscr{F},m}$ de x dans X sur lequel $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales. En particulier, il existe un entier m_1 tel que $\mathscr{L}^{\otimes m_1}$ soit engendré par ses sections globales sur $U_{\mathscr{O}_X,m_1}$. Pour tout $m \geq m_0$, le faisceau $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales sur

$$U_x = U_{\mathscr{O}_X,m_1} \cap U_{\mathscr{F},m_0} \cap U_{\mathscr{F},m_0+1} \cap \cdots \cap U_{\mathscr{F},m_0+m_1-1}$$

puisqu'il peut s'écrire

$$(\mathscr{L}^{\otimes m_1})^{\otimes r} \otimes (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m_0+s})$$

avec $r \geq 0$ et $0 \leq s < m_1$. On recouvre X par un nombre fini de ces ouverts U_x et on prend le plus grand entier m_0 correspondant. Cela montre que $\mathscr{L}$ est ample et termine la démonstration du théorème. $\square$

Remarque 6.45. Soient X et Y des variétés projectives, soit $u\colon X \to Y$ une application régulière et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Nous admettrons que dans cette situation, *le faisceau $u_*\mathscr{F}$ est cohérent.*

Supposons de plus que toutes les fibres sont u sont finies (on dit que u est finie) ; nous admettrons de nouveau que *l'image réciproque par u de tout ouvert affine de Y est un ouvert affine de X*. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement de Y par des ouverts affines, $u^{-1}(\mathscr{U})$ est alors un recouvrement de X par des ouverts affines et par définition de $u_*\mathscr{F}$, les complexes de cochaînes associés sont isomorphes. On en déduit

$$H^q(X, \mathscr{F}) \simeq H^q(Y, u_*\mathscr{F}).$$

Soit maintenant $\mathscr{L}$ un faisceau inversible ample sur Y. On a

$$u_*(\mathscr{F} \otimes u^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \simeq u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$$

donc, par ce qui précède,

$$H^1(X, \mathscr{F} \otimes u^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \simeq H^1(Y, u_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}).$$

Comme $u_*\mathscr{F}$ est cohérent et que $\mathscr{L}$ est ample, le membre de droite est nul pour tout m assez grand par le théorème 6.43, donc aussi le membre de gauche, ce qui prouve, par le même théorème, que *le faisceau inversible $u^*\mathscr{L}$ est ample.*

CHAPITRE 7

Nombres d'intersection

7.1. Définition

Nous allons définir le nombre d'intersection

$$\mathscr{L}^d \cdot Y$$

d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur une variété projective X avec une sous-variété Y de X de dimension d. On généralise ainsi la définition 5.21 qui s'applique au cas $d = 1$.

7.1. Support d'un faisceau. Soit X une variété et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module. L'ensemble

$$\{x \in X \mid \mathscr{F} \ \text{ est nul au voisinage de } \ x\}$$

est un ouvert de X dont on note $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ le complémentaire, appelé *support* de $\mathscr{F}$.

Lemme 7.2. *Soit X une sous-variété de l'espace projectif et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe une forme linéaire ℓ qui définit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\cdot \ell} \mathscr{F}(1) \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

de faisceaux cohérents sur X pour laquelle

$$\dim(\operatorname{Supp}(\mathscr{F}') \cup \operatorname{Supp}(\mathscr{F}'')) < \dim(\operatorname{Supp}(\mathscr{F})).$$

Démonstration. Soient $X_1, \dots, X_r$ les composantes irréductibles du support de $\mathscr{F}$ et soit ℓ une forme linéaire définissant un hyperplan ne contenant aucun X_i. Soit A l'algèbre des fonctions d'un ouvert affine U de X et soit M le A-module $\Gamma(U, \mathscr{F})$. La forme linéaire ℓ est une unité dans A_ℓ, donc la multiplication par ℓ est bijective dans M_ℓ. Cela signife que sur l'ouvert U_ℓ, la multiplication

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\cdot \ell} \mathscr{F}(1)$$

est bijective. Les supports de son noyau et de son conoyau sont donc contenus dans l'hyperplan $\ell = 0$. $\square$

Soit X une variété projective et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Par les corollaires 6.35 et 6.31, on sait que les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $H^q(X, \mathscr{F})$ sont de dimension finie et nuls pour $q > \dim(X)$. On note habituellement $h^q(X, \mathscr{F})$ leur dimension et

$$\chi(X, \mathscr{F}) = \sum_q (-1)^q h^q(X, \mathscr{F}).$$

On appelle cet entier la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de $\mathscr{F}$. Sa propriété essentielle est que pour toute suite exacte

$$0 \to \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_1 \to \cdots \to \mathscr{F}_r \to 0 \ ,$$

de faisceaux cohérents sur X, on a

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\chi(X,\mathscr{F}_i)=0.$$

Théorème 7.3. *Soit X une variété projective, soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. Il existe un polynôme P de degré au plus la dimension de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *tel que pour tout entier m, on ait*

$$P(m)=\chi(X,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes m}).$$

Démonstration. Commençons par un cas particulier, qui n'est pas nécessaire au traitement du cas général, mais qui permet de mieux appréhender l'idée de la démonstration.

Cas où $\mathscr{L}$ est très ample. On peut comme d'habitude supposer $X=\mathbf{P}^n$ et $\mathscr{L}=\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$, et on procède par récurrence sur la dimension du support de $\mathscr{F}$. Si on tensorise (on dit aussi souvent « tord ») la suite exacte du lemme 7.2 par le faisceau localement libre $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(m)$, on obtient la suite exacte

$$0\longrightarrow\mathscr{F}'(m)\longrightarrow\mathscr{F}(m)\xrightarrow{\cdot\ell}\mathscr{F}(m+1)\longrightarrow\mathscr{F}''(m)\longrightarrow 0\ ,$$

d'où

$$\chi(X,\mathscr{F}(m+1))-\chi(X,\mathscr{F}(m))=\chi(X,\mathscr{F}''(m))-\chi(X,\mathscr{F}'(m)).$$

Par hypothèse de récurrence, le membre de droite est un polynôme en m de degré strictement inférieur à la dimension du support de $\mathscr{F}$. Le théorème résulte du lemme suivant.

Soit $f\colon\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ une fonction ; on note

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n).$$

On dit que f est *polynomiale de degré au plus d* s'il existe un polynôme $P\in\mathbf{Q}[T]$ de degré au plus d tel que $f(n)=P(n)$ pour tout entier n.

Lemme 7.4. *Soit d un entier.*

a) Pour qu'un polynôme $P\in\mathbf{Q}[T]$ de degré d prenne des valeurs entières sur tous les entiers assez grands, il faut et il suffit qu'il existe des entiers $c_0,\dots,c_d$ tels que

$$P(T)=c_d\binom{T}{d}+c_{d-1}\binom{T}{d-1}+\cdots+c_0.$$

b) Une fonction $f\colon\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ telle que Δf soit polynomiale de degré au plus d est polynomiale de degré au plus $d+1$.

