CLASSES DE CONJUGAISON DE MATRICES COMPLEXES

OLIVIER DEBARRE

On se place sur le corps $\mathbf{C}$.

1. Décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$. On rappelle la décomposition de Dunford : il existe une unique paire (D, N) de matrices telles que
$$A = D + N,$$
avec

- D diagonalisable ;
- N nilpotente ;
- $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $P_A(X) = P_D(X)$ (même polynôme caractéristique).

Comme conséquence de l'unicité, on a bien sûr :
$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff N = 0, \\ A \text{ nilpotente} &\iff D = 0. \end{aligned}$$

Soient a, d et n les endomorphismes de $\mathbf{C}^m$ de matrice A, D et N dans la base canonique. Comme d est diagonalisable, $\mathbf{C}^m$ est somme directe de ses espaces propres. Comme $dn = nd$, chaque espace propre est stable par n. On peut trigonaliser la restriction de n à chaque espace propre de d ; comme d agit comme une homothétie sur chaque espace propre, elle reste diagonale dans n'importe quelle base. On peut donc trouver une base de $\mathbf{C}^m$ dans laquelle la matrice de d est diagonale et celle de n triangulaire supérieure, avec des 0 sur la diagonale (selon la démonstration de Dunford que vous utilisez, il est possible que cela en ressorte directement). En termes de matrices, il existe une matrice P inversible telle qu'on ait
$$P^{-1}DP \text{ diagonale et } P^{-1}NP \text{ triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.}$$
La matrice $P^{-1}AP$ est alors aussi triangulaire supérieure et on a bien $P_A(X) = P_D(X)$.

Lemma 1.1. *Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$ et soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Pour tout $t \in \mathbf{C}^\times$, la matrice A est semblable à $D + N_t$, où les matrices N_t vérifient* $\lim_{t\to 0} N_t = 0$.

Démonstration. On garde les notations précédentes. Sur chaque espace propre E_λ de a, on a trouvé une base $(e_1, \dots, e_r)$ dans laquelle la matrice $T = (n_{i,j})$ de n est triangulaire supérieure. Soit $t \in \mathbf{C}^\times$. Dans la base $(e_1, te_2, \dots, t^{r-1}e_r)$ de E_λ, la matrice de d reste λI_r et celle de n devient $T_t := (t^{j-i}n_{i,j})$. Si on met toutes ces bases ensemble, la matrice de d dans la base de $\mathbf{C}^m$ qu'on obtient reste la même matrice diagonale, tandis que tous les coefficients non nuls de celle de n sont multipliés par une puissance strictement positive de t, donc tendent vers 0 avec t. $\square$

Remarque 1.2. En travaillant beaucoup plus, on peut montrer qu'il existe une base dans laquelle les seuls coefficients non nuls de la matrice de n sont situés juste au-dessus de la diagonale (réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents). Le raisonnement ci-dessus montre alors que N est semblable à tN, et A à $D + tN$. Mais le lemme suffit pour montrer la prop. 2.1.

2. Classes de conjugaison

Si $A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$, on note

$$\mathscr{C}_A = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{C})\} \subset \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$$

sa *classe de conjugaison.* On remarque que, pour tout $B \in \mathscr{C}_A$, on a

$$P_A = P_B \quad \text{et} \quad \pi_A = \pi_B$$

(même polynôme caractéristique et même polynôme minimal). Cela provient du fait, que pour tout polynôme $q \in \mathbf{C}[X]$ et tout $M \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$, on a

$$q(P^{-1}MP) = P^{-1}q(M)P.$$

On en déduit que si $B \in \overline{\mathscr{C}_A}$, on a

$$P_A = P_B \quad \text{et} \quad \pi_B \mid \pi_A. \tag{1}$$

Proposition 2.1. *Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$ et soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors $D \in \overline{\mathscr{C}_A}$.*

Démonstration. Il suffit de faire tendre t vers 0 dans le lemme 1.1. □

Corollary 2.2. *Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$. On a*

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \mathscr{C}_A \text{ fermée dans } \mathscr{M}_m(\mathbf{C}), \\ A \text{ nilpotente} &\iff 0 \in \overline{\mathscr{C}_A}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford.

Supposons A diagonalisable et soit $B \in \overline{\mathscr{C}_A}$. On a, par (1), $P_A = P_B$, de sorte que A et B ont les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités, et $\pi_A(B) = 0$. D'autre part, comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples. La matrice B est ainsi annulée par un polynôme scindé à racines simples : elle est diagonalisable. Comme les matrices A et B sont toutes les deux diagonalisables et qu'elles ont mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités, elles sont semblables. On a donc $B \in \mathscr{C}_A$, ce qui montre que $\mathscr{C}_A$ est fermée.

Inversement, supposons $\mathscr{C}_A$ fermée. La proposition donne $D \in \overline{\mathscr{C}_A}$. Comme $\overline{\mathscr{C}_A} = \mathscr{C}_A$, on a $D \in \mathscr{C}_A$. Comme D est diagonalisable, A, qui est conjuguée à D, l'est donc aussi. On a donc montré la première équivalence.

Supoosons A nilpotente. On a alors $D = 0$ et la proposition entraîne $0 \in \overline{\mathscr{C}_A}$.

Inversement, supposons $0 \in \overline{\mathscr{C}_A}$. Par (1), les matrices A et 0 ont même polynôme caractéristique, c'est-à-dire X^m : la matrice A est donc nilpotente. On a ainsi montré la seconde équivalence. □

Université de Paris, U.F.R. de Mathématiques, 75013 Paris, France

E-mail address: `debarre@math.univ-paris-diderot.fr`