Démonstration. Si P s'écrit sous cette forme, il est clair qu'il prend des valeurs entières sur *tous* les entiers.

Inversement, supposons que P prenne des valeurs entières sur tous les entiers assez grands. On procède par récurrence sur d. On peut toujours écrire P sous la forme cherchée avec des *rationnels* $c_0,\dots,c_d$ *uniquement déterminés.* Le polynôme

$$Q(T)=P(T+1)-P(T)=c_d\binom{T}{d-1}+c_{d-1}\binom{T}{d-2}+\cdots+c_1$$

prend des valeurs entières sur tous les entiers assez grands, de sorte que l'hypothèse de récurrence entraîne que $c_1,\dots,c_d$ sont entiers. Mais

$$c_0=P(n)-c_d\binom{T}{d}-\cdots-c_1\binom{T}{1}$$

est aussi entier, ce qui montre a).

Soit $P \in \mathbf{Q}[T]$ un polynôme de degré au plus d tel que $\Delta f = P$. On écrit

$$P(T) = c_d \binom{T}{d} + c_{d-1} \binom{T}{d-1} + \cdots + c_0 \ ,$$

avec $c_0, \ldots, c_d$ entiers. Le polynôme

$$R(T) = c_d \binom{T}{d+1} + c_{d-1} \binom{T}{d} + \cdots + c_0 \binom{T}{1}$$

est de degré au plus $d+1$ et vérifie $\Delta(f-R) = 0$, de sorte que la fonction $f - R$ est constante, ce qui montre b). $\square$

Cas général. On procède de nouveau par récurrence sur la dimension du support de $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible très ample sur X. On démontre en exercice (exerc. 8.5) que pour r assez grand, les faisceaux inversibles $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ et $\mathscr{L}_2 = \mathscr{M}^{\otimes r}$ sont très amples. On en déduit, par le lemme 7.2, des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'_j \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_j \longrightarrow \mathscr{F}''_j \longrightarrow 0$$

pour $j = 1, 2$. Notons pour simplifier $\mathscr{L}^m$ au lieu de $\mathscr{L}^{\otimes m}$. En tensorisant la suite exacte pour $j = 1$ par $\mathscr{L}^m$ et celle pour $j = 2$ par $\mathscr{L}^{m+1}$, on obtient les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathscr{F}'_1 \otimes \mathscr{L}^m & \to & \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_m & \to & \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}^m & \to & \mathscr{F}''_1 \otimes \mathscr{L}^m \to 0 \\
 & & & & \| & & \\
0 \to \mathscr{F}'_2 \otimes \mathscr{L}^{m+1} & \to & \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{m+1} & \to & \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_2 \otimes \mathscr{L}^{m+1} & \to & \mathscr{F}''_2 \otimes \mathscr{L}^{m+1} \to 0
\end{array}$$

desquelles on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}
&(8) \quad \chi(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{m+1}) - \chi(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^m) = \\
&\chi(X, \mathscr{F}'_2 \otimes \mathscr{L}^{m+1}) - \chi(X, \mathscr{F}''_2 \otimes \mathscr{L}^{m+1}) + \chi(X, \mathscr{F}''_1 \otimes \mathscr{L}^m) - \chi(X, \mathscr{F}'_1 \otimes \mathscr{L}^m).
\end{aligned}$$

Le même raisonnement que ci-dessus permet de conclure. $\square$

Définition 7.5. *D'après le lemme 7.4, si d est un entier plus grand que la dimension du support de $\mathscr{F}$, il existe sous les hypothèses du théorème un entier c tel que*

$$\chi(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = c \frac{m^d}{d!} + O(m^{n-1}).$$

On note $\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{F}$ cet entier c.

– *Lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, on note simplement $\mathscr{L}^n$ au lieu de $\mathscr{L}^n \cdot \mathscr{O}_X$ (où n est la dimension de X). Cet entier est donc défini par*

$$(9) \qquad \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = \mathscr{L}^n \frac{m^d}{d!} + O(m^{n-1}).$$

– *Lorsque Y est une sous-variété de X de dimension d, on note $\mathscr{L}^d \cdot Y$ au lieu de $\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{O}_Y$. On a tautologiquement*

$$\mathscr{L}^d \cdot Y = (\mathscr{L}|_Y)^d \ ,$$

de sorte que ce cas se ramène au précédent.

7.6. Intersection d'un diviseur et d'une courbe. Montrons que lorsque C est une courbe projective lisse irréductible, le nombre d'intersection

$$\mathscr{L} \cdot C$$

coïncide avec le nombre défini en 5.21.

Commençons par quelques remarques préliminaires. Soit $D = \sum_{i=1}^{r} n_i p_i$ un diviseur de Cartier effectif sur C, que l'on considère aussi comme dans l'exemple 6.11.3) comme le sous-schéma fini (affine) de C d'ensemble sous-jacent $\{p_1, \ldots, p_r\}$ et d'anneau $\mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{C,p_i}^{n_i}$ en p_i. On a [1]

$$H^0(D, \mathscr{O}_D) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{C,p_i}^{n_i} \simeq \mathbf{k}^{n_1+\cdots+n_r}$$

et

$$H^i(D, \mathscr{O}_D) = 0$$

pour $i > 0$ par le théorème 6.28 (ou le corollaire 6.31. En particulier,

$$\chi(D, \mathscr{O}_D) = \deg(D).$$

D'autre part, si $\mathscr{M}$ est un faisceau inversible sur C, le faisceau

$$\mathscr{M} \otimes \mathscr{O}_D$$

est isomorphe à $\mathscr{O}_D$: cela provient du fait qu'il est nul hors de l'ensemble fini $\{p_1, \ldots, p_r\}$, et que sur cet ensemble, $\mathscr{M}$ est libre donc isomorphe à $\mathscr{O}_C$.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur C. Comme dans la démonstration du théorème, on peut écrire

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2^{-1}$$

avec $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ très amples. Il existe en particulier des diviseurs effectifs D_1 et D_2 sur C tels que

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_C(D_1 - D_2).$$

Nous noterons encore D_1 et D_2 les sous-schémas (finis) de C associés à ces diviseurs. On a les suites exactes

$$0 \to \mathscr{O}_C(-D_j) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_{D_j} \to 0$$

pour $j = 1, 2$. En les tensorisant par $\mathscr{O}_C(D_1)$, on obtient, compte tenu de la remarque ci-dessus, les suites exactes

$$0 \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_C(D_1) \to \mathscr{O}_{D_1} \to 0$$

et

$$0 \to \mathscr{O}_C(D_1 - D_2) \to \mathscr{O}_C(D_1) \to \mathscr{O}_{D_2} \to 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
\chi(C, \mathscr{L}) &= \chi(C, \mathscr{O}_C(D_1)) - \deg(D_2) \\
&= \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D_1) - \deg(D_2) \\
&= \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(L)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathscr{L} \cdot C = \deg(\mathscr{L}).$$

1. On rappelle que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{C,p_i}$ est engendré par un élément δ_i, donc que le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{C,p_i}^{n_i}$ a pour base $(1, \delta_i, \ldots, \delta_i^{n_i-1})$.

Soit X une variété projective, soit C une courbe lisse dans X et soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. On en déduit

$$\mathscr{L} \cdot C = \deg(\mathscr{L}|_C).$$

On a donc bien généralisé la définition 5.21.

Si C est connexe, on a vu dans le corollaire 2.38 que l'espace vectoriel $H^0(C, \mathscr{O}_C)$ est de dimension 1. On a donc

$$\chi(C, \mathscr{O}_C) = 1 - h^1(C, \mathscr{O}_C).$$

L'entier positif $h^1(C, \mathscr{O}_C)$ est très important ; on l'appelle le *genre* de la courbe C et on le note généralement $g(C)$. Lorsqu'on est sur le corps des complexes, il coïncide avec le genre topologique de la surface de Riemann C.

On peut exprimer les résultats ci-dessus sous la forme

$$\chi(C, \mathscr{L}) = \deg(L) + 1 - g(C).$$

C'est une forme du théorème de Riemann-Roch ; elle est valable sur toute courbe irréductible C (pas nécessairement lisse).

7.7. Degré d'une sous-variété de l'espace projectif.

Soit X une sous-variété (ou même un sous-schéma) de dimension n de $\mathbf{P}^N$. Par le th. 6.43.(ii), on a

$$\chi(X, \mathscr{F}(m)) = h^0(X, \mathscr{F}(m))$$

pour tout entier m assez grand. On peut améliorer le théorème 7.3 et montrer que c'est un poynôme en m de degré exactement la dimension du support de $\mathscr{F}$ (*cf.* exerc. 8.5). Le coefficient de $m^n/n!$ dans le polynôme $\chi(X, \mathscr{O}_X(m))$ est donc un entier strictement positif que l'on appelle le *degré* de X dans $\mathbf{P}^N$ (attention : il dépend du plongement choisi de X dans $\mathbf{P}^N$!).

On en déduit (avec le th. 6.41)

$$\mathscr{L}^d \cdot Y > 0$$

pour tout faisceau inversible *ample* sur X et toute sous-variété Y de dimension d de X.

Tentons d'expliquer la signification géométrique du degré dans le cas où X est lisse. Le théorème de Bertini 4.22 nous apprend que pour un hyperplan général H de $\mathbf{P}^N$, l'intersection $X \cap H$ est encore lisse. Ce théorème a été énoncé dans le cadre des variétés, mais notre démonstration montre en fait que le *schéma*[2] $X \cap H$ est lisse. Soit ℓ une forme linéaire définissant H ; on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_X(m-1) \xrightarrow{\cdot \ell} \mathscr{O}_X(m) \longrightarrow \mathscr{O}_{X\cap H}(m) \to 0$$

où la multiplication par ℓ est injective car ℓ ne s'annule sur aucun ouvert de X donc n'y est pas diviseur de 0 (*cf.* exemple 6.11.3)). En prenant les caractéristiques d'Euler, on obtient

$$\deg(X) = \deg(X \cap H).$$

En continuant ainsi de proche en proche, on arrive en coupant X par $N - n$ hyperplans généraux, c'est-à-dire par un sous-espace linéaire général de dimension $N - n$, à un sous-schéma fini lisse, dont le degré est le cardinal. On a montré que *le degré*

2. C'est-à-dire le schéma défini par les équations définissant X et celle définissant H ; pour bien comprendre la différence, penser au cas où X est une courbe : l'intersection $X \cap H$ est finie donc est toujours lisse en tant que variété, mais elle n'est lisse en tant que schéma que si l'intersection est transverse.

d'une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbf{P}^N$ est le nombre de points d'intersection de X avec un sous-espace linéaire général de dimension $N-n$. Il est donc bien strictement positif. Cette description reste d'ailleurs valable pour toute sous-variété de $\mathbf{P}^N$, lisse ou non.

7.8. Nombres d'intersection généraux. On se donne maintenant des faisceaux inversibles $\mathscr{L}_1,\dots,\mathscr{L}_n$ sur une variété projective X de dimension n et on veut définir un nombre d'intersection

$$\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_n$$

On procède de façon tout-à-fait analogue.

Théorème 7.9. *Soit X une variété projective, soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X et soient $\mathscr{L}_1,\dots,\mathscr{L}_r$ des faisceaux inversibles sur X. Il existe un polynôme P de degré total au plus la dimension de* $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ *tel que pour tout entier m, on ait*

$$P(m_1,\dots,m_r)=\chi(X,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}_r^{\otimes m_r}).$$

Démonstration. On va se ramener au cas déjà traité $r=1$.

Lemme 7.10. *Soit d un entier strictement positif et soit $f\colon \mathbf{Z}^r\to\mathbf{Z}$ une application telle que pour chaque $(n_1,\dots,n_{i-1},n_{i+1},\dots,n_r)$ dans $\mathbf{Z}^{r-1}$, l'application*

$$t\longmapsto f(n_1,\dots,n_{i-1},t,n_{i+1},\dots,n_r)$$

est polynomiale de degré au plus d. La fonction f prend les mêmes valeurs qu'un polynôme en r indéterminées à coefficients rationnels.

Démonstration. On procède par récurrence sur r, le cas $r=1$ étant [**Ha**], I, prop. 7.3.(a). Supposons $r>1$; il existe des fonctions $f_0,\dots,f_d\colon \mathbf{Z}^{r-1}\to\mathbf{Z}$ telles que

$$f(t_1,\dots,t_r)=\sum_{j=0}^{d} f_j(t_1,\dots,t_{r-1})t_r^j.$$

Choisissons des entiers distincts $c_0,\dots,c_d$; pour chaque $i\in\{0,\dots,d\}$, il existe par l'hypothèse de récurrence un polynôme P_i à coefficients rationnels tels que

$$f(t_1,\dots,t_{r-1},c_i)=\sum_{j=0}^{d} f_j(t_1,\dots,t_{r-1})c_i^j=P_i(t_1,\dots,t_{r-1}).$$

La matrice (c_i^j) est inversible et son inverse est à coefficients rationnels. Cela entraîne que chaque f_j est combinaison linéaire de $P_0,\dots,P_d$ avec des coefficients rationnels, d'où le lemme. □

On déduit du théorème 7.3 et du lemme qu'il existe un polynôme $P\in\mathbf{Q}[T_1,\dots,T_r]$ tel que

$$P(m_1,\dots,m_r)=\chi(X,\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}_r^{\otimes m_r})$$

pour tous entiers $m_1,\dots,m_r$. Soit d le degré de P et soient $n_1,\dots,n_r$ des entiers tels que le polynôme

$$Q(T)=P(n_1T,\dots,n_rT)$$

soit encore de degré d. Comme

$$Q(m)=\chi(X,\mathscr{F}\otimes(\mathscr{L}_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}_r^{\otimes m_r})^{\otimes m})\ ,$$

on déduit du théorème 7.3 l'inégalité $d\le\dim(\operatorname{Supp}(\mathscr{F}))$. □

On pose alors la définition suivante.

DÉFINITION 7.11. *Soient $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ des faisceaux inversibles sur une variété projective X, avec $r \geq \dim(X)$. Le nombre d'intersection*

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r$$

est le coefficient de $m_1 \dots m_r$ dans le polynôme

$$\chi(X, \mathscr{L}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}_r^{\otimes m_r})$$

La proposition 7.12 qui suit entraîne que ce nombre est *entier*, et le théorème 7.9 qu'il est nul pour $r > \dim(X)$. Si Y est une sous-variété de X de dimension au plus s, on pose

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_s \cdot Y = \mathscr{L}_1|_Y \cdots \mathscr{L}_s|_Y .$$

Lorsque les D_j sont effectifs, ce nombre d'intersection a une interprétation géométrique en termes de multiplicités d'intersection analogue à celle de 7.6, mais nous n'aborderons pas ce point de vue ici.

Lorsque tous les $\mathscr{L}_j$ sont égaux à $\mathscr{L}$, le nombre d'intersection $\mathscr{L}^r$ est le coefficient de $m_1 \dots m_r$ dans le polynôme

$$P(m_1 + \cdots + m_r) = \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes(m_1 + \cdots + m_r)})$$

il coïncide donc bien avec le nombre défini dans la déf. 7.5.

PROPOSITION 7.12. *Soient $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ des faisceaux inversibles sur une variété projective X de dimension n.*

a) L'application

$$(\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_n) \longmapsto \mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_n$$

est multilinéaire, symétrique et à valeurs entières.

b) Si $\mathscr{L}_n$ a une section qui n'est identiquement nulle sur aucune composante irréductible de X, celle-ci définit un sous-schéma Y de X de codimension 1 et

$$\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_n = \mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_{n-1} \cdot Y$$

DÉMONSTRATION. Dans a), l'application en question est symétrique par construction, mais sa multilinéarité n'est pas évidente. Supposons $r \geq n$; l'identité

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r = \sum_{I \subset \{1, \dots, r\}} \varepsilon_I \; \chi(X, \bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i^*) \ , \tag{10}$$

où $\varepsilon_I = (-1)^{\mathrm{Card}(I)}$, se déduit du fait que si $P(T_1, \dots, T_r)$ est un polynôme de degré total au plus r, le coefficient de $T_1 \cdots T_r$ dans P est

$$\sum_{I \subset \{1, \dots, r\}} \varepsilon_I P(-t^I) \ ,$$

où $t_i^I = 1$ si $i \in I$ et 0 sinon (cette quantité s'annule pour tous les autres monômes de degré $\leq r$).

Cette identité montre que le nombre d'intersection est un entier. De plus, son membre de droite s'annule pour $r > n$, donc, pour des faisceaux inversibles $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_1', \mathscr{L}_2, \dots, \mathscr{L}_n$, la somme

$$\sum_{I \subset \{2, \dots, n\}} \varepsilon_I \Big(\chi(X, \bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_1^* \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_1'^* \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i^*) + \chi(X, \mathscr{L}_1^* \otimes \mathscr{L}_1'^* \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i^*) \Big)$$

est nulle. D'autre part, $(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}'_1) \cdot \mathscr{L}_2 \cdots \mathscr{L}_n$ est égal à

$$\sum_{I \subset \{2,\dots,n\}} \varepsilon_I \Big(\chi(X, \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_1^* \otimes \mathscr{L}_1'^* \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \Big)$$

et $\mathscr{L}_1 \cdot \mathscr{L}_2 \cdots \mathscr{L}_n + \mathscr{L}'_1 \cdot \mathscr{L}_2 \cdots \mathscr{L}_n$ à

$$\sum_{I \subset \{2,\dots,n\}} \varepsilon_I \Big(2\chi(X, \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_1^* \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_1'^* \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \Big)$$

En mettant toutes ces égalités ensemble, on obtient a).

Dans la situation de b), on a

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r = \sum_{I \subset \{1,\dots,n-1\}} \varepsilon_I \Big(\chi(X, \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) - \chi(X, \mathscr{L}_r^* \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \Big).$$

De la suite exacte (*cf.* ex. 6.11.3))

$$0 \to \mathscr{O}_X(\mathscr{L}_r^* \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \to \mathscr{O}_X(\bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \to \mathscr{O}_Y(\bigotimes_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) \to 0$$

on tire

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r = \sum_{I \subset \{1,\dots,n-1\}} \varepsilon_I \ \chi(Y, \sum_{i\in I} \mathscr{L}_i^*) = \mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_{n-1} \cdot Y \ ,$$

d'où b). □

7.13. Formule de projection. Soit $\pi \colon X \to Y$ une application régulière entre variétés projectives et soit C une courbe sur X. On définit le 1-cycle $\pi_* C$ ainsi : si C est envoyée sur un point par π, on pose $\pi_* C = 0$; si $\pi(C)$ est une courbe sur Y, on pose $\pi_* C = d\,\pi(C)$, où d est le degré[3] de l'application régulière $C \to \pi(C)$ induit par π. Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X, on a la *formule de projection*

$$\pi^* \mathscr{L} \cdot C = \mathscr{L} \cdot \pi_* C \tag{11}$$

qui se déduit de la proposition 5.18, du lemme 5.19 et de la définition du nombre d'intersection donnée en 5.21. Cette formule est en fait un cas particulier du résultat suivant, que nous admettrons.

PROPOSITION 7.14 (Formule de projection). *Soit $\pi \colon Y \to X$ une application régulière surjective entre variétés projectives et soient $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_r$ des faisceaux inversibles sur X, avec $r \geq \dim(Y)$. On a*

$$\pi^* \mathscr{L}_1 \cdots \pi^* \mathscr{L}_r = \deg(\pi)(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_r).$$

7.2. Cône des courbes

7.15. 1-cycles. Pour étudier les propriétés d'intersection des courbes et des diviseurs d'une variété algébrique, on veut identifier deux courbes qui ont même nombre d'intersection avec chaque diviseur (cela forme une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes). Il est très commode de mettre un peu d'algèbre linéaire dans la machine, en procédant comme suit.

Soit X une variété projective. On considère les combinaisons linéaires formelles finies à coefficients entiers de courbes irréductibles de X (on les appelle des 1-*cycles*).

3. Rappelons (§ 3.4) que le *degré* d'une application régulière $\pi \colon Y \to X$ entre variétés projectives est le degré de l'extension de corps associée $\pi^* \colon K(X) \hookrightarrow K(Y)$ si cette extension est finie, 0 sinon.

On peut étendre par linéarité le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs ; il est à valeurs entières. On pose alors

$$N_1(X)_{\mathbf{Z}} = \{\text{groupe des 1-cycles}\}/\{\text{1-cycles d'intersection 0 avec tout diviseur}\}$$

et

$$N^1(X)_{\mathbf{Z}} = \{\text{groupe des diviseurs}\}/\{\text{diviseurs d'intersection 0 avec toute courbe}\}\ ,$$

de sorte que le produit d'intersection induit une forme bilinéaire non dégénérée

$$N_1(X)_{\mathbf{Z}} \times N^1(X)_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}.$$

On notera que $N_1(X)_{\mathbf{Z}}$ est un groupe abélien libre qui est un quotient de $\mathrm{Pic}(X)$.

Il est très pratique de permettre des coefficients rationnels, ou même réels, dans la définition des diviseurs de Weil et dans celle des 1-cycles. On obtient ainsi des espaces vectoriels $N_1(X)_{\mathbf{Q}}$, $N_1(X)_{\mathbf{R}}$, $N^1(X)_{\mathbf{Q}}$ et $N^1(X)_{\mathbf{R}}$.

Le fait fondamental (que nous ne démontrerons pas) est que *l'espace vectoriel* $N_1(X)_{\mathbf{R}}$ *est de dimension finie* lorsque X est projective. Dans cet espace vectoriel, on définit le *cône effectif* $\mathrm{NE}(X)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des classes de courbes sur X.

Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible ample sur X, on a $\mathscr{L} \cdot C > 0$ pour toute courbe C de X. Cela veut dire que $\mathrm{NE}(X) \smallsetminus \{0\}$ *est contenu dans un demi-espace ouvert de* $N_1(X)_{\mathbf{R}}$ (on a en fait mieux : voir § 8.3).

EXEMPLES 7.16. 1) Le groupe de Picard de $\mathbf{P}^n$ est libre de rang 1 (ex. 5.16.2)) donc aussi les groupes $N^1(\mathbf{P}^n)_{\mathbf{Z}}$ et $N_1(\mathbf{P}^n)_{\mathbf{Z}}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} N_1(\mathbf{P}^n)_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \sum \lambda_i [C_i] & \longmapsto & \sum \lambda_i \deg C_i \end{array}$$

est donc un isomorphisme et $\mathrm{NE}(\mathbf{P}^n)$ est $\mathbf{R}^+$.

2) De la même façon, on déduit de l'exemple 5.16.4) que $N_1(\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n)_{\mathbf{R}}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dans lequel $\mathrm{NE}(\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n)$ est $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

Par exemple, une quadrique lisse X dans $\mathbf{P}^3$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (c'est l'image du plongement de Segre). Si C_1 et C_2 sont des droites concourantes contenues dans X, les relations $C_1 \cdot C_2 = 1$ et $C_1^2 = C_2^2 = 0$ prouvent que C_1 et C_2 ont des classes indépendantes dans $N_1(X)_{\mathbf{R}}$ et engendrent cet espace vectoriel.

7.3. Caractérisation des faisceaux amples par leurs nombres d'intersection

On a vu que tout faisceau ample $\mathscr{L}$ sur une variété projective X vérifie

$$\mathscr{L}^d \cdot Y > 0$$

pour toute sous-variété Y de dimension d de X. Il s'avère que la réciproque est vraie.

THÉORÈME 7.17 (Critère de Nakai-Moishezon). *Un faisceau inversible* $\mathscr{L}$ *sur une variété projective* X *est ample si et seulement si, pour toute sous-variété irréductible* Y *de* X *de dimension* d*, on a*

$$\mathscr{L}^d \cdot Y > 0.$$

Par l'exercice 8.5, cette propriété est équivalente à la même inégalité pour toutes les sous-variétés de X (pas nécessairement irréductibles), et même (mais c'est plus délicat) pour tous les sous-schémas.

Démonstration. Il sufft de montrer une direction. Nous procéderons par récurrence sur la dimension de X.

Nous utiliserons la version schématique suivante du théorème de Bertini 4.23.

Théorème 7.18 (Théorème de Bertini). *Soit X une variété, soit $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application régulière et soit H un hyperplan général de $\mathbf{P}^n$. Le* schéma *$u^{-1}(H)$ est une sous-variété de X de codimension 1, associée à un diviseur.*

Il existe alors des diviseurs *effectifs* D_1 et D_2 (obtenus par sections hyperplanes : procéder comme en § 7.6) dont les sous-schémas associés sont des sous-variétés de X de codimension 1, tels que

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X(D_1 - D_2).$$

On peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence : les restrictions $\mathscr{L}|_{D_j}$ sont amples donc (th. 6.43)

$$H^i(D_j, \mathscr{L}|_{D_j}^{\otimes m}) = 0$$

pour tout $i > 0$ et tout m suffisamment grand. En considérant les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes

$$(12)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{O}_X(-D_1) & \to & \mathscr{L}^{\otimes m} & \to & \mathscr{L}|_{D_1}^{\otimes m} & \to & 0 \\ & & \| & & & & & & \\ 0 & \to & \mathscr{L}^{\otimes (m-1)} \otimes \mathscr{O}_X(-D_2) & \to & \mathscr{L}^{\otimes (m-1)} & \to & \mathscr{L}|_{D_2}^{\otimes (m-1)} & \to & 0 \end{array}$$

on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) &= h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{O}_X(-D_1))) \\ &= h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes (m-1)} \otimes \mathscr{O}_X(-D_2))) \\ &= h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes (m-1)}) \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 2$ et tout m suffisamment grand.

Soit n la dimension de X. Par définition de $\mathscr{L}^n$ (*cf.* (9)), et comme cet entier est strictement positif par hypothèse, on a

$$\lim_{m \to \infty} \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = +\infty.$$

Comme, pour $i \geq 2$, les nombres $h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$ sont constants pour m suffisamment grand, il s'ensuit

$$\lim_{m \to \infty} \big(h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) - h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m})\big) = +\infty\ ,$$

donc

$$\lim_{m \to \infty} h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = +\infty.$$

Comme il s'agit de montrer que $\mathscr{L}$ est ample, il est loisible de le remplacer par une puissance tensorielle positive (th. 6.41). On peut donc supposer que $\mathscr{L}$ a une section non nulle s, de diviseur (effectif) D (en somme, on peut supposer dans ce qui précède $D_2 = 0$). La première des suites exactes (12) donne une surjection

$$\rho_m\colon H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes (m-1)}) \to H^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$$

pour tout m suffisamment grand. Les dimensions $h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$ forment donc une suite décroissante de nombres positifs, qui est donc stationnaire. Pour m suffisamment grand, ρ_m est alors bijective, et la suite exacte longue de cohomologie associée à la première des suites exactes (12) entraîne que la restriction

$$(13)\qquad H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) \twoheadrightarrow H^0(D, \mathscr{L}|_D^{\otimes m})$$

est surjective. Comme $\mathscr{L}|_D$ est ample sur D, le faisceau $\mathscr{L}|_D^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales pour tout m suffisamment grand par définition de l'amplitude.

Cela signifie que pour tout point de D, il existe une section de $\mathscr{L}|_D^{\otimes m}$ qui ne s'annule pas en ce point. Par (13), cette section est restriction à D d'une section de $\mathscr{L}^{\otimes m}$. En tout point de D, il existe donc une section de $\mathscr{L}^{\otimes m}$ qui ne s'annule pas. Or la section $s^{\otimes m}$ de $\mathscr{L}^{\otimes m}$ s'annule exactement aux points de D. Il en ressort qu'en chaque point de X, il existe une section de $\mathscr{L}^{\otimes m}$ qui ne s'annule pas ; ce faisceau inversible est donc engendré par ses sections globales et définit une application régulière

$$u \colon X \to \mathbf{P}^N$$

telle que $u^*\mathscr{O}_{P^N}(1) \simeq \mathscr{L}^{\otimes m}$. Supposons qu'il existe une courbe C contractée par u. Par la formule de projection (11), on a

$$m^{n-1}(\mathscr{L}^{n-1} \cdot C) = (\mathscr{L}^{\otimes m})^{n-1} \cdot C = \mathscr{O}_{P^N}(1) \cdot u_*C = 0 \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Une telle courbe ne peut donc exister, ce qui entraîne que les fibres de u sont finies. On invoque alors la remarque 6.45 pour en déduire que $\mathscr{L}^{\otimes m}$, donc aussi $\mathscr{L}$, est ample. □

CHAPITRE 8

Caractérisations numériques des faisceaux inversibles nefs et amples

8.1. Faisceaux inversibles nefs

Vu le critère de Nakai-Moishezon, il est naturel de poser la définition suivante.

DÉFINITION 8.1. *Un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur une variété projective X est* nef [1] *si, pour toute sous-variété irréductible Y de X de dimension d, on a*

$$\mathscr{L}^d \cdot Y \geq 0.$$

Tout faisceau inversible ample est nef. La restriction d'un faisceau inversible nef à une sous-variété est encore nef. De nouveau, l'exercice 8.5 entraîne que cette propriété est équivalente à la même inégalité pour toutes les sous-variétés de X (pas nécessairement irréductibles) et même (mais c'est plus délicat) pour tous les sous-schémas.

8.2. Produit tensoriel d'un faisceau inversible ample et d'un faisceau inversible nef. Nous dégageons le résultat suivant qui nous servira à plusieurs reprises.

LEMME 8.3. *Soit X une variété projective de dimension n et soient $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X et $\mathscr{M}$ un faisceau inversible ample. Si pour toute sous-variété Y de X de dimension d, on a $\mathscr{L}^d \cdot Y \geq 0$, on a*

$$\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{M}^{n-d} \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur n. Comme $\mathscr{M}$ est ample, un multiple positif $\mathscr{M}^{\otimes m}$ est très ample ; il a donc une section qui s'annule sur un sous-schéma Z de X. Il est pratique d'utiliser ici la version schématique du théorème de Bertini 7.18 qui permet de supposer que Z est une *sous-variété* de X de codimension 1 (associée au diviseur d'une section de $\mathscr{M}^{\otimes m}$ nulle sur aucune composante irréductible de X). On peut supposer $d < n$; on a alors, en utilisant la proposition 7.12.b),

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{M}^{n-d} &= \frac{1}{m}\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{M}^{n-d-1} \cdot (\mathscr{M}^{\otimes m}) \\
&= \frac{1}{m}\mathscr{L}^d \cdot \mathscr{M}^{n-d-1} \cdot Z \\
&= \frac{1}{m}(\mathscr{L}|_Z)^d \cdot (\mathscr{M}|_Z)^{n-d-1} ,
\end{aligned}$$

qui est positif par hypothèse de récurrence. □

1. Cet acronyme signifie “numériquement effectif”.

Soit X une variété projective, soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible nef sur X et soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible ample. Soit Y une sous-variété de X de dimension r ; comme $\mathscr{L}|_Y$ est nef et que $\mathscr{M}|_Y$ est ample, le lemme donne

$$\mathscr{L}^s \cdot \mathscr{M}^{r-s} \cdot Y = (\mathscr{L}|_Y)^s \cdot (\mathscr{M}|_Y)^{r-s} \geq 0 \tag{14}$$

pour $0 \leq s \leq r$. Cela entraîne

$$(\mathscr{L} \otimes \mathscr{M})^r \cdot Y = \mathscr{M}^r \cdot Y + \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \mathscr{L}^s \cdot \mathscr{M}^{r-s} \cdot Y \geq (\mathscr{M}|_Y)^r > 0$$

puisque $\mathscr{M}|_Y$ est ample. Par le critère de Nakai-Moishezon, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est ample : *sur une variété projective, le produit tensoriel d'un faisceau inversible nef $\mathscr{L}$ et d'un faisceau inversible ample est ample.*

8.4. Produit tensoriel de faisceaux inversibles nefs. Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ des faisceaux inversibles nefs sur une variété projective X de dimension n et soit $\mathscr{N}$ un faisceau inversible ample sur X. On vient de voir que $\mathscr{M}^{\otimes m} \otimes \mathscr{N}$ est ample pour tout entier positif m et que, pour toute sous-variété Y de X de dimension r, on a

$$\mathscr{L}^s \cdot (\mathscr{M}^{\otimes m} \otimes \mathscr{N})^{r-s} \cdot Y > 0$$

pour $0 \leq s \leq r$. En divisant par m^{r-s} et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\mathscr{L}^s \cdot \mathscr{M}^{r-s} \cdot Y \geq 0$$

et par la formule du binôme (en utilisant la proposition 7.12.a)),

$$(\mathscr{L} \otimes \mathscr{M})^r \cdot Y \geq 0.$$

Il s'ensuit que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est nef : *sur une variété projective, le produit tensoriel de deux faisceaux inversibles nefs est nef.*

8.5. Puissances rationnelles. Rappelons (prop. 6.39) qu'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ est ample si et seulement si une puissance tensorielle (positive) l'est. Si q est un nombre rationnel, nous dirons que « $\mathscr{L}^{\otimes q}$ est ample » (attention : l'objet $\mathscr{L}^{\otimes q}$ n'existe pas !) si une puissance tensorielle positive entière l'est (cela ne dépend pas de la puissance choisie). On peut par multilinéarité définir un nombre d'intersection de puissances rationnelles de faisceaux inversibles, et le critère de Nakai-Moishezon est encore valable (tout cela n'est que formel).

8.2. Être nef est une propriété numérique

La propriété d'être nef se comporte beaucoup mieux que l'amplitude ; par exemple, le résultat suivant entraîne que cette propriété est numérique : elle se teste uniquement par le nombre d'intersection avec les courbes. Ce résultat est primordial. Il entraîne en particulier, avec la formule de projection (11), que l'image inverse d'un faisceau inversible nef par n'importe quelle application régulière est encore nef.

THÉORÈME 8.6. *Soit X une variété projective. Un faisceau inversible sur X est nef si et seulement si il est de degré positif sur toute courbe de X.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible de degré positif sur toute courbe et soit n la dimension de X. En procédant par récurrence sur n, il suffit de montrer $\mathscr{L}^n \geq 0$.

Soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible ample sur X ; on pose $\mathscr{L}_t = \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes t}$ pour tout *rationnel* t et on considère le polynôme

$$\begin{aligned} P(t) &= (\mathscr{L}_t)^n \\ &= \mathscr{L}^n + \binom{n}{1}(\mathscr{L}^{n-1}\cdot\mathscr{M})t + \cdots + \mathscr{M}^n t^n. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer $P(0) \geq 0$. On raisonne par l'absurde en supposant le contraire ; comme le coefficient directeur de P est strictement positif, cela entraîne que P a une plus grande racine strictement positive réelle t_0 et $P(t) > 0$ pour $t > t_0$.

Pour toute sous-variété Y de X de dimension $r < n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $\mathscr{L}|_Y$ est nef. On a donc, par (14),

$$\mathscr{L}|_Y^s \cdot \mathscr{M}|_Y^{r-s} \geq 0$$

pour $0 \leq s \leq r$; en particulier,

$$\mathscr{L}^r \cdot Y \geq 0. \tag{15}$$

On a aussi $\mathscr{M}|_Y^r > 0$ puisque $\mathscr{M}|_Y$ est ample. D'autre part, par multilinéarité du nombre d'intersection,

$$\mathscr{L}_t^r \cdot Y = (\mathscr{L}|_Y^r) + \binom{r}{1}(\mathscr{L}|_Y^{r-1}\cdot\mathscr{M}|_Y)t + \cdots + (\mathscr{M}|_Y^r)t^r > 0$$

pour $t > 0$. Comme $D_t^n = P(t) > 0$ pour $t > t_0$, le critère de Nakai-Moishezon entraîne que $\mathscr{L}_t$ *est ample pour* t *rationnel* $> t_0$. Remarquons que P est somme des polynômes

$$Q(t) = \mathscr{L}_t^{n-1}\cdot\mathscr{L} \qquad \text{et} \qquad R(t) = t\mathscr{L}_t^{n-1}\cdot\mathscr{M}.$$

Comme $\mathscr{L}$ est de degré positif sur les courbes, le lemme 8.3 entraîne $Q(t) \geq 0$ *pour tout* $t \geq t_0$. D'autre part, le lemme 8.3 montre que (15) entraîne

$$\mathscr{L}^r \cdot \mathscr{M}^{n-r} \geq 0$$

pour $0 \leq r < n$. Le polynôme

$$R(t) = (\mathscr{L}^{n-1}\cdot\mathscr{M})t + \binom{n-1}{1}(\mathscr{L}^{n-2}\cdot\mathscr{M}^2)t^2 + \cdots + \mathscr{M}^n t^n$$

est donc à coefficients positifs et de coefficient directeur strictement positif. Cela entraîne $R(t_0) > 0$, d'où la contradiction

$$0 = P(t_0) = Q(t_0) + R(t_0) \geq R(t_0) > 0$$

Nous avons donc montré $P(0) \geq 0$, d'où le théorème. □

8.3. Une caractérisation numérique de l'amplitude

Le critère suivant montre que l'amplitude est une propriété numérique : elle ne dépend que des nombres d'intersection avec les 1-cycles. On peut donc parler de *classes amples* dans $N^1(X)_{\mathbf{Q}}$. Ces classes forment un *cône convexe ouvert* (prop. 6.39.b) et c)). De même, par le théorème 8.6, on peut aussi parler de *classes nefs* ; elles forment un cône convexe (§ 8.4) qui est l'adhérence du cône ample (§ 8.2).

Le critère entraîne aussi que le cône effectif fermé $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (*cf.* § 7.2) ne contient pas de droite (c'est un exercice de montrer qu'on cône convexe fermé ne contient pas de droite si et seulement s'il est contenu dans un demi-espace espace ouvert plus l'origine).

PROPOSITION 8.7 (Critère de Kleiman). *Soit X une variété projective. Un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est ample si et seulement si $\mathscr{L} \cdot z > 0$ pour tout élément non nul z de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathscr{L}$ est ample, on a clairement $\mathscr{L} \cdot z \geq 0$ pour tout z dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Supposons $\mathscr{L} \cdot z = 0$ et $z \neq 0$; comme la forme d'intersection est non-dégénérée, il existe un faisceau inversible $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{M} \cdot z < 0$, donc $(\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}) \cdot z < 0$ pour tout entier positif m. En particulier, $\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}$ n'est pas ample, ce qui contredit la proposition 6.39.c).

Pour la réciproque, supposons que $\mathscr{L}$ soit strictement positif sur $\overline{\mathrm{NE}}(X) \smallsetminus \{0\}$. On choisit une norme $\|\cdot\|$ sur $N_1(X)_{\mathbf{R}}$; l'ensemble

$$K = \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \mid \|z\| = 1\}$$

est compact. L'application linéaire $z \mapsto \mathscr{L} \cdot z$ est strictement positive sur K donc y est supérieure à $1/a$, où a est un entier strictement positif. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible ample sur X ; l'application linéaire $z \mapsto \mathscr{M} \cdot z$ est majorée par un entier (strictement positif) b sur K. Il s'ensuit que $\mathscr{L}^{\otimes ab} \otimes \mathscr{M}^*$ est positif sur K donc sur le cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$; par le théorème 8.6, cela signifie que $\mathscr{L}^{\otimes ab} \otimes \mathscr{M}^*$ est nef. Par § 8.2,

$$\mathscr{L}^{\otimes ab} = (\mathscr{L}^{\otimes ab} \otimes \mathscr{M}^*) \otimes \mathscr{M}$$

est ample. Par la proposition 6.39.a), $\mathscr{L}$ est ample et cela démontre le théorème. □

8.4. Une forme faible du théorème de Riemann-Roch

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur une variété projective X. On sait (th. 7.9) que la fonction

$$m \mapsto \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$$

est polynomiale. Dans la pratique, il est important de connaître l'espace vectoriel des *sections* $H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$, ou encore simplement sa dimension $h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$, qui n'est que l'un des termes de la somme alternée définissant $\chi(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$.

Le résultat suivant répond partiellement à cette question : lorsque $\mathscr{L}$ est nef, le terme dominant dans cette somme alternée est bien $h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$.

PROPOSITION 8.8. *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur une variété projective X de dimension n.*

a) On a

$$h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = O(m^n).$$

b) Si $\mathscr{L}$ est nef,

$$h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = m^n \frac{\mathscr{L}^n}{n!} + O(m^{n-1}).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible ample sur X. Il existe un entier strictement positif r_0 tel que $h^0(X, \mathscr{M}^{\otimes r} \otimes \mathscr{L}^*) > 0$ (définition de l'amplitude) et $h^i(X, \mathscr{M}^{\otimes r}) = 0$ pour tout $i > 0$ et $r \geq r_0$ (th. 6.43). Cela entraîne

$$h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) \leq h^0(X, \mathscr{M}^{\otimes mr}) = \chi(X, \mathscr{M}^{\otimes mr}) = O(m^n) ,$$

c'est-à-dire a).

On démontre b) en montrant par récurrence sur n que pour tout $i > 0$, on a $h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = O(m^{n-1})$. Écrivons comme dans la démonstration du th. 7.17

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X(D_1 - D_2)$$

avec D_1 et D_2 diviseurs effectifs sur X. L'hypothèse de récurrence et la suite exacte longue en cohomologie associée aux suites exactes (12) donnent, pour $i \geq 2$,

$$h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes(m-1)}) + O(m^{n-2})$$

d'où

$$h^i(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = O(m^{n-1}).$$

Par la définition même du nombre d'intersection $\mathscr{L}^n$, on en déduit

$$\begin{aligned} h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) - h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) &= \chi(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) + O(m^{n-1}) \\ &= m^n \frac{\mathscr{L}^n}{n!} + O(m^{n-1}) \end{aligned}$$

Si $h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ pour tout $m > 0$, le membre de gauche de cette égalité est positif. Comme $\mathscr{L}^n$ est positif, il doit être nul, et $h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) = O(m^{n-1})$.

Sinon, il existe un diviseur effectif D dans un système linéaire $|\mathscr{L}^{\otimes m_0}|$, et la suite exacte

$$0 \to \mathscr{L}^{\otimes(m-m_0)} \to \mathscr{L}^{\otimes m} \to \mathscr{L}|_D^{\otimes m} \to 0$$

entraîne

$$\begin{aligned} h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) &\leq h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes(m-m_0)} + h^1(D, \mathscr{L}|_D^{\otimes m}) \\ &= h^1(X, \mathscr{L}^{\otimes(m-m_0)}) + O(m^{n-2}) \end{aligned}$$

par récurrence. De nouveau, $h^1(X, mD) = O(m^{n-1})$ et b) est démontré. □

8.5. Exercices

1) Soit X un espace topologique irréductible (c'est-à-dire dans lequel tout ouvert non vide est dense). Calculer les groupes de cohomologie de Cech du faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$ pour n'importe quel recouvrement ouvert de X.

2) Soit $\mathbf{k}$ un corps et soit U le complémentaire de l'origine dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$.

a) Calculer $H^1(U, \mathscr{O}_U)$.

b) En déduire que U n'est pas affine.

3) Soit X une variété projective et soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ des faisceaux inversibles sur X.

a) Si $\mathscr{L}$ est très ample et $\mathscr{M}$ engendré par ses sections globales, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est très ample.

b) Si $\mathscr{M}$ est ample, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ est très ample pour tout entier r assez grand.

4) Soient X et Y des variétés projectives et soit $u \colon X \to Y$ une application régulière. On suppose que l'image réciproque par u de tout ouvert affine de Y est un ouvert affine de X (on dit que u est affine). Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X.

a) Montrer que le faisceau $u_*\mathscr{F}$ est cohérent (cette propriété reste vraie pour toute application régulière entre variétés projectives ; *cf.* [**Ha**], II, cor. 5.20).

b) Montrer que pour tout entier q, on a un isomorphisme

$$H^q(X, \mathscr{F}) \simeq H^q(Y, u_*\mathscr{F}).$$

5) Soit X une variété projective. Un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est ample si et seulement si sa restriction à chaque composante irréductible de X est ample (*Indication :* utiliser le théorème 6.43).

6) Soit A un anneau et soit M un A-module de type fini. On rappelle que l'annulateur de M est l'idéal

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$$

de A. Soit X une variété affine d'algèbre A ; montrer

$$\mathrm{Supp}(\tilde{M}) = V(\mathrm{Ann}(M)).$$

7) Soit X une variété projective, soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X et soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ des faisceaux inversibles amples sur X. Montrer que pour tout $q > 0$, l'ensemble

$$\{(r,s) \in \mathbf{N}^2 \mid H^q(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r} \otimes \mathscr{M}^{\otimes s}) \neq 0\}$$

est fini (*Indications :* en raisonnant par récurrence descendante sur q, on pourra montrer qu'il suffit de traiter le cas où $\mathscr{L}$ est très ample et $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, puis raisonner par récurrence sur la dimension de X, en en considérant une section hyperplane).

8) Soit X une sous-variété de l'espace projectif et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Montrer qu'il existe un polynôme P *de degré la dimension de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ tel que pour tout entier m, on ait

$$P(m) = \chi(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(m)).$$

Indications : on suivra la démonstration du théorème 7.3, on montrant qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}(1) \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0\ ,$$

avec

$$\dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')) \leq \dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) - 2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}'')) = \dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) - 1.$$

9) Soit X une variété projective de dimension n de composantes irréductibles $X_1, \ldots, X_r$ et soient $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$ des faisceaux inversibles sur X. Montrer la formule

$$\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_n = \sum_{j=1}^{r} \mathscr{L}_1|_{X_j} \cdots \mathscr{L}_n|_{X_j}.$$

Bibliographie

Cette bibliographie est volontairement très limitée. Il existe des centaines d'ouvrages sur le sujet...

[BT] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Math. **82**, 2ème éd., Springer Verlag, 1986.

[H] J. Harris, Algebraic Geometry, A First Fourse, Graduate Text in Mathematics **133**, Springer Verlag, 1992.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics **52**, Springer Verlag, 1977.

[M] D. Mumford, Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, 2ème édition, Classics in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1995.

[P] D. Perrin, Géométrie Algébrique, Une introduction, Savoirs Actuels, InterÉditions/CNRS Editions, Paris, 1995.

[R] M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, London Math. Soc. Student Texts **12**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[S] I.R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry I, 2ème édition, Springer Verlag, Berlin, 1994.